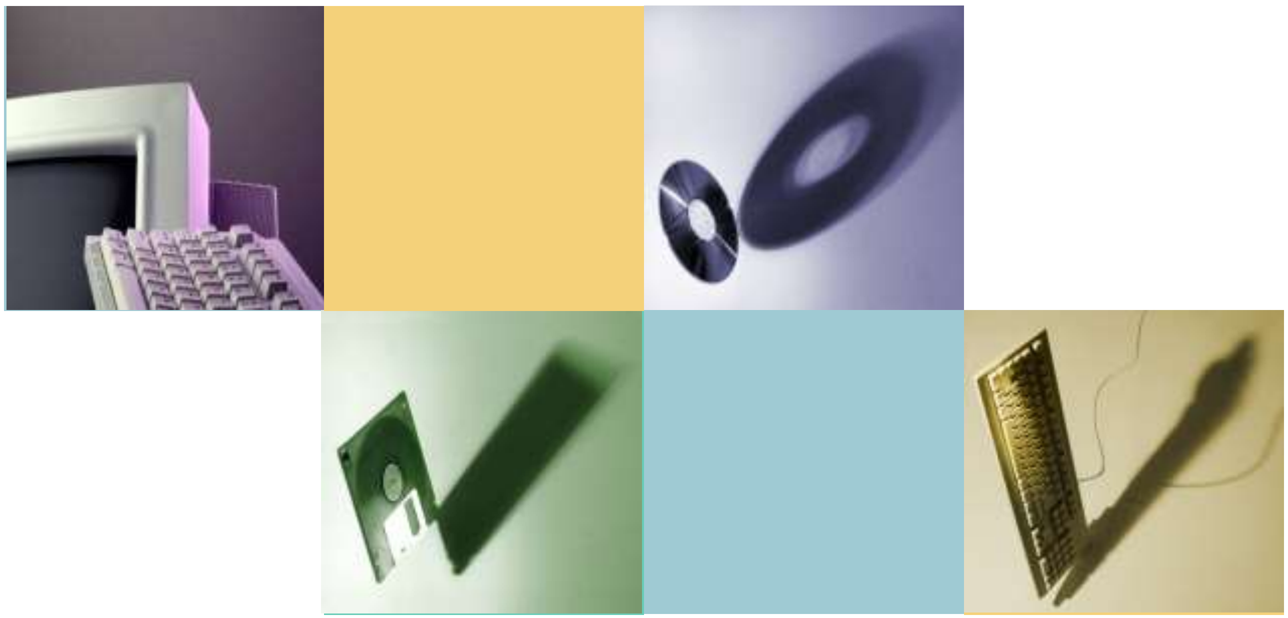
Unidad 1 - Lección 1.2



Exponentes y Radicales

Actividad 1.2

Referencia del texto:

- Sección 1.2 – Exponentes y Radicales; Ejercicios de práctica: Páginas 1 – 46, 47-80; 93-98

Referencia del Web:

- Math2me: Leyes de Exponentes (exponentes enteros positivos; Leyes de Exponentes (incluye exponentes negativos); Ejercicio 5; Ejercicio 7
- Virtual – Leyes de Radicales; Multiplicación de Radicales del mismo índice

$$\underbrace{x^n}_{\text{potencia}}$$

base: x

exponente: n

Si n entero positivo

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}$$

EXPONENTES POSITIVOS

Ejemplos

- $4^3 \;=\; 4 \times 4 \;\times 4 = \;\; 64$
- $(-3)^4 \;=\; -3 \times -3 \;\times -3 \;\times -3 \;=\;\; 81$
- $-3^4 \;=\; -(3 \times 3 \;\times 3 \;\times 3 \;= -\, 81$

Recuerde: Si no hay un paréntesis alrededor de un número negativo, se entiende que la base de la potencia es positiva.

- 3^{25}

Con la calculadora $3\;\;[\;\hat{}\;]\;25\;[enter]$

$$8.472886094 * 10^{11}$$

$$3^{25} \approx \; 847{,}288{,}609{,}400$$

Si x es distinto de 0 y n es un número natural, $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

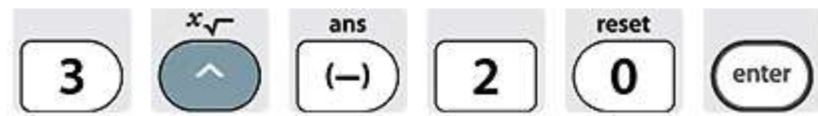
Además, $x^0 = 1$

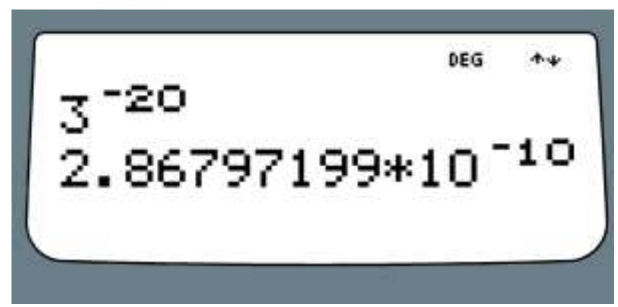
EXPONENTES NO POSITIVOS

Ejemplos 3

- $(-5)^0 = 1$
- $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64}$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 = \dfrac{3^2}{2^2} = \dfrac{9}{4}$
- 3^{-20}

Con la calculadora TI30X-Multiview





$$3^{-20} \approx 0.000000000286797199$$

Ejemplo 4

- Exprese el número en la forma a/b, donde a y b son enteros

$$
\begin{aligned}
-2^4 + 5^{-1} &= -16 + \frac{1}{5} \\
&= \frac{5 \times -16}{5} + \frac{1}{5} \\
&= \frac{-80}{5} + \frac{1}{5} \\
&= \mathbf{\frac{-79}{5}}
\end{aligned}
$$

LEYES DE EXPONENTES

Regla 1 y 2 de Exponentes

Si x, y es distinto de 0 y a, b son números enteros

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

- Simplifique:

$$(4^3)^2 = 4^6$$
$$= 4096$$

$$(x^3)^5 = x^{15}$$

$$(xy)^a = x^a y^a$$

$$(2 \cdot 3)^5 = 2^5 \cdot 3^5$$
$$= 7776$$

$$(x \cdot y)^5 = x^5\, y^5$$

$$(4x^3)^2 = 4^2\,(x^3)^2 \quad = 16x^6$$

$$(-2x^3y^4)^3 = (-2)^3\,(x^3)^3(y^4)^3 \quad = -8x^9y^{12}$$



Regla 3 de Exponentes

Si x es distinto de 0 y a un números entero $\left[\dfrac{x}{y}\right]^a = \dfrac{x^a}{y^a}$

- Simplifique:

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2}$$

$$\left(\frac{2a}{b}\right)^3 = \frac{(2a)^3}{b^3} = \frac{2^3a^3}{b^3} = \frac{8a^3}{b^3}$$

$$\left(\frac{3a}{2b}\right)^5 = \frac{(3a)^5}{(2b)^5} = \frac{3^5a^5}{2^5b^5} = \frac{243a^5}{32b^5}$$

Ejemplos 2

- Simplifica

$$2a^2b(ab)^2 - 4a(ab)^3$$

$$= 2a^2b \cdot a^2b^2 - \ 4a \cdot a^3b^3$$

$$= 2a^4b^3 - \ 4a^4b^3$$

$$= -2a^4b^3$$

$$(3ab)^3 - 2a(ab)^2$$

$$= (3)^3a^3b^3 - 2a \cdot a^2b^2$$

$$= 27a^3b^3 - \ \ 2a^3b^2$$

No son términos semejantes

Regla del Cociente para Exponentes

Si x es distinto de 0 y a, b son números enteros $\dfrac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$

- Simplifique:

$$\frac{x^3y^3}{x^5y} = x^{-2}y^2 \quad = \frac{1}{x^2}\cdot y^2 = \frac{y^2}{x^2}$$

Exprese potencias con exponentes negativos a potencias equivalentes con exponentes positivos

$$(x^{-3})^2 = x^{-6} \quad = \frac{1}{x^6}$$

$$(y^3z^{-5})^2 \quad = y^6\ z^{-10} \quad = \frac{y^6}{z^{10}}$$

Ejemplos 4

Simplifique:

Exprese potencias con exponentes negativos a potencias equivalentes con exponentes positivos

$$\left(a^3b^{-2}\right)^{-4} = \left(a^3\right)^{-4}\left(b^{-2}\right)^{-4} = a^{-12}b^8 \quad = \frac{b^8}{a^{12}}$$

$$\left(2x^{-1}y^2\right)^{-3} = 2^{-3}\left(x^{-1}\right)^{-3}\left(y^2\right)^{-3} = \frac{1}{2^3}x^3y^{-6} \quad = \frac{x^3}{8y^6}$$

$$\left(\frac{3xy^2}{12x^2y}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x^{-1}y^1\right)^2 = \left(\frac{x^{-1}y}{4}\right)^2 = \frac{x^{-2}y^2}{4^2} \quad = \frac{y^2}{16x^2}$$

Ejercicios del Texto

Ejercicios 1-10: Exprese el número en la forma a/b, donde a y b son enteros.

1 $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$ 2 $(-3)^3$

3 $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}$ 4 $\dfrac{2^0 + 0^2}{2 + 0}$

5 $-2^4 + 3^{-1}$ 6 $\left(-\frac{3}{2}\right)^4 - 2^{-4}$

7 $9^{5/2}$ 8 $16^{-3/4}$

9 $(-0.008)^{2/3}$ 10 $(0.008)^{-2/3}$

Ejer. 11–46: Simplifique.

11 $\left(\frac{1}{2}x^4\right)(16x^5)$ 12 $(-3x^{-2})(4x^4)$

13 $\dfrac{(2x^3)(3x^2)}{(x^2)^3}$ 14 $\dfrac{(2x^2)^3y^2}{4x^4y^2}$

15 $\left(\frac{1}{6}a^5\right)(-3a^2)(4a^7)$ 16 $(-4b^3)\left(\frac{1}{6}b^2\right)(-9b^4)$

17 $\dfrac{(6x^3)^2}{(2x^2)^3} \cdot (3x^2)^0$ 18 $\dfrac{(3y^3)(2y^2)^2}{(y^4)^3} \cdot (5y^3)^0$

19 $(3u^7v^3)(4u^4v^{-5})$ 20 $(x^2yz^3)(-2xz^2)(x^3y^{-2})$

21 $(8x^4y^{-3})\left(\frac{1}{2}x^{-5}y^2\right)$ 22 $\left(\dfrac{4a^2b}{a^3b^2}\right)\left(\dfrac{5a^2b}{2b^4}\right)$

23 $\left(\frac{1}{3}x^4y^{-3}\right)^{-2}$ 24 $(-2xy^2)^5\left(\dfrac{x^7}{8y^3}\right)$

29 $(5x^2y^{-3})(4x^{-5}y^4)$ 30 $(-2r^2s)^5(3r^{-1}s^3)^2$

31 $\left(\dfrac{3x^5y^4z}{x^0y^{-3}z}\right)^2$ 32 $(4a^2b)^4\left(\dfrac{-a^3}{2b}\right)^2$

33 $(-5a^{3/2})(2a^{1/2})$ 34 $(-6x^{7/5})(2x^{8/5})$

35 $(3x^{5/6})(8x^{2/3})$ 36 $(8r)^{1/3}(2r^{1/2})$

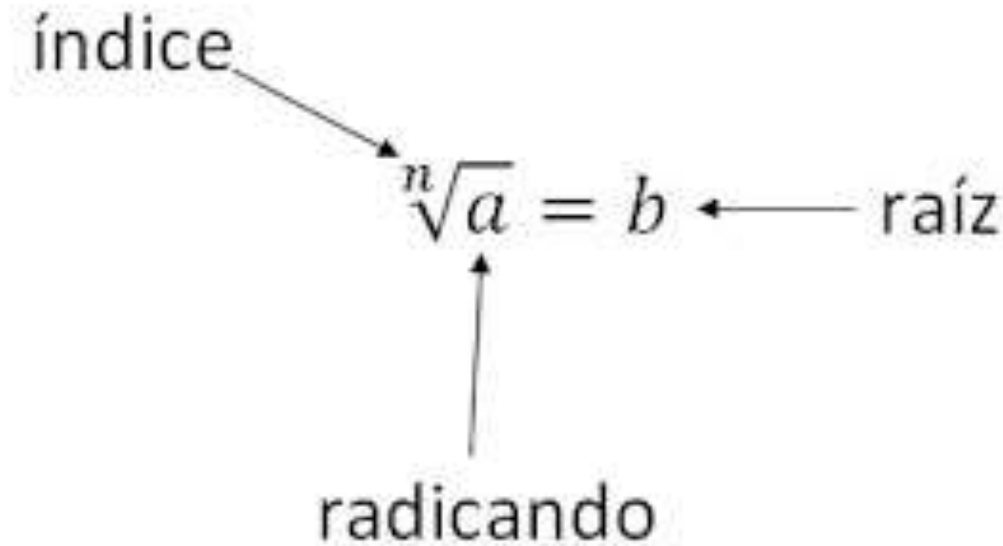
37 $(27a^6)^{-2/3}$ 38 $(25z^4)^{-3/2}$

39 $(8x^{-2/3})x^{1/6}$ 40 $(3x^{1/2})(-2x^{5/2})$

41 $\left(\dfrac{-8x^3}{y^{-6}}\right)^{2/3}$ 42 $\left(\dfrac{-y^{3/2}}{y^{-1/3}}\right)^3$

43 $\left(\dfrac{x^6}{16y^{-4}}\right)^{-1/2}$ 44 $\left(\dfrac{c^{-4}}{81d^8}\right)^{3/4}$

45 $\dfrac{(x^6y^3)^{-1/3}}{(x^4y^2)^{-1/2}}$ 46 $a^{4/3}a^{-3/2}a^{1/6}$



RADICALES

Raíz cuadrada

- Sea a un número **positivo ó 0**. Entonces, la “raíz cuadrada de a” representado por $\sqrt{a}$ es un número tal que:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Número irracional

- De manera que:

$$\sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{36} = 6 \qquad \sqrt{3}$$

Aprox 1.73

- Si a es el **cuadrado** de un racional **positivo ó 0** (cuadrado perfecto), $\sqrt{a}$ es un número racional.
- Cuadrados perfectos:

Aprox 11.27

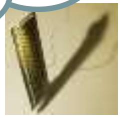
$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \quad 121 \quad 144$$

$$\sqrt{81} = 9 \qquad \sqrt{625} = 25 \qquad \sqrt{127}$$

Número irracional

$$[2nd][x^2]625[enter] \qquad [2nd][x^2]127[enter]$$





Raíz cúbica

- Sea a un número. Entonces, la “raíz cúbica de a” representado por $\sqrt[3]{a}$ es un número tal que:

$$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a}=a$$

Número irracional

- De manera que:

$$\sqrt[3]{8}=2 \qquad \sqrt[3]{-8}=-2 \qquad \sqrt[3]{27}=3 \qquad \sqrt[3]{36}$$

Aprox 3.3

- Si a es la potencia cúbica de un racional (cubo perfecto), $\sqrt[3]{a}$ es un número racional.
- Cubos perfectos:

Aprox -5.03

$$-125 \quad -64 \quad -27 \quad -8 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad 125$$

$$\sqrt[3]{-64}=-4 \qquad \sqrt[3]{729}=9 \qquad \sqrt[3]{-127}$$

Número irracional

$3[2nd][\text{^}]729[enter]$ $\qquad$ $3[2nd][\text{^}]-127[enter]$



N-ésima raíz principal

- Sea a un número y n un número entero mayor que 2, la "**n-ésima raíz principal** de a" representado por $\sqrt[n]{a}$ es un número tal que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \cdots \sqrt[n]{a} = a$$

índice *radicando*

$$\sqrt[n]{a}$$

- Si n es par a tiene que ser **positivo ó 0**.
- Si n es impar a puede ser un número cualquiera

$$\sqrt{a^2} = |a| \qquad \sqrt[3]{a^3} = a \qquad \sqrt[n]{a^n} = a$$

No es un número real

$$\sqrt[5]{-243} = -3$$

Número irracional

$5[2nd][\wedge] - 243\ [enter]$

$\sqrt[4]{-16}$ $\ Domain\ error$

$\sqrt[4]{39}$

Aprox 2.5

$4[2nd][\wedge] - 16\ [enter]$

$4[2nd][\wedge]39\ [enter]$

Regla del Producto de Radicales

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

- Multiplique

$$\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{15}$$

$$\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{9x}$$

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

versión simplificada

$$[2nd][x^2]18\ [enter]$$

Simplificando Radicales

- Simplifique las siguientes raíces cuadradas:

$$\sqrt{40} \quad = \sqrt{4 \cdot 10} \quad = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} \quad = 2\sqrt{10}$$

  - La TI30XS Multiview simplifica raíces cuadradas …$[2nd][x^2]40\ [enter]$

$$\sqrt{75} \quad = \sqrt{25 \cdot 3} \quad = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} \quad = 5\sqrt{3}$$

$$\sqrt{x^2} \quad = |x|$$

$$\sqrt{x^4} \quad = |x^2|$$

$$\sqrt{x^6} \quad = |x^3|$$

Si n es par …

$$\sqrt{x^n} \quad = \quad |x^{\frac{n}{2}}|$$

$$\sqrt{x^3} \quad = \sqrt{x^2 \cdot x}$$

$$= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x}$$

$$= |x|\sqrt{x}$$

$$\sqrt{18x^7} \quad = \sqrt{9x^6 \cdot 2x}$$

$$= \sqrt{9x^6} \cdot \sqrt{2x}$$

$$= 3|x^3|\sqrt{2x}$$

Ejemplo 5

- Simplifique

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt[3]{x^6} = x^2$$

$$\sqrt[3]{x^9} = x^3$$

Si n es divisible entre 3 …

$$\sqrt{a^n} = a^{\frac{n}{3}}$$

$$\sqrt[3]{64x^7} = \sqrt[3]{64x^6} \cdot \sqrt[3]{x}$$

$$= 4x^2 \sqrt[3]{x}$$

$$\sqrt{16x^6y} \cdot \sqrt{500y^2} = \sqrt{16 \cdot x^6} \cdot \sqrt{y} \cdot \sqrt{100 \cdot y^2} \cdot \sqrt{5}$$

$$= 4 \cdot |x^3| \cdot \sqrt{y} \cdot 10 \cdot |y| \cdot \sqrt{5}$$

$$= 40|x^3y|\sqrt{5y}$$

Exponentes racionales $a^{1/n}$

- Si a es un número real tal que $\sqrt[n]{a}$ existe y m, n son números naturales, entonces:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$
$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- Ejemplos
  - $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$
  - $12^{\frac{1}{9}} = \sqrt[9]{12}$
  - $(-10)^{3/7} = \sqrt[7]{(-10)^3} = \sqrt[7]{-1000}$ ó $-\sqrt[7]{1000}$
  - $(-5)^{1/2}$ no está definido

Cálculo de $a^{1/n}$

- Todas las reglas de exponentes enteros aplican a exponentes racionales.
- Calcule $16^{1/4}$
  - Calculadora(TI30XIIS):16[^]1[$a^{b/c}$]4[=]

$$16^{\frac{1}{4}} = 2$$

- Aproxime $5^{1/2}$ a la milésima más cercana:
  - Calculadora(TI30XIIS):5 [^]1[$a^{b/c}$]2[=]

$$5^{\frac{1}{2}} \approx 2.236$$

- Aproxime : $(-3)^{1/5}$ a la centésima más cercana.
  - Calculadora:[(][(-)] 3[)] [^]1[$a^{b/c}$]5[)][=]

$$(-3)^{\frac{1}{5}} \approx -1.25$$

Ejercicios del Texto

Ejer. 47–52: Reescriba la expresión usando exponentes racionales.

47 $\sqrt[4]{x^4 + y}$ 48 $\sqrt[3]{x^3 + y^2}$

49 $\sqrt[3]{(a + b)^2}$ 50 $\sqrt{a + \sqrt{b}}$

51 $\sqrt{x^2 + y^2}$ 52 $\sqrt[3]{r^3 - s^3}$

Ejer. 53–56: Reescriba la expresión usando un radical.

53 (a) $4x^{3/2}$ (b) $(4x)^{3/2}$

54 (a) $4 + x^{3/2}$ (b) $(4 + x)^{3/2}$

55 (a) $8 - y^{1/3}$ (b) $(8 - y)^{1/3}$

56 (a) $64y^{1/3}$ (b) $(64y)^{1/3}$

Ejer. 57–80: Simplifique la expresión y racionalice el denominador cuando sea apropiado.

57 $\sqrt{81}$ 58 $\sqrt[3]{-216}$

59 $\sqrt[5]{-64}$ 60 $\sqrt[4]{512}$

61 $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ 62 $\sqrt{\dfrac{1}{5}}$

63 $\sqrt{9x^{-4}y^6}$ 64 $\sqrt{16a^8b^{-2}}$

65 $\sqrt[3]{8a^6b^{-3}}$ 66 $\sqrt[4]{81r^5s^8}$

67 $\sqrt{\dfrac{3x}{2y^3}}$ 68 $\sqrt{\dfrac{1}{3x^3y}}$

71 $\sqrt[4]{\dfrac{5x^8y^3}{27x^2}}$ 72 $\sqrt[4]{\dfrac{x^7y^{12}}{125x}}$

73 $\sqrt[5]{\dfrac{5x^7y^2}{8x^3}}$ 74 $\sqrt[5]{\dfrac{3x^{11}y^3}{9x^2}}$

75 $\sqrt[4]{(5x^5y^{-2})^4}$ 76 $\sqrt[6]{(7u^{-3}v^4)^6}$

77 $\sqrt[5]{\dfrac{8x^3}{y^4}}\ \sqrt[5]{\dfrac{4x^4}{y^2}}$ 78 $\sqrt{5xy^7}\ \sqrt{15x^3y^3}$

79 $\sqrt[3]{3t^4v^2}\ \sqrt[3]{-9t^{-1}v^4}$ 80 $\sqrt[3]{(2r - s)^3}$