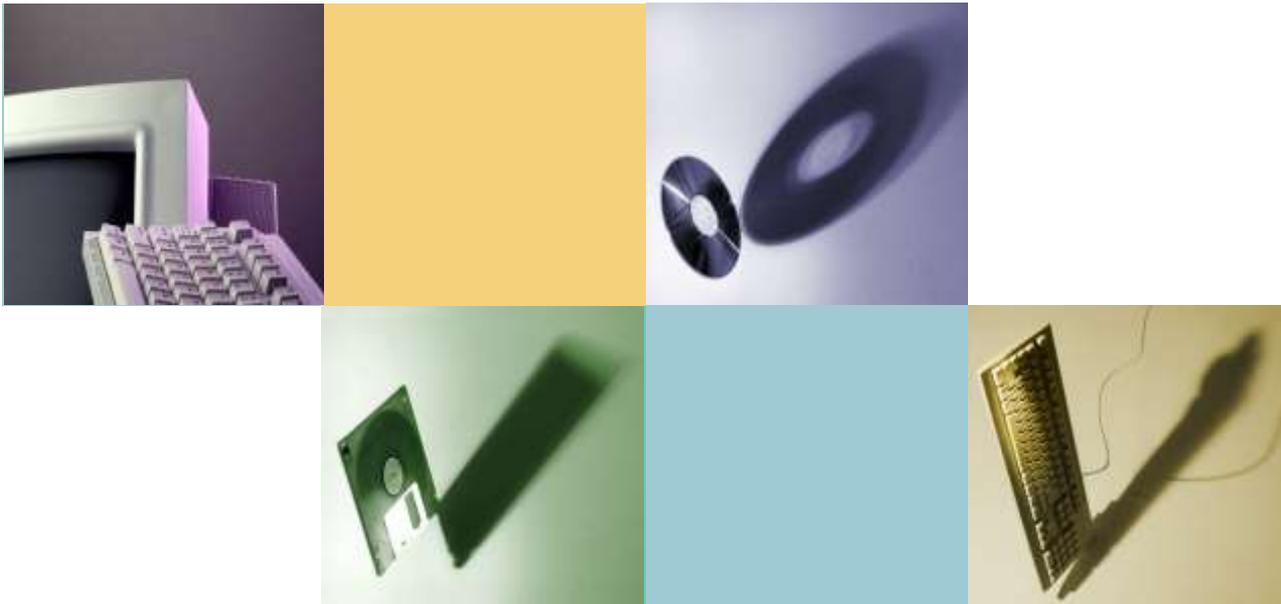


Lección 3.3



Ecuaciones en dos variables y sus gráficas

Actividades

- **Referencia:** Capítulo 3 – Secciones 3.1; 3.2; 3.3
- **Ejercicios de Práctica**– 3.1 Ejercicios 1 – 6; 3.2 Ejercicios 1 – 20; 3.3 1- 6, 19, 20, 41-44, 45-46
- Referencias del Web
 - Math.com – [The Coordinate Plane](#);
 - Math2me: Pendiente de una recta; [Ejer 1](#); [Graficar una función lineal](#)



Ecuaciones en dos variables

- Compare: $x + 5 = 8$ $x + y = 8$
 $x = 3$ $(3) + (5) = 8$ $x = 3$ $y = 5$
La solución es 3 $(1) + (7) = 8$ $x = 1$ $y = 7$
 $(-1) + (9) = 8$ $x = -1$ $y = 9$
¡Son sólo algunas soluciones!

- Otros ejemplos de ecuaciones con dos variables:

$$y + 3x - 5 = 0$$

$$y - 4x^2 = 1$$

$$2y = -6|x| + 3$$

- Las soluciones de las ecuaciones en dos variables son pares de números (x, y)



Ejemplo 1

- ¿Es $(-1, -8)$ una solución de $y + 3x - 5 = 0$?

$$y + 3x - 5 = 0$$

$$(-8) + 3(-1) - 5 = 0$$

$$-16 = 0$$

No

- Encuentre una solución de $y - 4x^2 = 1$ cuando $x = -1$:

$$y - 4x^2 = 1$$

$$y - 4(-1)^2 = 1$$

$$y - 4 = 1$$

$$y = 5$$

La solución es $(-1, 5)$



Ejemplo 2

- Encuentre dos soluciones de $2y - 3x = -8$
- **Paso 1:** Asigne valores a x (*variable independiente*). Por ejemplo: 0 y 1
- **Paso 2:** Resuelva por y (*variable dependiente*)

$$2y - 3x = -8$$

$$2y - 3(0) = -8$$

$$2y = -8$$

$$y = -4$$

$$2y - 3x = -8$$

$$2y - 3(1) = -8$$

$$2y - 3 = -8$$

$$2y = -5$$

$$y = -\frac{5}{2}$$

Las soluciones son:

$$x = 0, \quad y = -4$$

$$(0, -4)$$

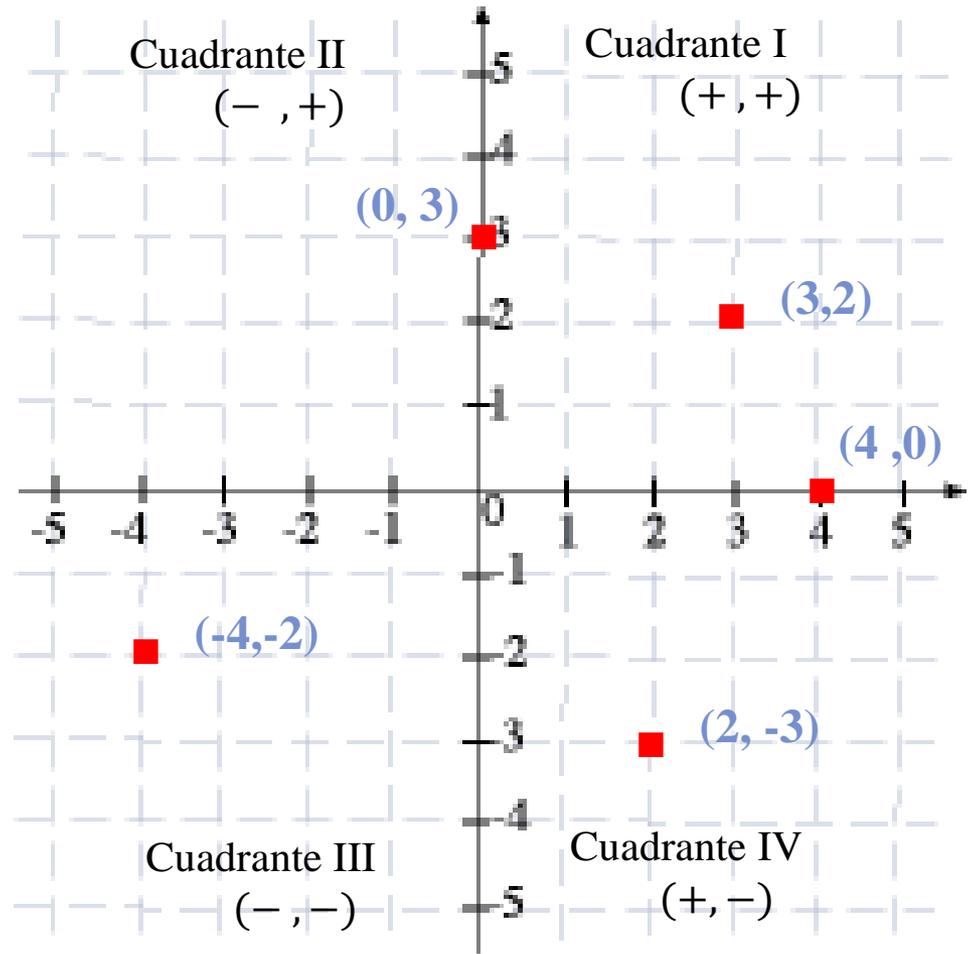
$$x = 1, \quad y = -\frac{5}{2}$$

$$(1, -\frac{5}{2})$$



Sistema de Coordenadas Cartesianas

- Plano formado por la intersección de dos rectas perpendiculares en un punto llamado **origen**.
- La localización de todo punto se expresa por sus coordenadas (x,y)
- Las recta horizontal es el eje de x y la vertical es eje de y
- El plano cartesiano se divide en cuatro cuadrantes.



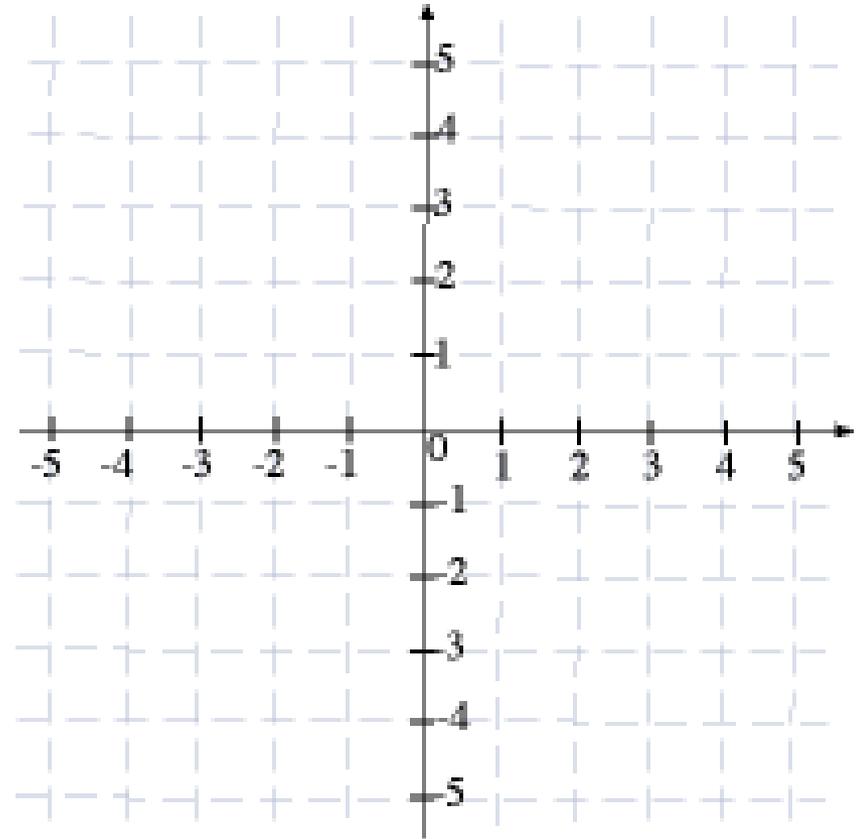
- Los puntos en el **eje horizontal** son de la forma $(?, 0)$
- Los puntos en el **eje vertical** son de la forma $(0, ?)$



Ejercicio #1

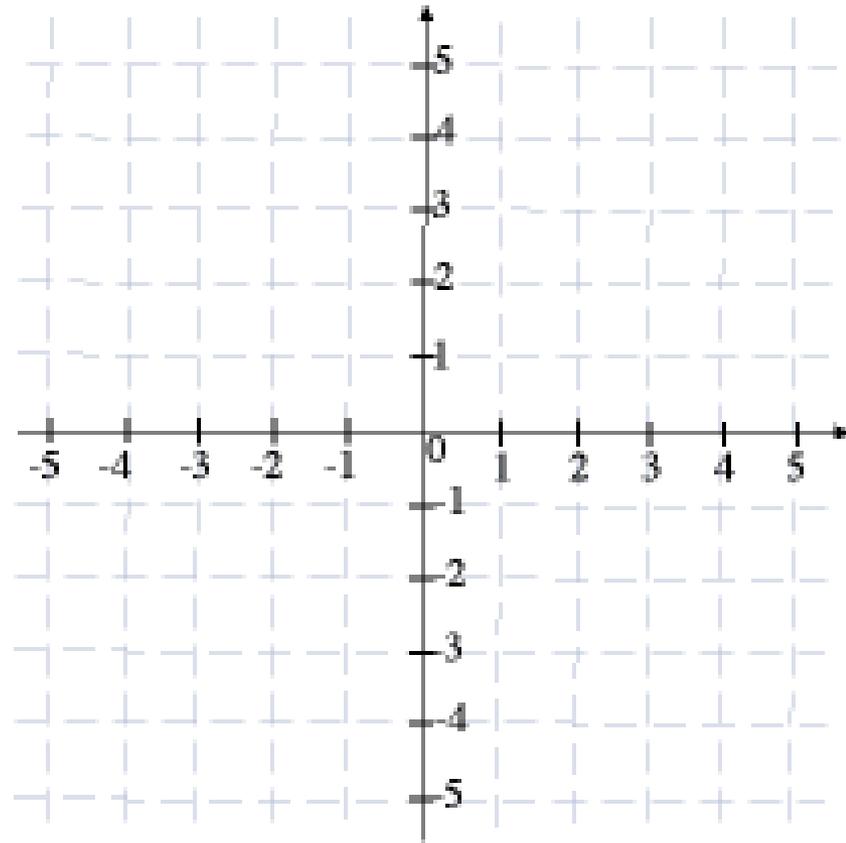
- Identifique el cuadrante o eje se encuentra los puntos: $(-3, 2)$, $(0,-3)$, $(4,-1)$, $(5,0)$

- $(-3, 2)$ está en cuadrante II
- $(0,-3)$ en el eje de y
- $(4,-1)$ en el cuadrante IV
- $(5,0)$ en el eje de x.



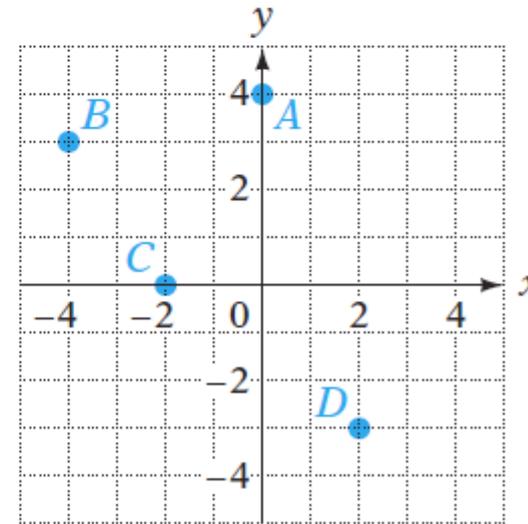
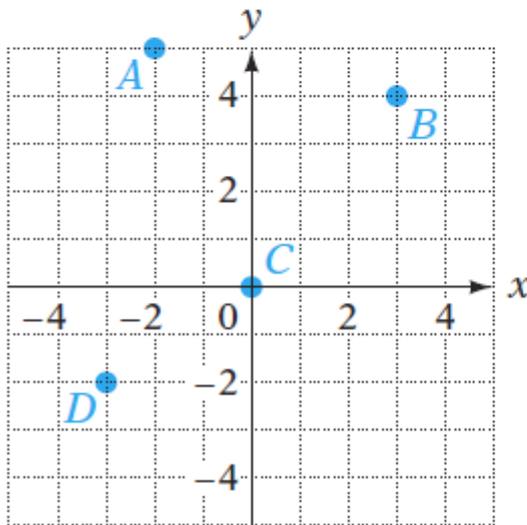
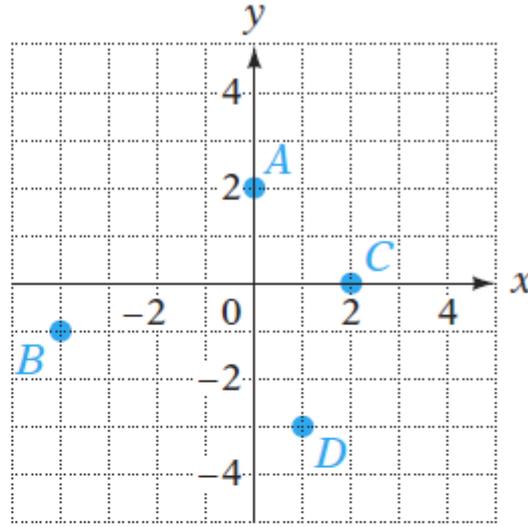
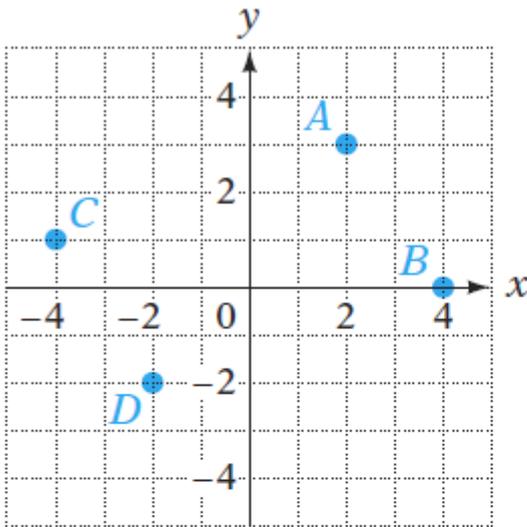
Ejercicios – Sistemas de Coordenadas p1

11. Grafica los pares ordenados $(-2, 1)$, $(3, -5)$, $(-2, 4)$ y $(0, 3)$.
12. Grafica los pares ordenados $(5, -1)$, $(-3, -3)$, $(-1, 0)$ y $(1, -1)$.
13. Grafica los pares ordenados $(0, 0)$, $(0, -5)$, $(-3, 0)$ y $(0, 2)$.
14. Grafica los pares ordenados $(-4, 5)$, $(-3, 1)$, $(3, -4)$ y $(5, 0)$.
15. Grafica los pares ordenados $(-1, 4)$, $(-2, -3)$, $(0, 2)$ y $(4, 0)$.
16. Grafica los pares ordenados $(5, 2)$, $(-4, -1)$, $(0, 0)$ y $(0, 3)$.



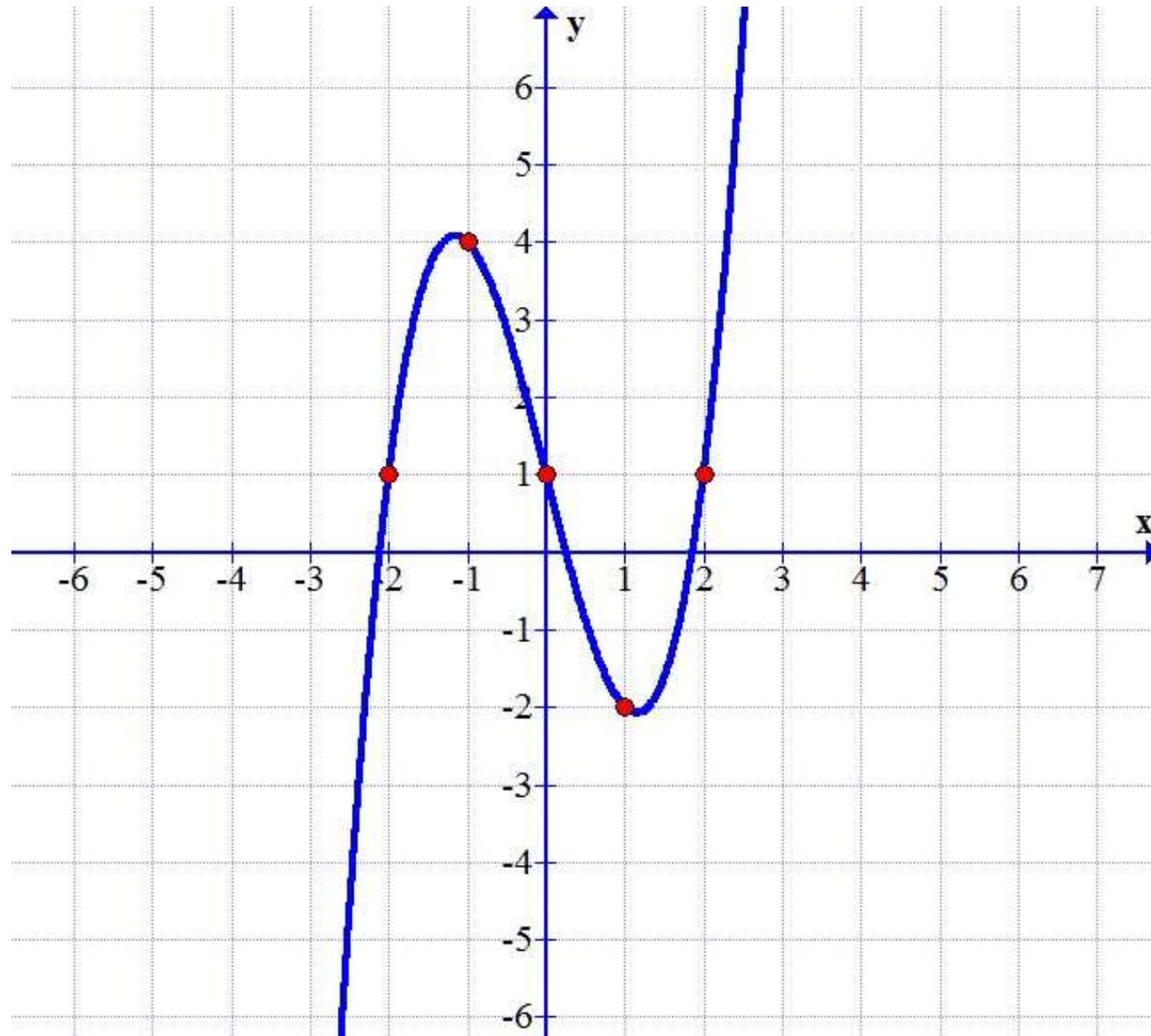
Ejercicios – Sistemas de Coordenadas p2

Determina las coordenadas de cada uno de los puntos.



Gráfica de $y = x^3 - 4x + 1$

x	y
-2	1
-1	4
0	1
1	-2
2	1



Programa GRAPH

- Permite graficar ecuaciones con dos variables.
- Pasos:
 1. Active Programa
 2. Seleccione “Insert relation” del menú Function

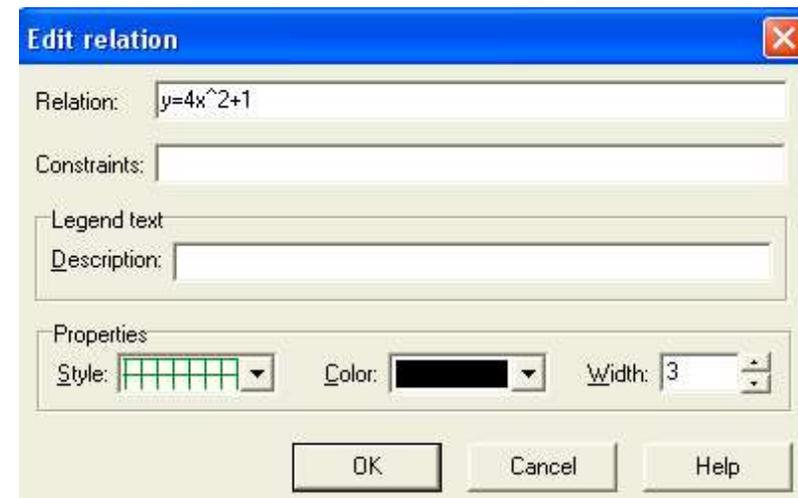
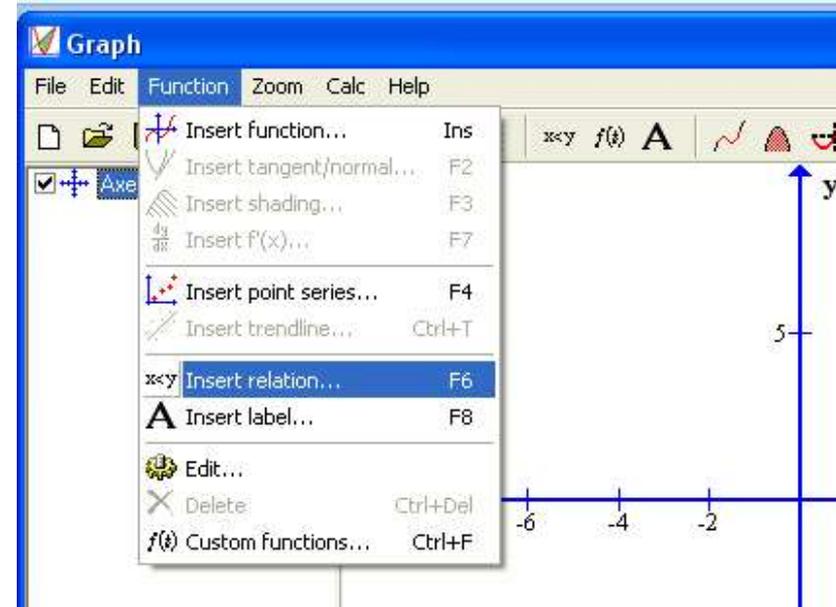
Ejemplo: Trace la gráfica de la siguiente ecuación:

$$y - 4x^2 = 1$$

- Seleccione *Function/Insert relation*
- Entre expresión:

$$y - 4x^2 = 1$$

Bajar de: <http://www.padowan.dk/graph/>



Trace la gráfica ...

Pasos: ...

- 4) Ajuste área de despliegue.
- 5) Guarde área de despliegue como una imagen con formato jpg

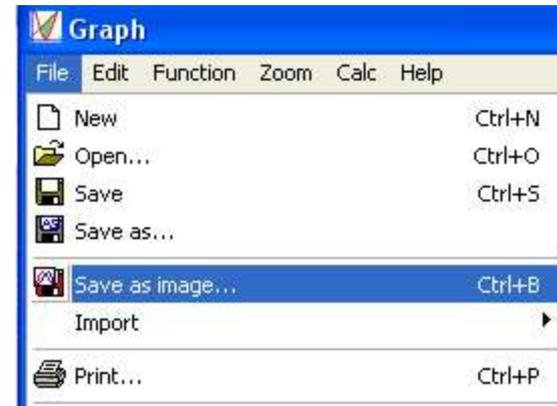
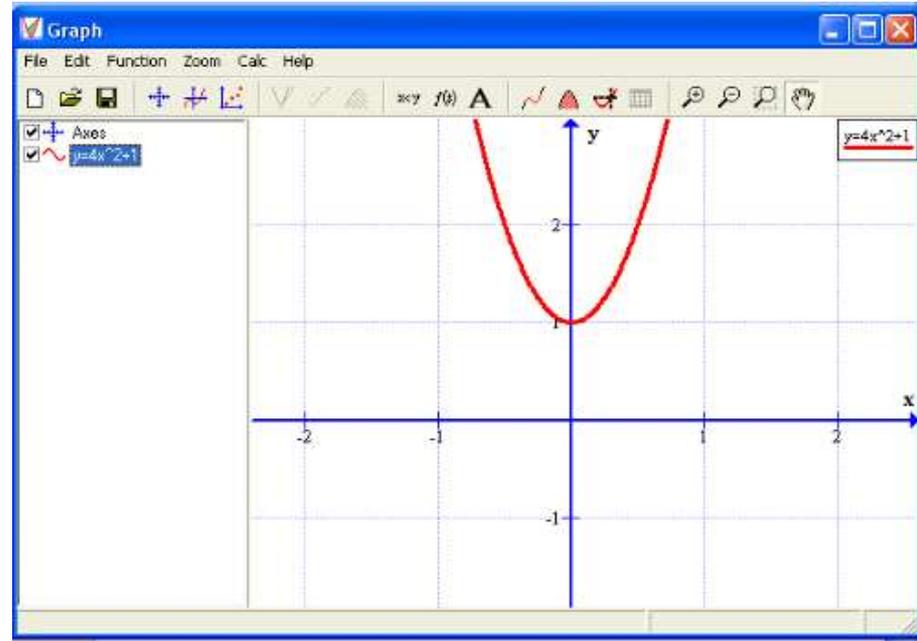
Seleccione nombre apropiado, por ejemplo:

Pag99_prob53

Tutoriales de GRAPH

[¿Cómo graficar?](#)

[¿Cómo guardar como imagen?](#)



Interceptos

- Puntos donde la gráfica cruza los ejes.

Intercepto en x es un punto de la forma $(x, 0)$

Para encontrar el ntercepto en x de una recta, deje que el valor de y se 0 y resuelva por x

Intercepto en y es un punto de la forma $(0, y)$

Para encontrar el ntercepto en y de una recta, deje que el valor de x sea 0 y resuelva por y

Ej: Determine los interceptos de $y = 3x - 6$

Si $y = 0$, resuelva por x Si $x = 0$, resuelva por y

$$(0) = 3x - 6$$

$$6 = 3x$$

$$x = 2$$

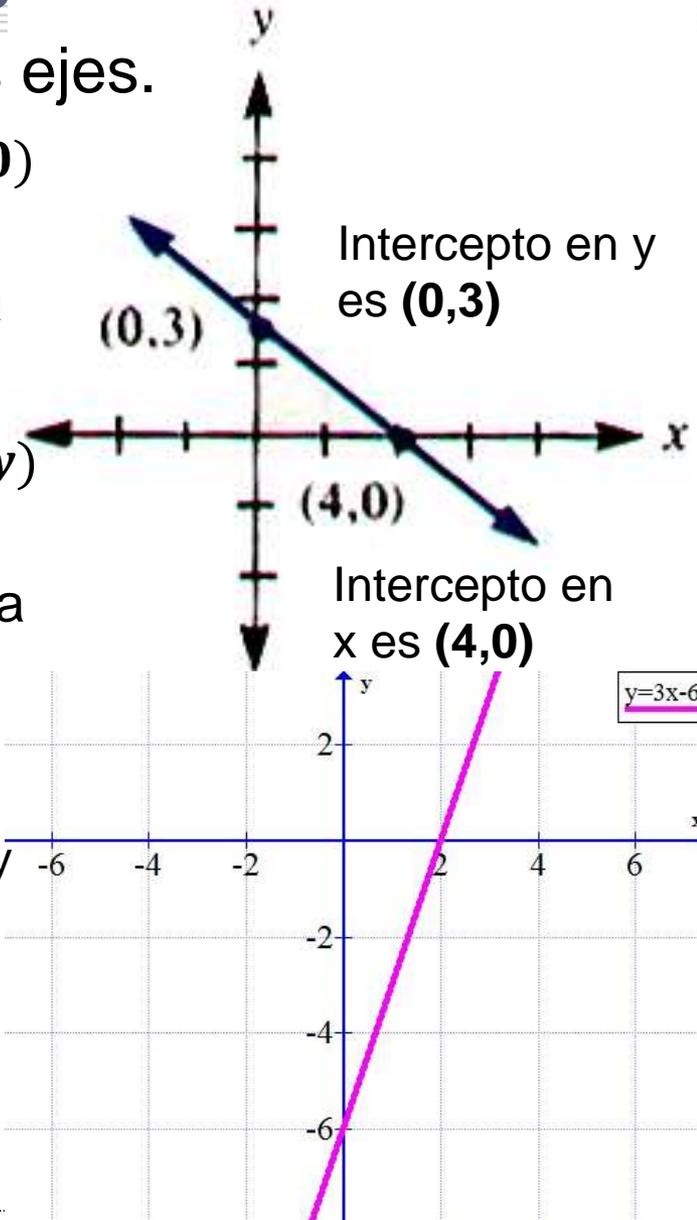
$$y = 3(0) - 6$$

$$y = 0 - 6$$

$$y = -6$$

Intercepto en x : $(2, 0)$

Intercepto en y : $(0, -6)$



Ejemplo 3

- Determine interceptos de la gráfica de:

$$y = x^2 - x - 6$$

- Solución:
- Para los interceptos en x, deje $y = 0$.

$$0 = x^2 - x - 6$$

$$0 = (x - 3)(x + 2)$$

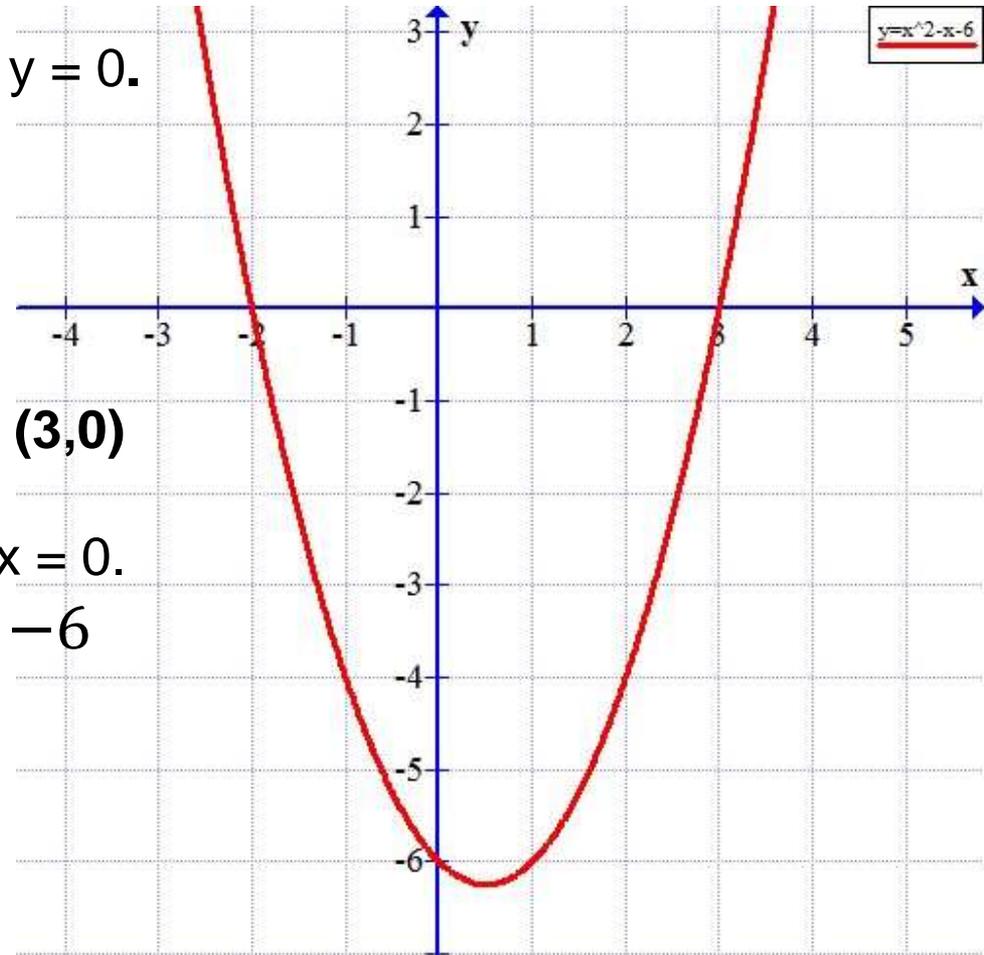
$$\mathbf{x = 3} \quad \mathbf{x = -2}$$

El intercepto en x son **$(-2,0)$ y $(3,0)$**

- Para los interceptos en y deje $x = 0$.

$$y = (0)^2 - (0) - 6 = -6$$

El intercepto en y es **$(0,-6)$**



Fórmula de distancia

- La distancia de dos puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) está determinada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Ejemplo: La distancia entre los puntos:

$(3,8)$ y $(-1,2)$ es:

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(-1 - 3)^2 + (2 - 8)^2} \\&= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} \\&= \sqrt{16 + 36} \\&= \sqrt{52} \\&= \sqrt{4 \cdot 13} \\&= 2\sqrt{13}\end{aligned}$$

$(-6, -4)$, $(3, 4)$

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(3 - (-6))^2 + (4 - (-4))^2} \\&= \sqrt{(9)^2 + (8)^2} \\&= \sqrt{81 + 64} \\&= \sqrt{145}\end{aligned}$$



Coordenadas del punto medio

- Las coordenadas del punto medio (x, y) de dos puntos (x_1, y_1) , (x_2, y_2) está dado por:

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- Ejemplo: El punto medio del segmento que une:

$(3, 8)$ y $(-1, 2)$

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{2 + 8}{2} \right) \\ &= \left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2} \right) \\ &= (1, 5)\end{aligned}$$

$(5, -4)$ y $(3, 2)$.

$$\begin{aligned}(x, y) &= \left(\frac{5 + 3}{2}, \frac{-4 + 2}{2} \right) \\ &= \left(\frac{8}{2}, \frac{-2}{2} \right) \\ &= (4, -1)\end{aligned}$$



Ejemplo 4

1. Encuentre la distancia entre $(3,-4)$ y $(5,4)$

$$\begin{aligned}d &= \sqrt{(5-3)^2 + (4-(-4))^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (8)^2} = \sqrt{68} = \sqrt{4 \cdot 17} = 2\sqrt{17}\end{aligned}$$

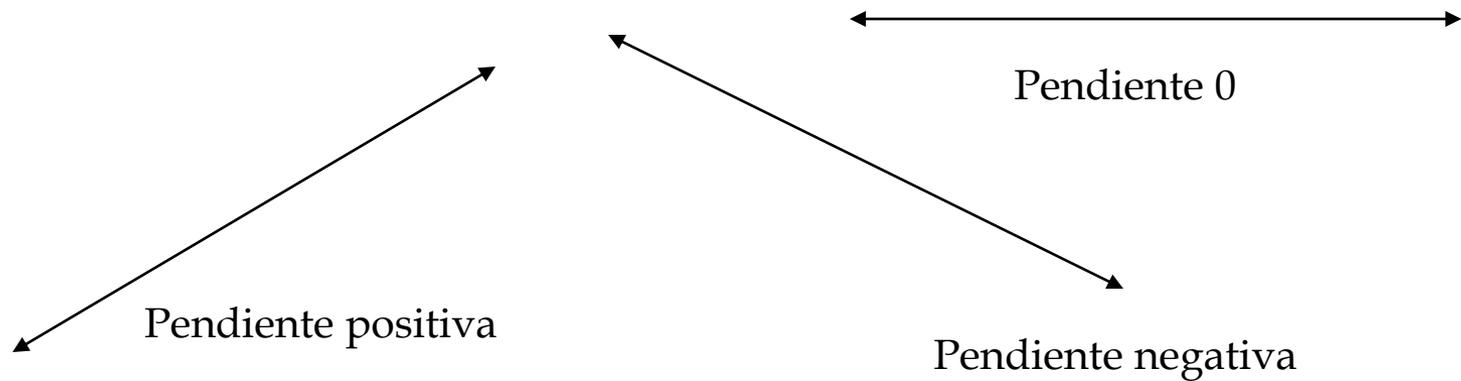
2. Determine el punto medio del segmento que une $(5,-4)$ y $(3,2)$.

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right) = \left(\frac{5+3}{2}, \frac{-4+2}{2} \right) = (4,-1)$$



Pendiente (Slope)

- La pendiente de una línea recta no vertical es una medida de inclinación de la recta con respecto al eje horizontal.
- Hay tres casos:



- La líneas rectas verticales no tienen pendiente.



Pendiente (Slope)

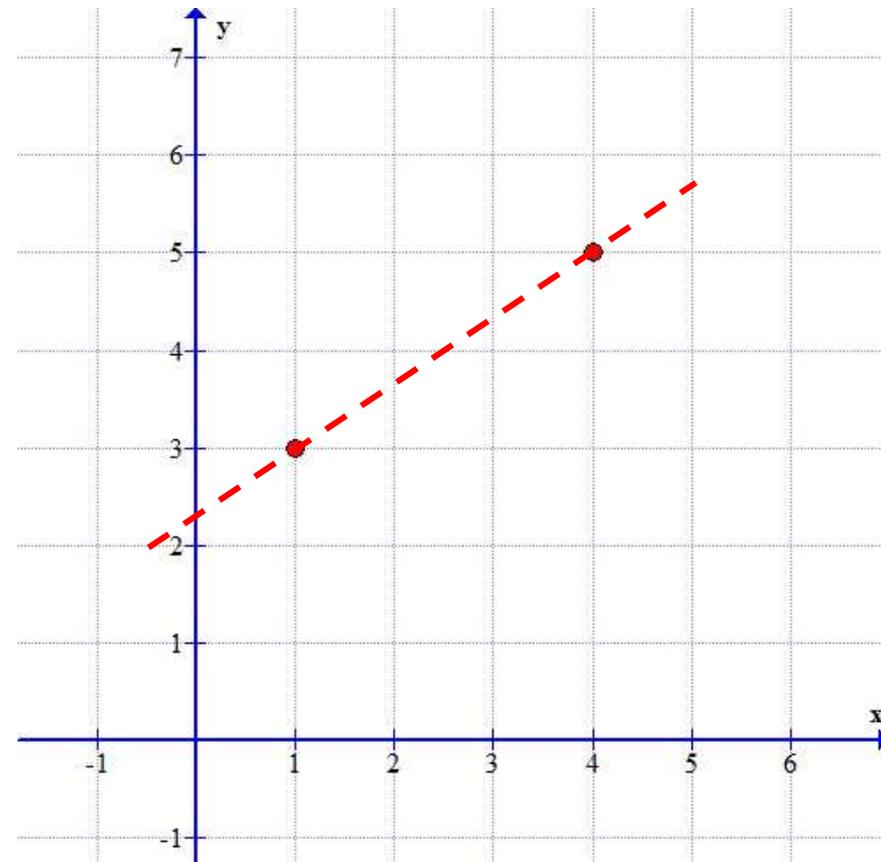
- Sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en una recta tal que $x_1 \neq x_2$. Entonces, la **pendiente (m)** de la recta que por esos puntos es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

La pendiente de la recta por
(1,3) y (4,5):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(5) - (3)}{(4) - (1)} = \frac{2}{3}$$



La ecuación de una recta

- Si A , B y C son números reales, con A , B distintos de 0 entonces la gráfica de la ecuación $Ax + By = C$ es una recta (**Forma estándar**).

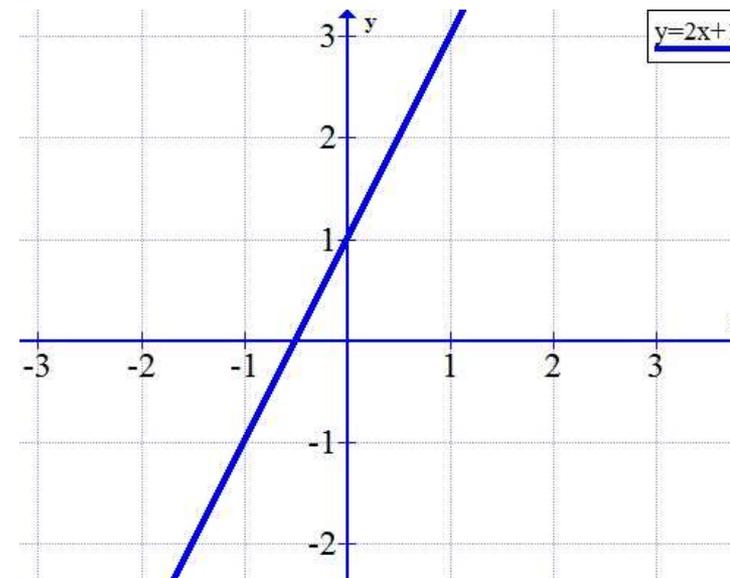
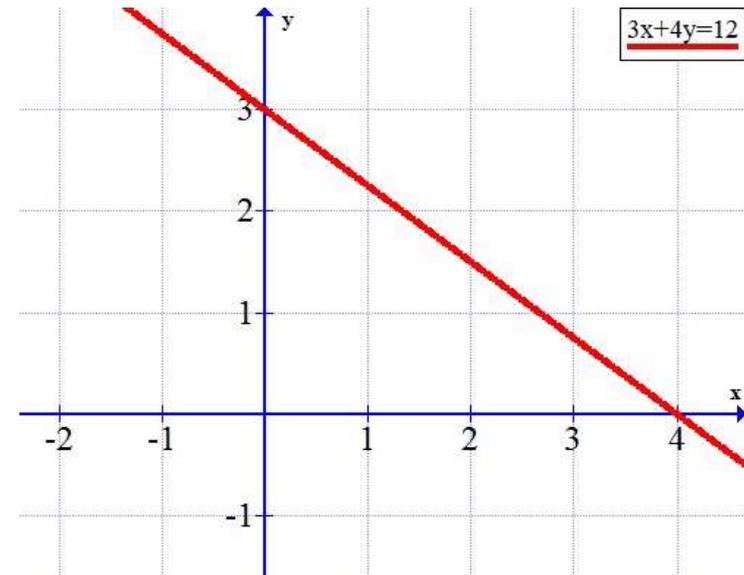
- Ejemplo:

$$3x + 4y = 12$$

- Si m y b son constantes, la gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta (**Forma pendiente-intercepto**)

- Ejemplo:

$$y = 2x + 1$$



Ejemplo 5

- Trace la gráfica de $2y - 3x = -8$
- **Paso 1:** Asigne valores a x (*variable independiente*). Por ejemplo: 0 y 1
- **Paso 2:** Resuelva por y (*variable dependiente*)

$$2y - 3x = -8$$

$$2y - 3(0) = -8$$

$$2y = -8$$

$$y = -4$$

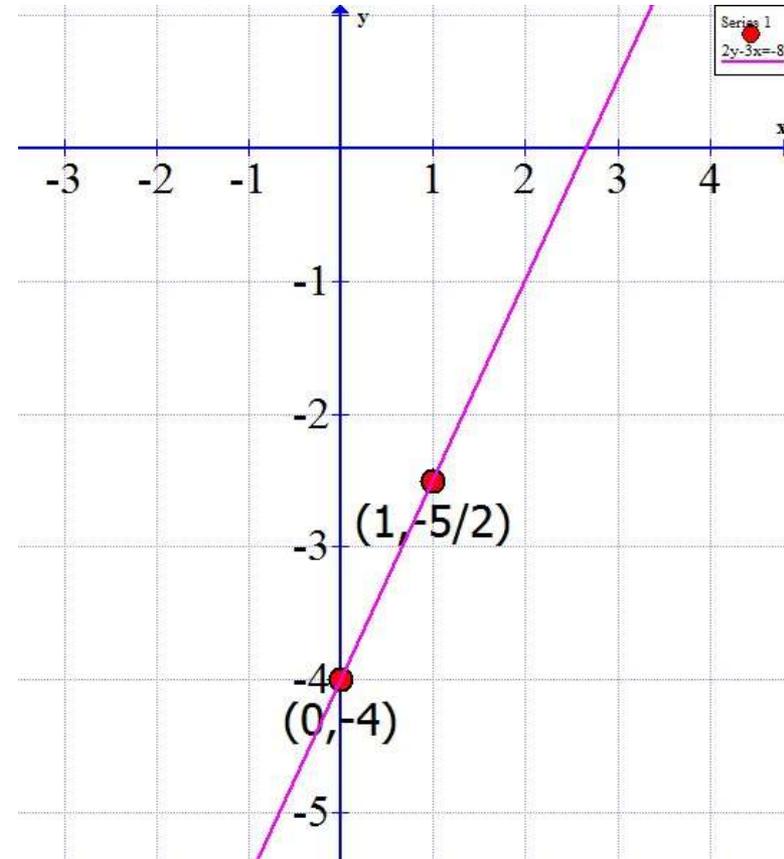
$$2y - 3x = -8$$

$$2y - 3(1) = -8$$

$$2y - 3 = -8$$

$$2y = -5$$

$$y = -\frac{5}{2}$$



Los puntos de la gráfica (o soluciones de la ecuación) son: $(0, -4)$ $(1, -\frac{5}{2})$



La ecuación de la recta

Si una línea recta tiene pendiente m y su intercepto en y es $(0, b)$, entonces su ecuación es $y = mx + b$.

Ejemplo 1:

Determine la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 e intercepto en y es -3.

$$y = mx + b$$

$$y = (-4)x + (-3)$$

$$y = -4x - 3$$

Ejemplo 2: Determine la pendiente e intercepto en y de la recta cuya ecuación es $-2y = -3x + 6$.

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-3}{-2}x + \frac{6}{-2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

Pendiente es $\frac{3}{2}$

Intercepto en y es $(0, -3)$



Pendiente - Punto

- Una ecuación de una recta no vertical con pendiente m que pasa por el punto (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Ejemplo: Determine la ecuación de la recta con **pendiente -2** y que pasa por **(-1,5)**:

$$y - (5) = (-2)(x - (-1))$$

$$y - 5 = -2(x + 1)$$

$$y - 5 = -2x - 2$$

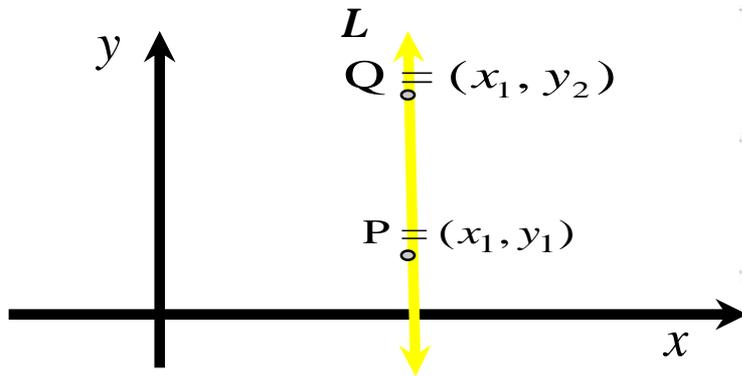
$$y = -2x - 2 + 5$$

$$y = -2x + 3$$



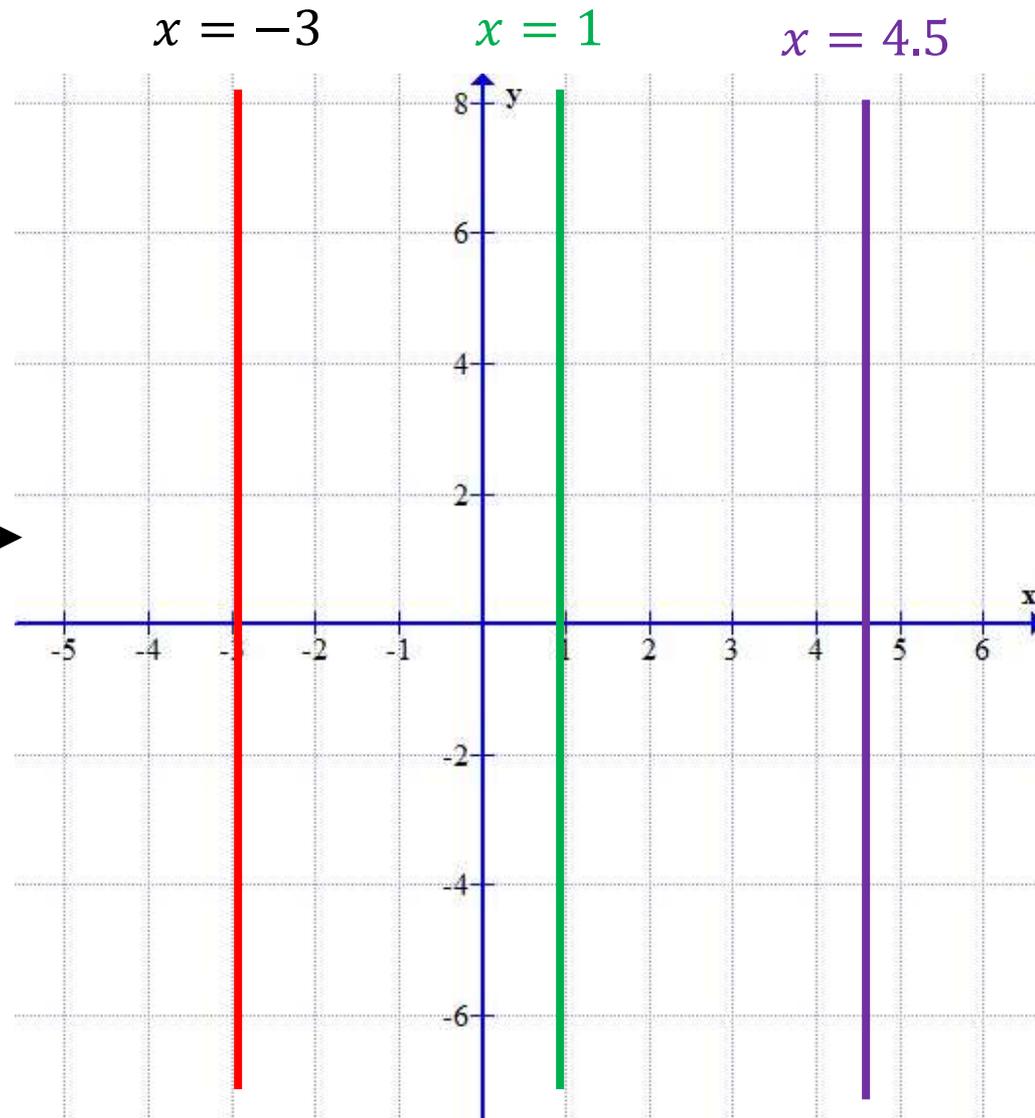
Ecuaciones de rectas verticales

- Si la recta es una línea vertical y la pendiente no está definida



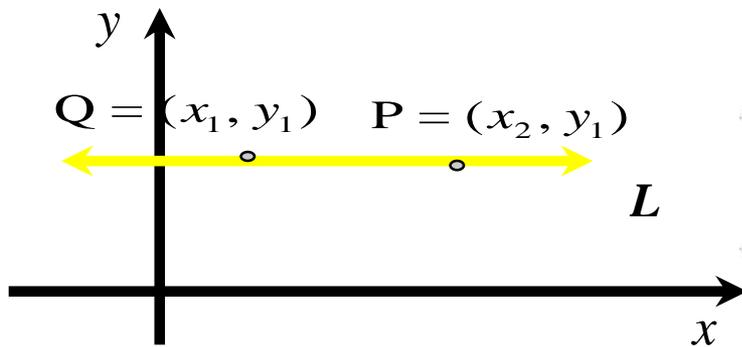
- Las ecuaciones de estas rectas son de la forma:

$$x = \text{número}$$



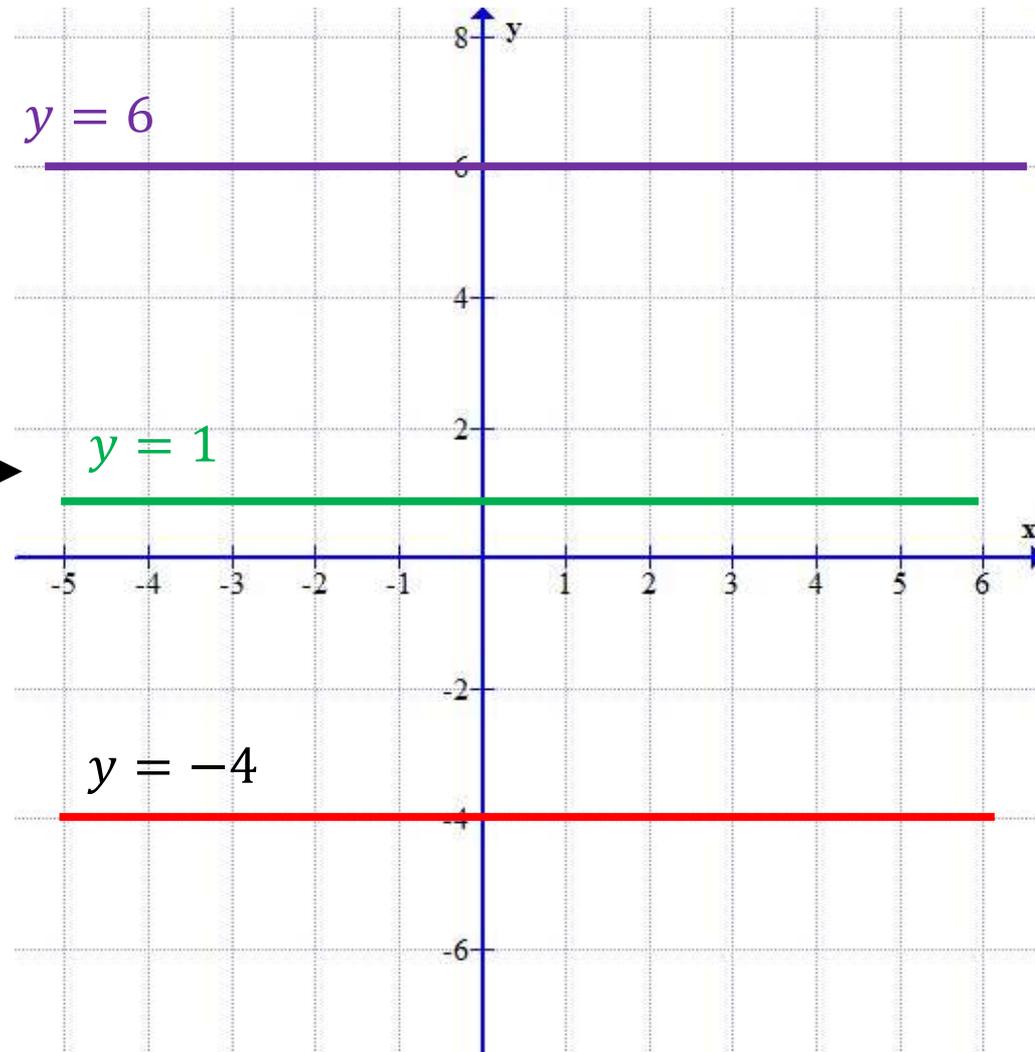
Ecuaciones de rectas horizontales

- Si la recta es una línea horizontal su pendiente es igual a 0



- Las ecuaciones de estas rectas son de la forma:

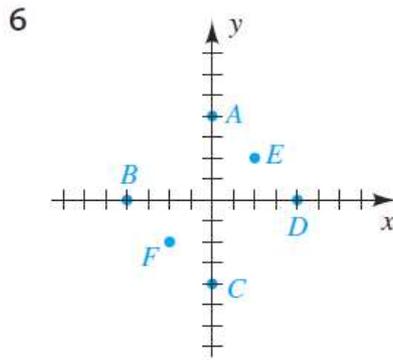
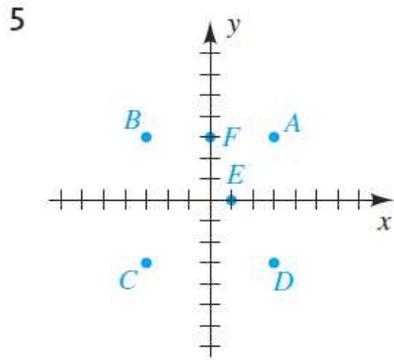
$$y = \text{número}$$



Ejercicios del Texto *pág 1*

- Grafique los puntos $A(5, -2)$, $B(-5, -2)$, $C(5, 2)$, $D(-5, 2)$, $E(3, 0)$ y $F(0, 3)$ en un plano de coordenadas.
- Grafique los puntos $A(-3, 1)$, $B(3, 1)$, $C(-2, -3)$, $D(0, 3)$, y $E(2, -3)$ en un plano de coordenadas. Trace los segmentos de recta AB , BC , CD , DE y EA .
- Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, 1)$, $C(3, 3)$, $D(-1, -1)$, y $E(-2, -2)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma (a, a) , donde a es un número real.
- Grafique los puntos $A(0, 0)$, $B(1, -1)$, $C(3, -3)$, $D(-1, 1)$, y $E(-3, 3)$. Describa el conjunto de todos los puntos de la forma $(a, -a)$, donde a es un número real.

Ejer. 5–6: Encuentre las coordenadas de los puntos A – F .



Ejer. 9–14: (a) Encuentre la distancia $d(A, B)$ entre A y B .
 (b) Encuentre el punto medio del segmento AB .

9 $A(4, -3)$, $B(6, 2)$ 10 $A(-2, -5)$, $B(4, 6)$

11 $A(-7, 0)$, $B(-2, -4)$ 12 $A(5, 2)$, $B(5, -2)$

13 $A(7, -3)$, $B(3, -3)$ 14 $A(-4, 7)$, $B(0, -8)$

Ejer. 1–20: Trace la gráfica de la ecuación y marque las intersecciones con los ejes x y y .

1 $y = 2x - 3$

2 $y = 4x + 2$

3 $y = -x + 2$

4 $y = -2x - 3$

5 $y = -2x^2$

6 $y = \frac{1}{3}x^2$

7 $y = 2x^2 - 1$

8 $y = -x^2 + 2$

9 $x = \frac{1}{4}y^2$

10 $x = -2y^2$

11 $x = -y^2 + 5$

12 $x = 2y^2 - 4$

13 $y = -\frac{1}{4}x^3$

14 $y = \frac{1}{2}x^3$

15 $y = x^3 - 8$

16 $y = -x^3 + 1$

17 $y = \sqrt{x}$

18 $y = \sqrt{-x}$

19 $y = \sqrt{x} - 4$

20 $y = \sqrt{x - 4}$

Ejercicios del Texto *pág 2*

Ejer. 1–6: Trace la recta que pasa por A y B , y encuentre su pendiente m .

1 $A(-3, 2), B(5, -4)$

2 $A(4, -1), B(-6, -3)$

3 $A(3, 4), B(-6, 4)$

4 $A(4, -3), B(4, 2)$

5 $A(-3, 2), B(-3, 5)$

6 $A(4, -2), B(-3, -2)$

Ejer. 19–20: Trace las gráficas de las rectas en el mismo plano de coordenadas.

19 $y = x + 3, y = x + 1, y = -x + 1$

20 $y = -2x - 1, y = -2x + 3, y = \frac{1}{2}x + 3$

Ejer. 41–44: Use la forma pendiente-ordenada al origen para hallar la pendiente e intersección con el eje y de la recta dada y trace su gráfica.

41 $2x = 15 - 3y$

42 $7x = -4y - 8$

43 $4x - 3y = 9$

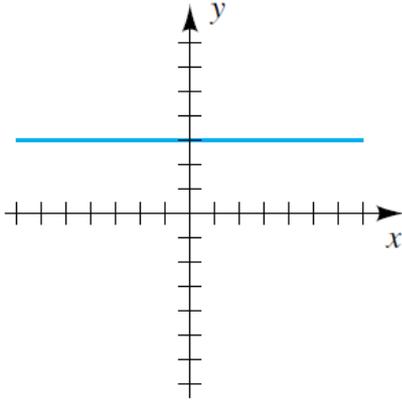
44 $x - 5y = -15$



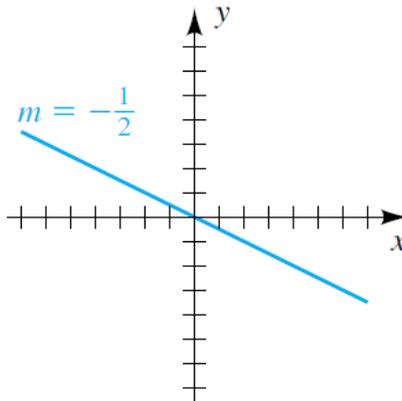
Ejercicios del Texto *pág 3*

Ejer. 45–46: Encuentre una ecuación de la recta mostrada en la figura.

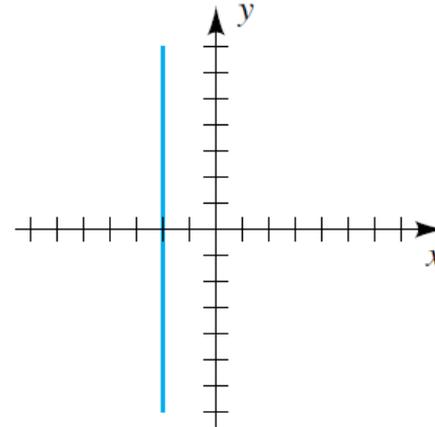
45 (a)



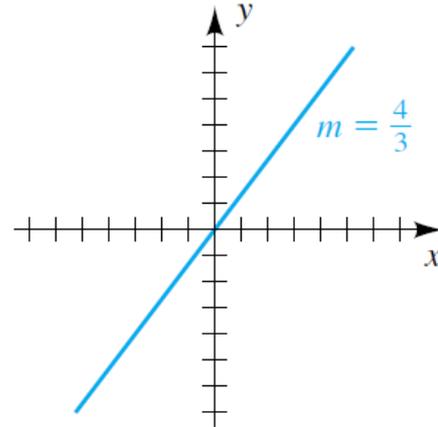
(b)



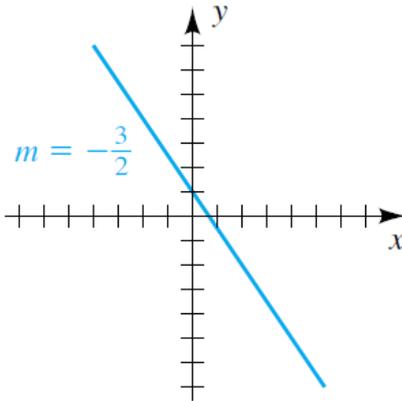
46 (a)



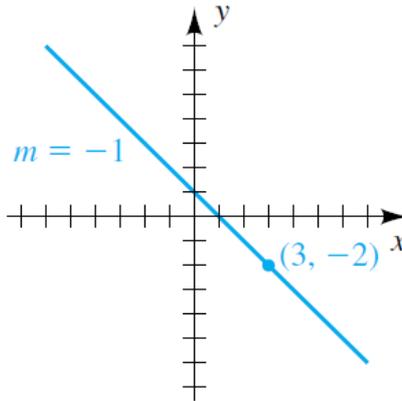
(b)



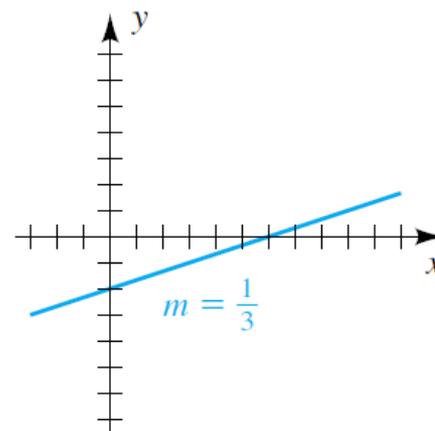
(c)



(d)



(c)



(d)

