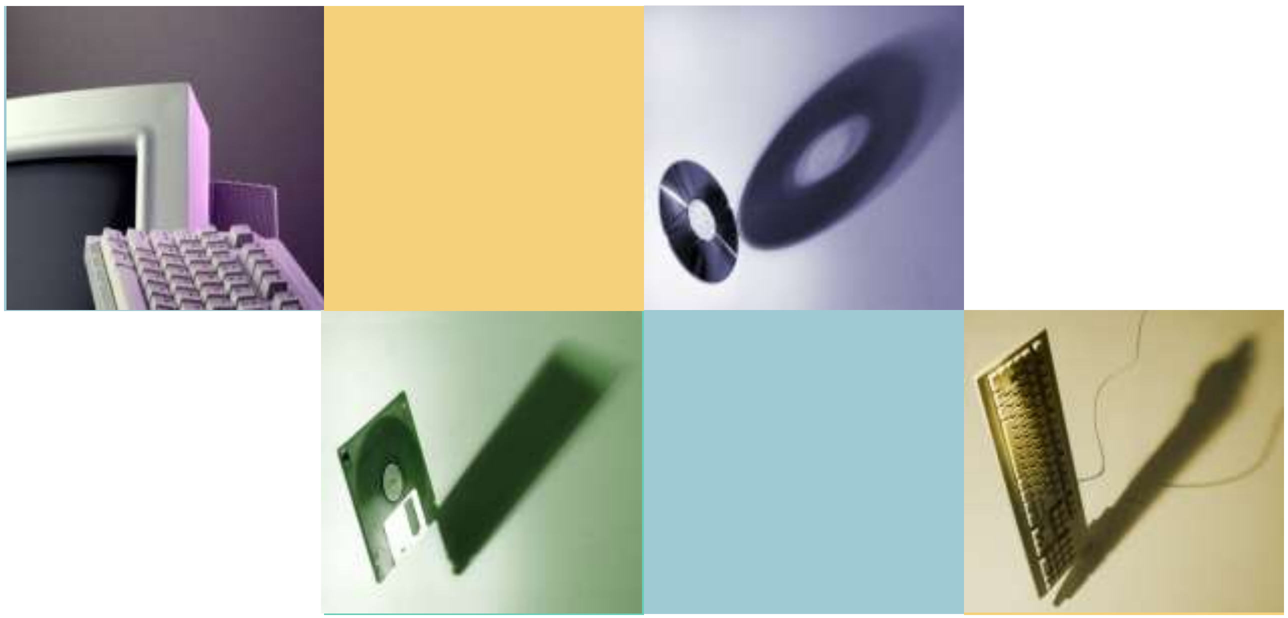
Lección 4.1



Funciones y sus Gráficas

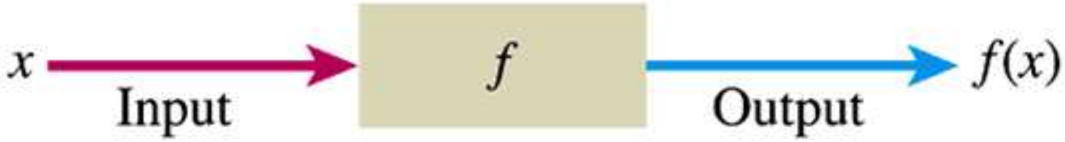
Actividades

- **Referencia Texto**: Seccíón 3.4 – Definición de Función; Ejercicios de Práctica: 1-6,15-29; Sección 3.5 Gráficas de Funciones; problemas impares 1,2, 3 – 26.
- **Referencias del Web**:
  - Math2me: Concepto de función; Identificar una función como gráfica; Evaluar una función Ejercicio 1; Ejercicio 2, Ejercicio 3
  - Khan Academy: ¿Qué es una función? ; Evaluando Funciones;
  - Evaluación de una función Parte 1, Parte 2
- Videos de Julio Profesor.NET
  - **FUNCIÓN LINEAL -** Teoría sobre la Función Lineal y la Función Constante
    FUNCIÓN VALOR ABSOLUTO - Teoría sobre la Función Valor Absoluto
  - **FUNCIÓN CUADRÁTICA O DE SEGUNDO GRADO -** Teoría sobre la Función Cuadrática; Análisis de la función $y=2x-x^2$; Análisis de la función $f(x)=x^2+8x+15$



¿Qué es una función?

- Una relación entre elementos de dos conjuntos tal cada uno del primero se le asocia un elemento único del segundo.



¿Cómo se representa una función?

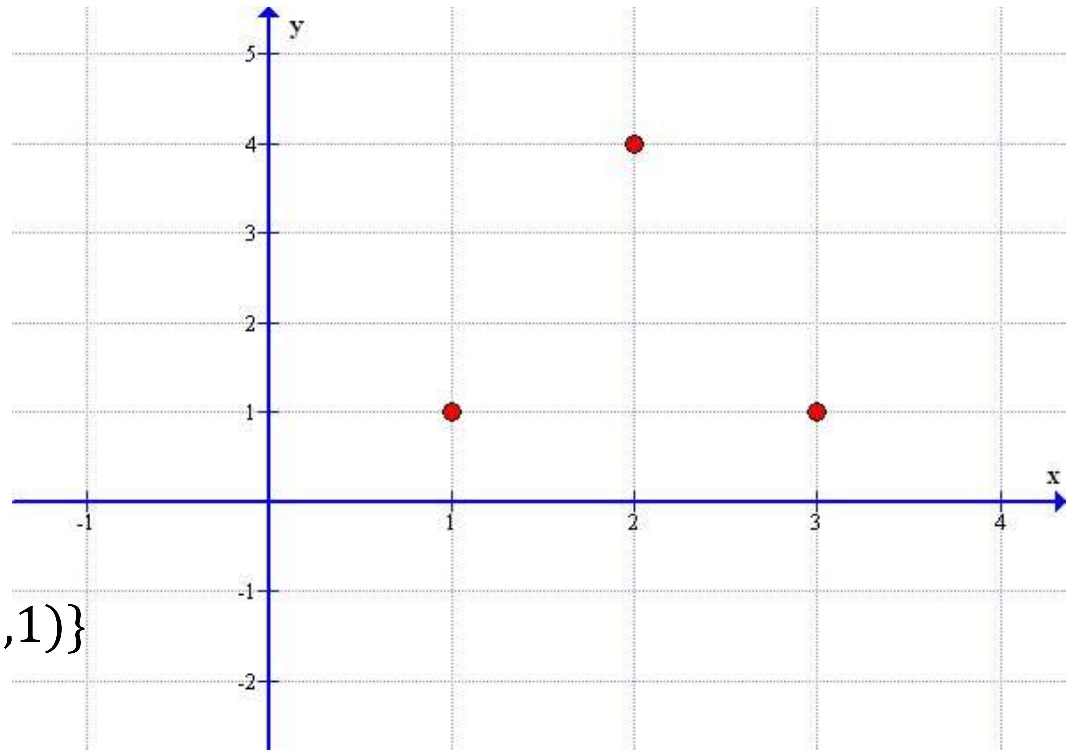
- Sea $x = \{1, 2, 3\}$, $y = \{1, 4\}$
  1. Tabla de valores

x	y
1	1
2	4
3	1

  2. $f(1) = 1$
     $f(2) = 4$
     $f(3) = 1$

  2. $f = \{(1,1), (2,4), (3,1)\}$

  3. Gráfica



  4. Ecuación con dos variables:

Ejemplo: $y = 2x^2 + 5$ $\quad f(x) = 2x^2 + 5$

Evaluando funciones

Para la función $f(x) = 2x^2 + 5$

- a) determine $f(3)$
- b) determine $f(h)$
- c) determine $f(x+1)$
- Solución:
  - a) $f(3) = 2(3)^2 + 5 = 23$
  - b) $f(h) = 2(h)^2 + 5 = 2h^2 + 5$
  - c) $f(x+1) = 2(x+1)^2 + 5$

$$
\begin{aligned}
&= 2(x+1)(x+1) + 5 \\
&= 2(x^2 + 2x + 1) + 5 \\
&= 2x^2 + 4x + 2 + 5 \\
&= 2x^2 + 4x + 7
\end{aligned}
$$

Ejercicios del Texto 3.4

1 Si $f(x) = -x^2 - x - 4$, encuentre $f(-2)$, $f(0)$ y $f(4)$.

2 Si $f(x) = -x^3 - x^2 + 3$, encuentre $f(-3)$, $f(0)$ y $f(2)$.

3 Si $f(x) = \sqrt{x-2} + 3x$, encuentre $f(3)$, $f(6)$ y $f(11)$.

4 Si $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$, encuentre $f(-2)$, $f(0)$ y $f(3)$.

Ejer. 5–10: Si a y h son números reales, encuentre

(a) $f(a)$ **(b)** $f(-a)$ **(c)** $-f(a)$ **(d)** $f(a+h)$

(e) $f(a) + f(h)$ **(f)** $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, **si** $h \neq 0$

5 $f(x) = 5x - 2$

6 $f(x) = 1 - 4x$

7 $f(x) = -x^2 + 3$

8 $f(x) = 3 - x^2$

9 $f(x) = x^2 - x + 3$

10 $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$

Ejemplo 1

- Escriba la ecuación $2x + 5y = -1$ como una función de la variable x.
  - Despeje y de la ecuación.

$$2x + 5y = -1$$

$$5y = -2x - 1$$

$$y = \frac{-2x - 1}{5}$$

$$y = \frac{-2x}{5} - \frac{1}{5}$$

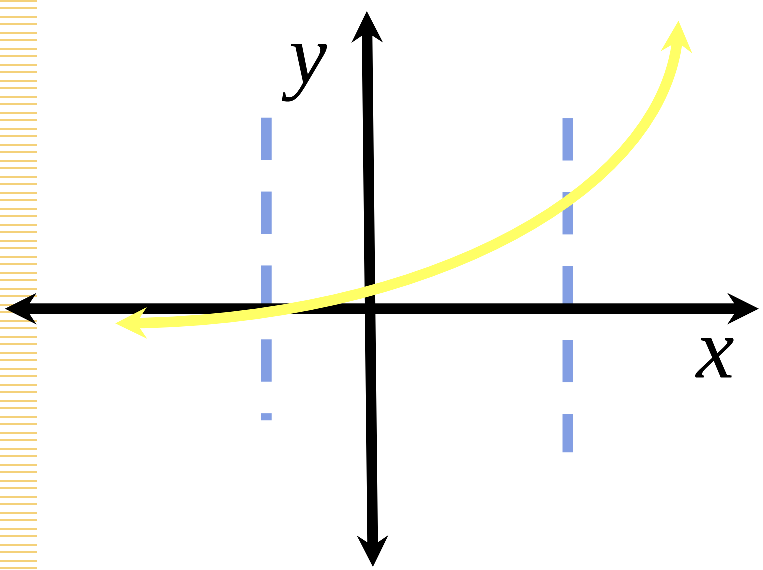
$$y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$$

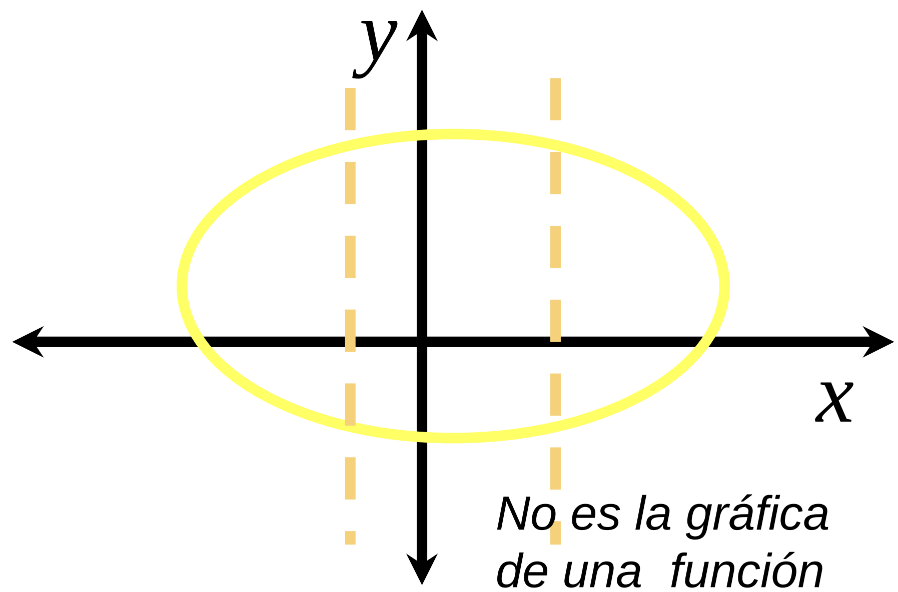
  - Reemplace y for $f(x)$

$$f(x) = \frac{-2x}{5} - \frac{1}{5}$$

Gráfica de funciones

- Un conjunto de puntos pertenecen a la gráfica de una función siempre y cuando cualquier recta vertical no pase por mas de un punto.



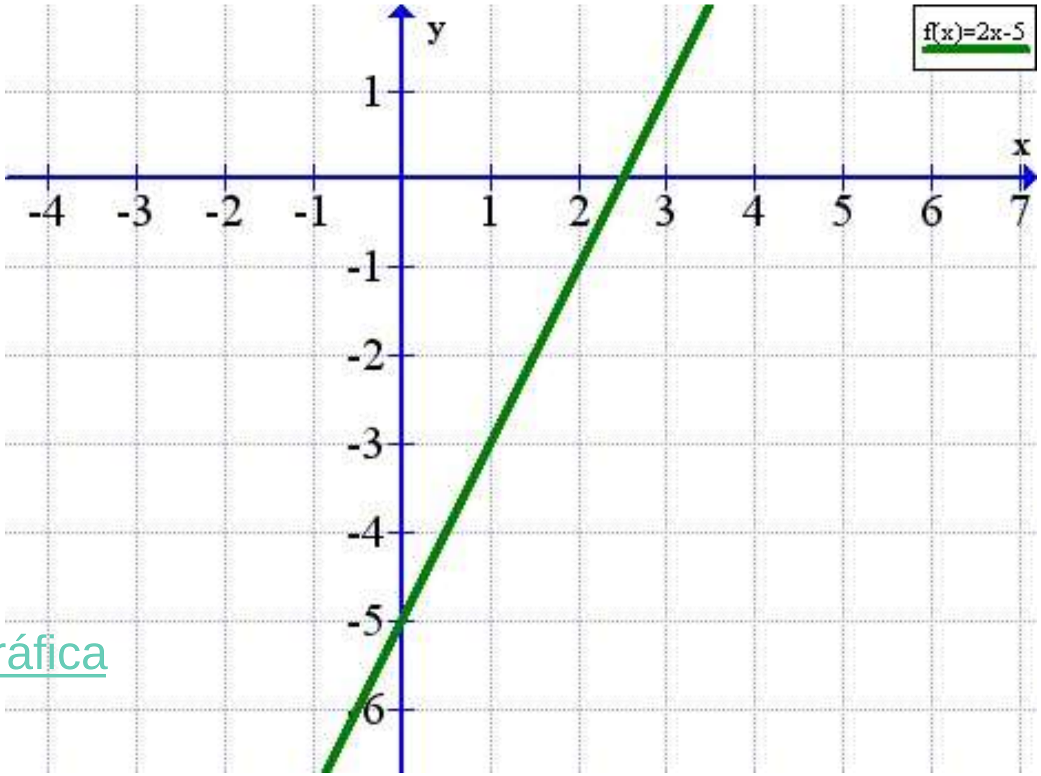


Prueba de la recta vertical

Ejemplo 5

- Grafique la función $f(x) = 2x - 5 \Leftrightarrow y = 2x - 5$

(GRAPH)
En el recuadro "Function equation" entre 2x - 5

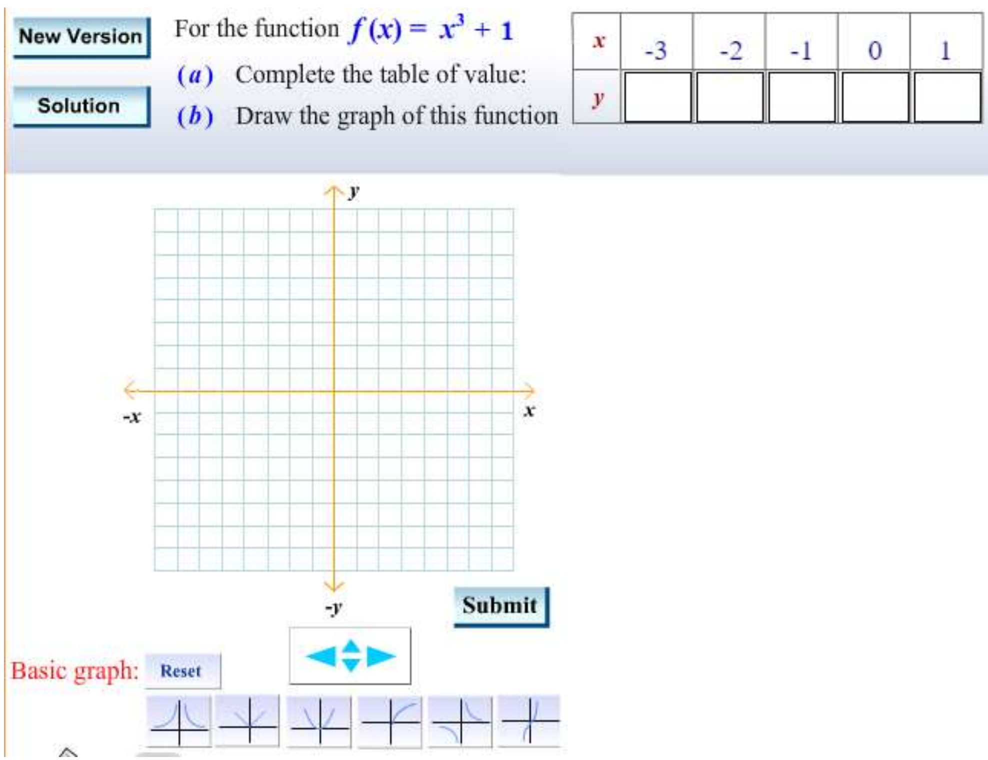


[Ver animación: Cómo graficar con Graph]

[Ver animación: Cómo guardar gráfica como una imagen]

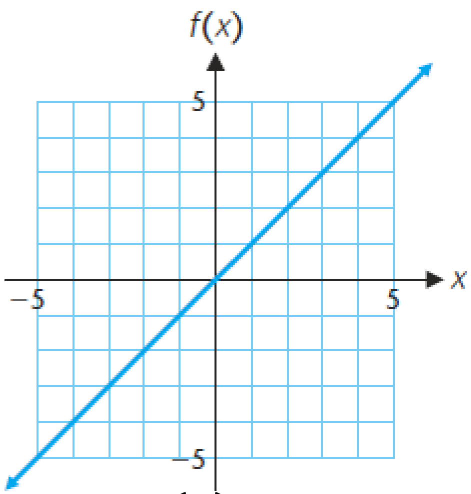
Graficando funciones

- Usando Graficadores
  - [Graph](#) (Windows & Mac)
  - [Desmos](#) (Web)
- Educosoft



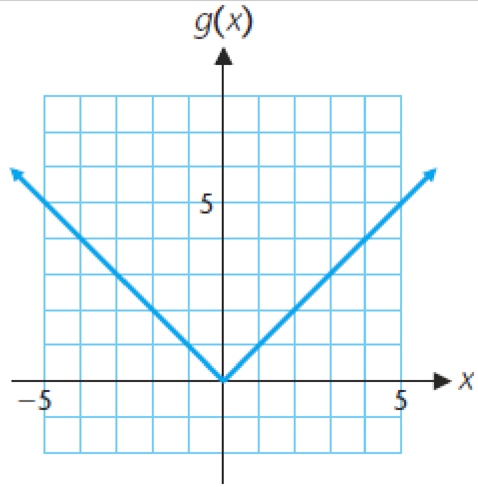
Ver Ejemplo 1 y 2 de la sección 2.4.4 Interpreting Graph

Funciones básicas



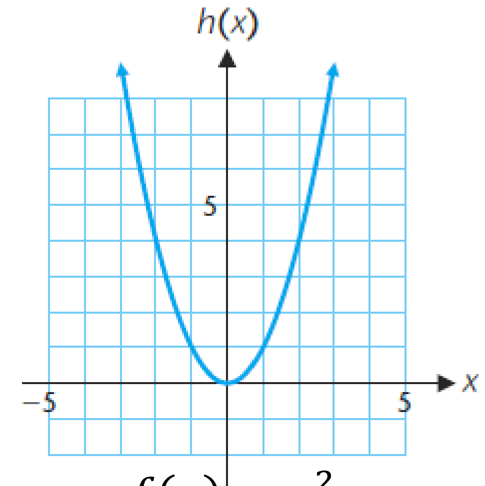
$f(x) = x$

Función identidad



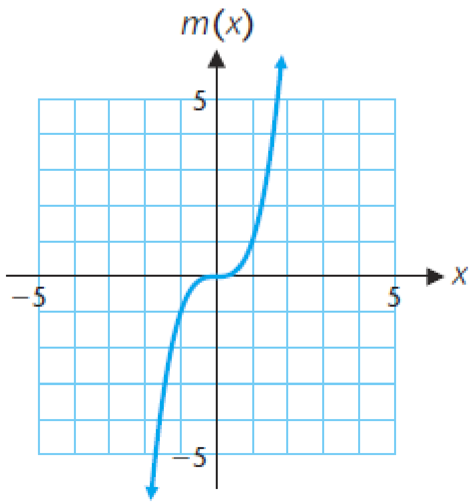
$f(x) = |x|$

Función Valor Absoluto



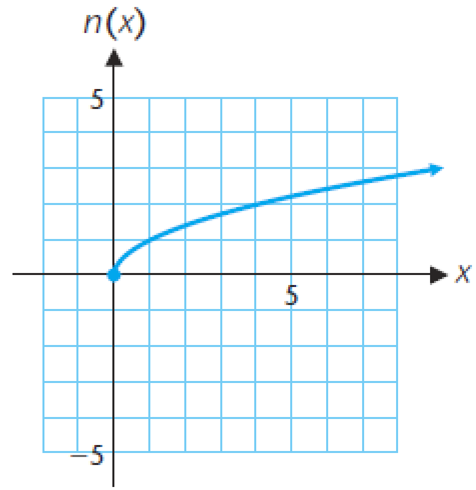
$f(x) = x^2$

Función Cuadrado



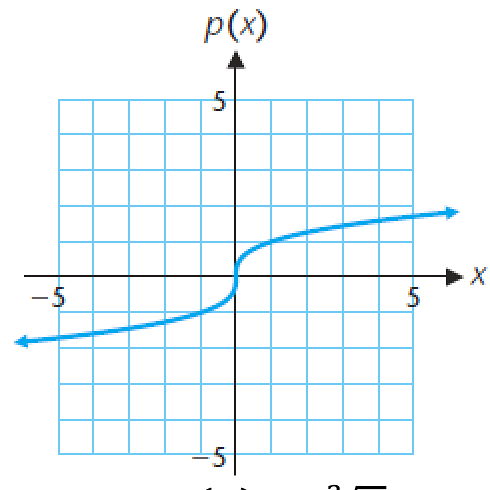
$f(x) = x^3$

Función Cúbica



$f(x) = \sqrt{x}|$

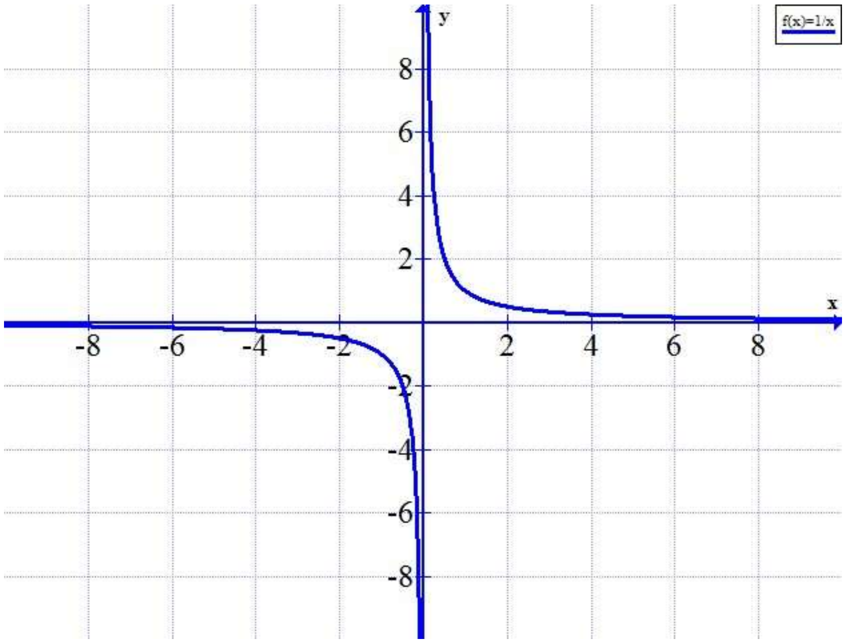
Función Raíz Cuadrada



$f(x) = \sqrt[3]{x}|$

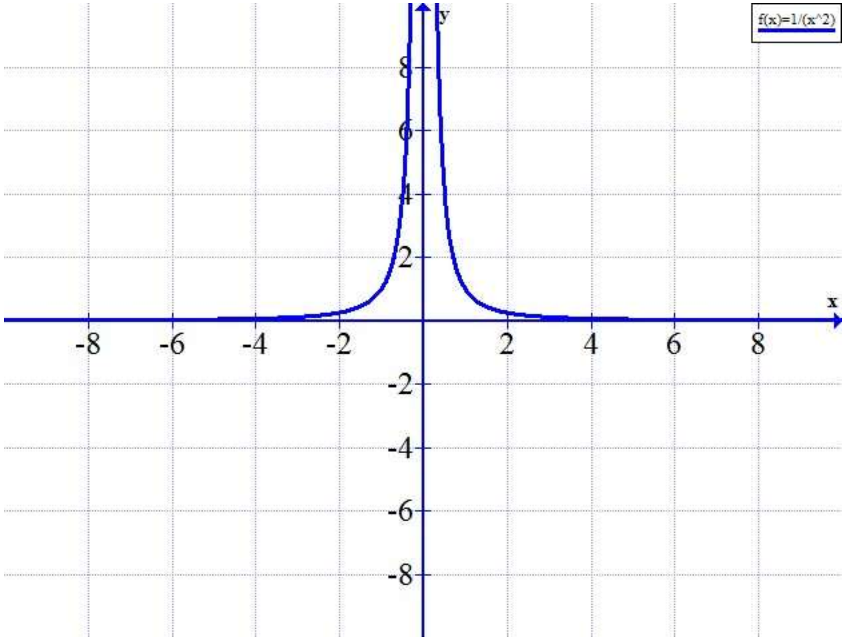
Función Raíz Cúbica

Funciones Básicas …



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Función Recíproca



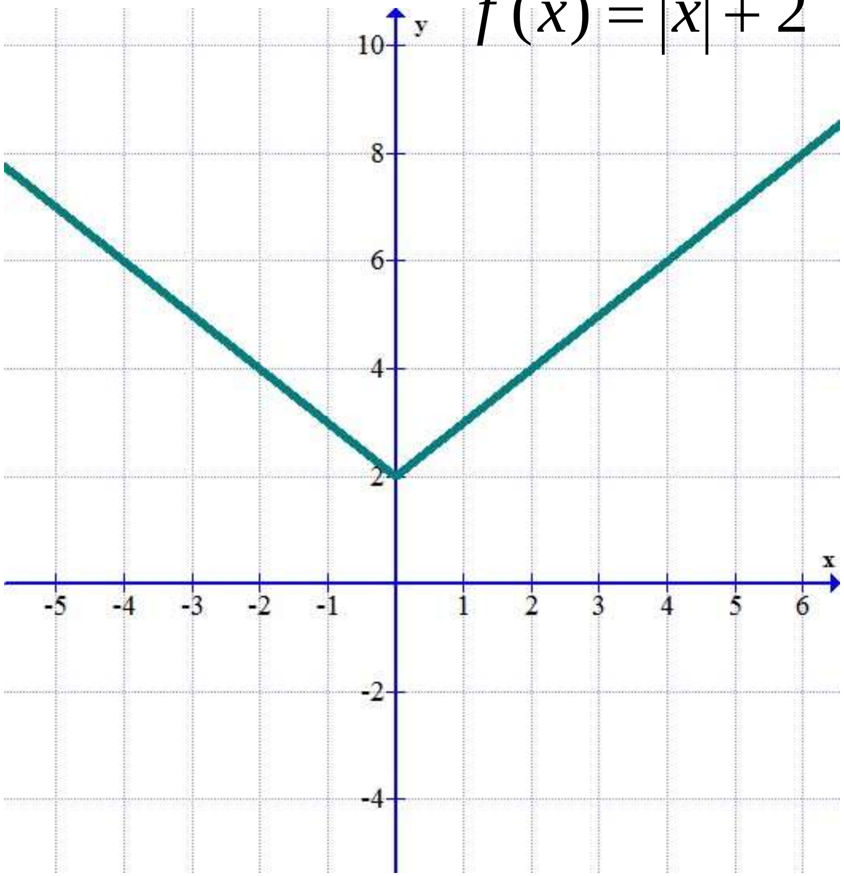
$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

Función Recíproca Cuadrado

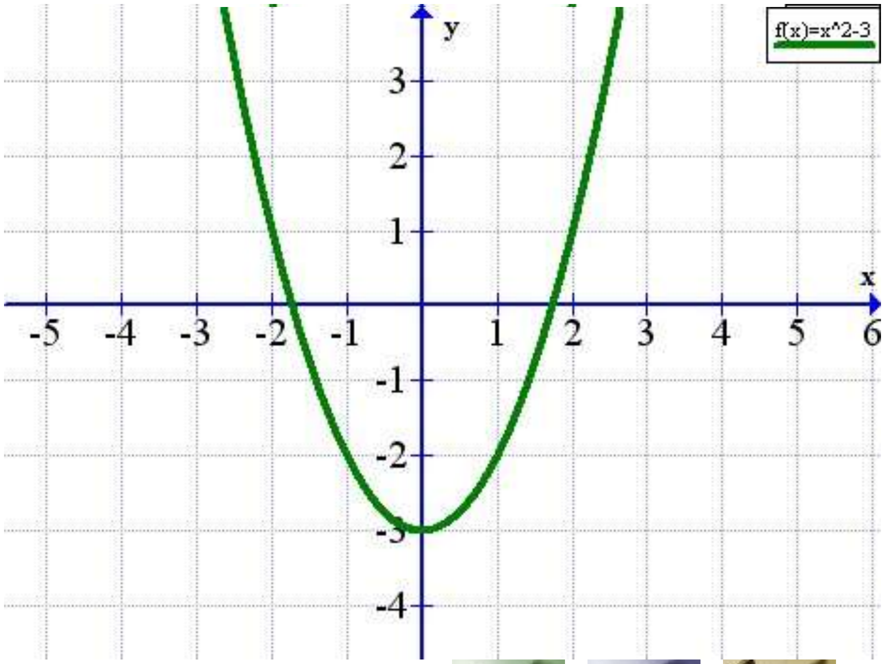
Desplazamiento vertical: $f(x) + a$

- Si a es un número reales distinto de 0, entonces, la gráfica de $f(x) + a$ es una traslación **vertical** de la gráfica de $f(x)$ por a unidades:

$$f(x) = |x| + 2$$



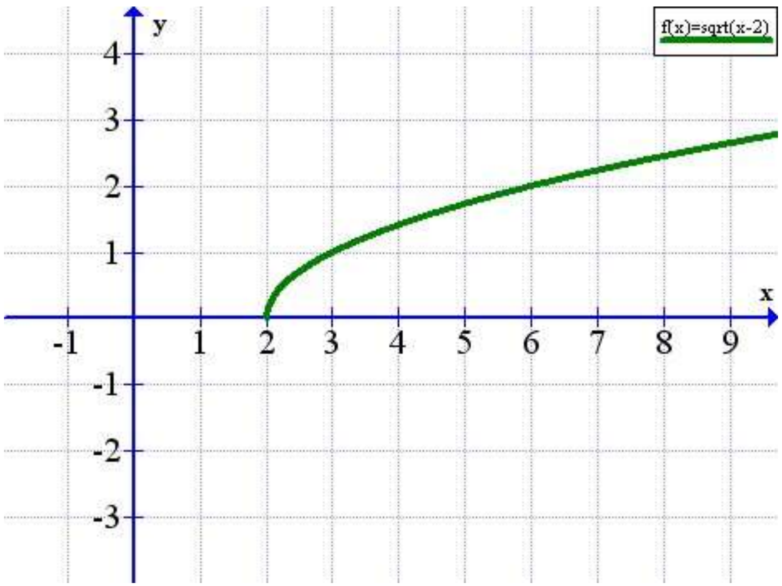
$$f(x) = x^2 - 3$$



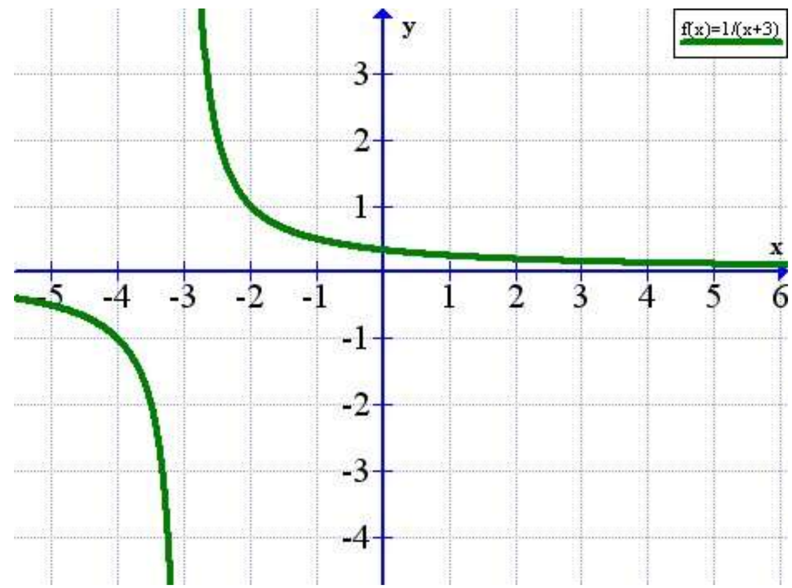
Desplazamiento horizontal: $f(x+a)$

Si $\boldsymbol{a}$ es un número reales distinto de 0, entonces la gráfica de $f(x+a)$ será una traslación **horizontal** de la gráfica de $f(x)$ por $\boldsymbol{a}$ unidades.

$$f(x)=\sqrt{x-2}$$



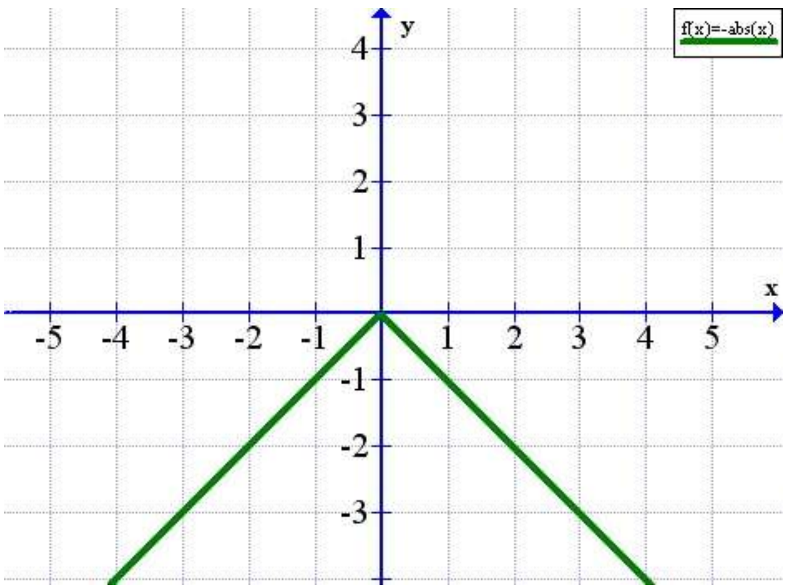
$$f(x)=\frac{1}{x+3}$$



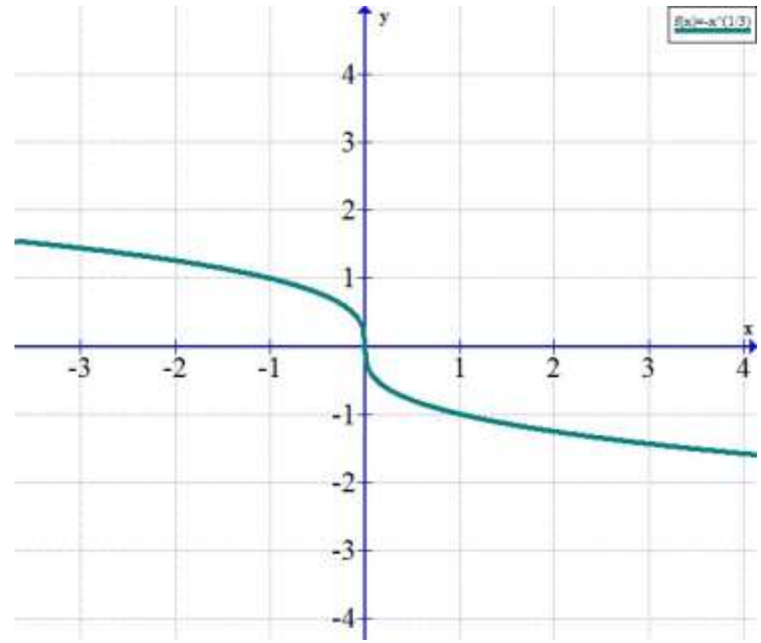
Reflexión horizontal: $-f(x)$

- La gráfica de - f(x) es una reflexión simétrica de f(x) con respecto al eje de x.

$$f(x) = -|x|$$



$$f(x) = -\sqrt[3]{x}$$

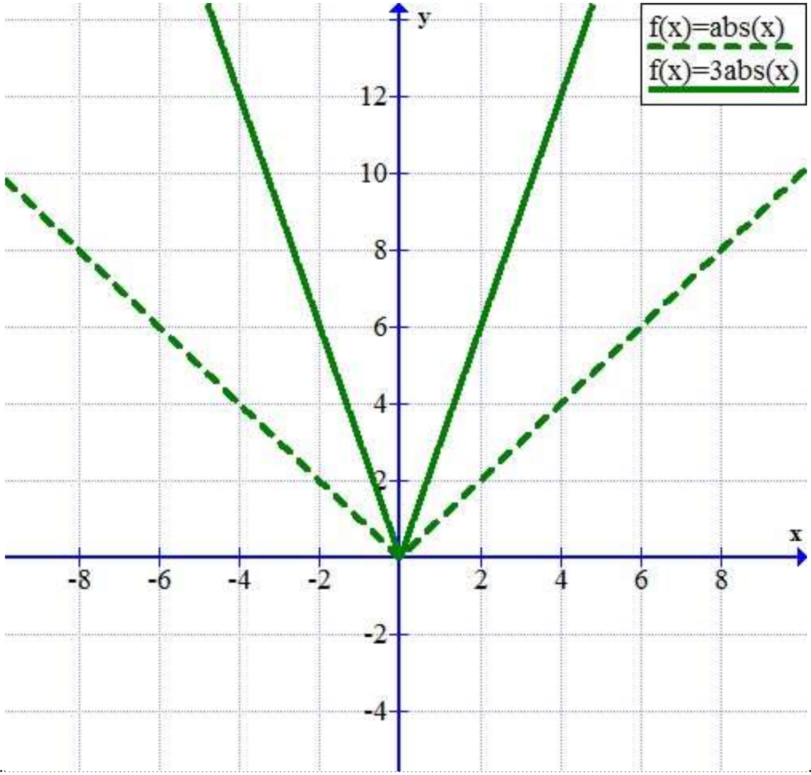


Estiramiento y compresión vertical: $af(x)$

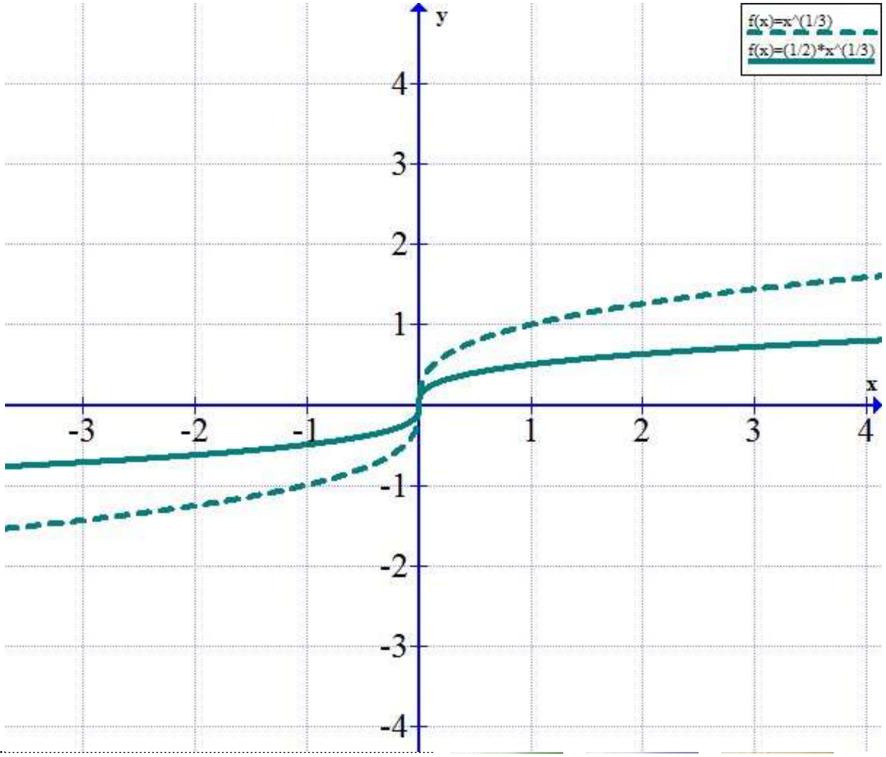
Sea a es un número real distinto de 0, entonces la gráfica de $af(x)$

- cuando $\boldsymbol{a} > \mathbf{1}$, será un estiramiento vertical de $f(x)$
- cuando $\mathbf{0} < \boldsymbol{a} < \mathbf{1}$, será una compresión vertical de $f(x)$

$$f(x) = 3|x|$$



$$f(x) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x}$$



Ejemplo 1

- Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

$$= 1 + \frac{3}{x-1}$$

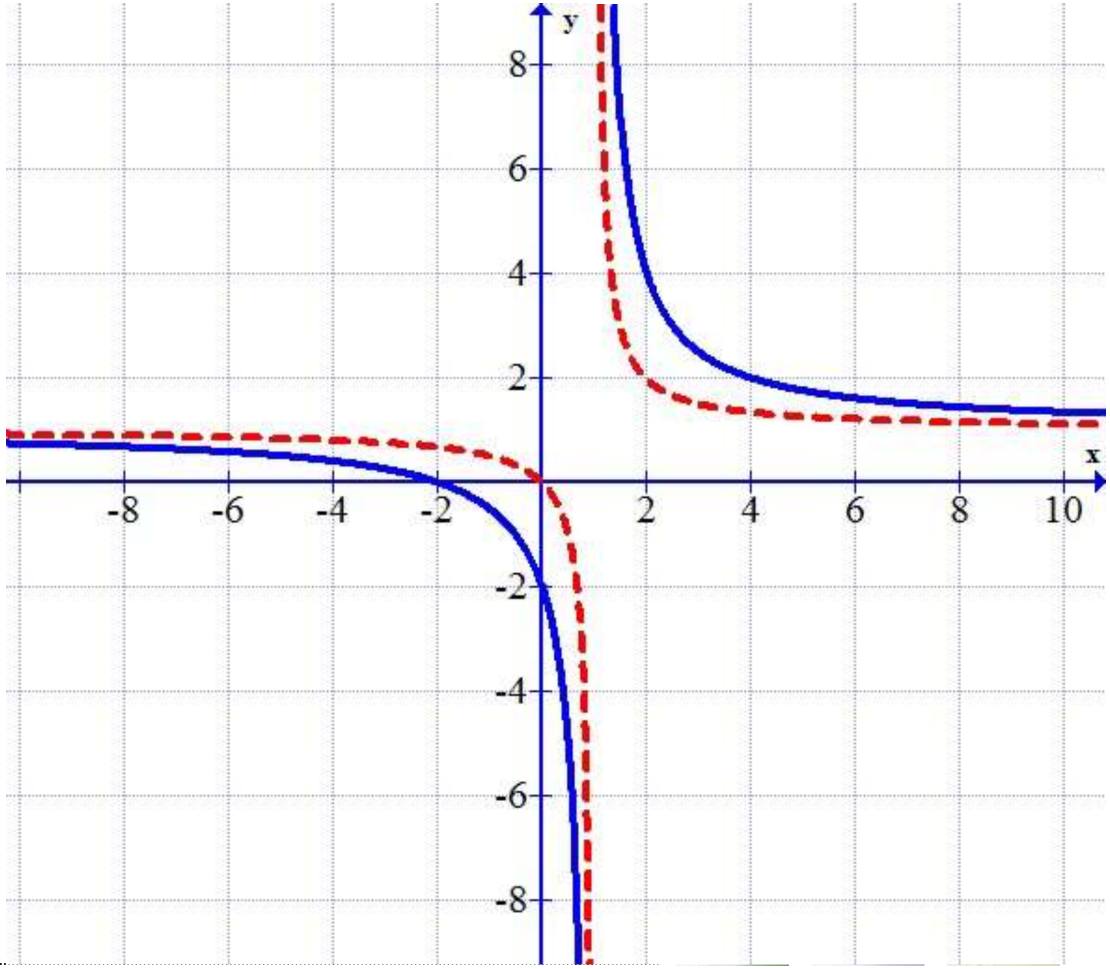
$$= \frac{3}{x-1} + 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x-1} + 1$$

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{3}{x-1} + 1}$$



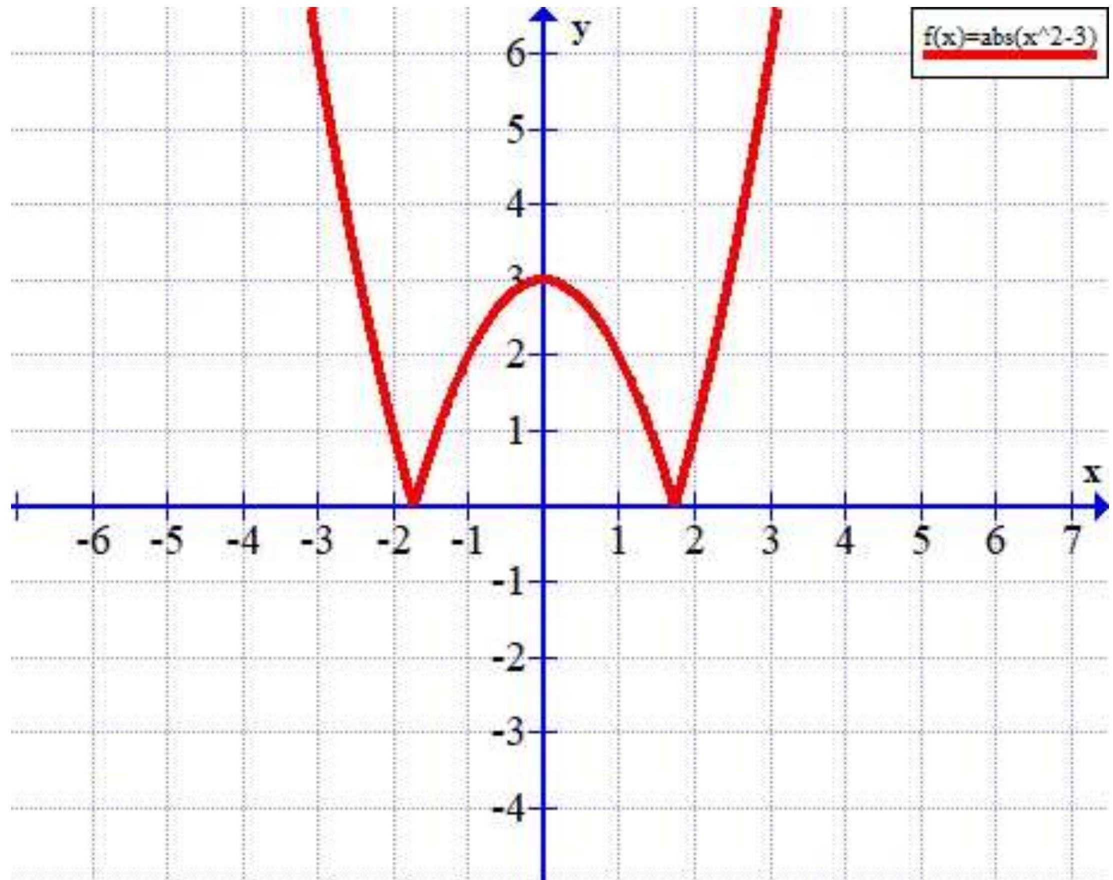
Ejemplo 2

- Bosqueje la gráfica de la función $f(x) = |x^2 - 3|$

$f(x) = x^2$

$f(x) = x^2 - 3$

$f(x) = |x^2 - 3|$



Funciones pares e impares

Sea f una función. Entonces,

- f es **par**, si para todo valor x

$$f(-x) = f(x)$$

  - Su gráfica es simétrica con respecto al eje de y

- f es **impar**, si si para todo valor x

$$f(-x) = -f(x)$$

  - Su gráfica es simétrica con respecto al punto origen

Ejemplo 3

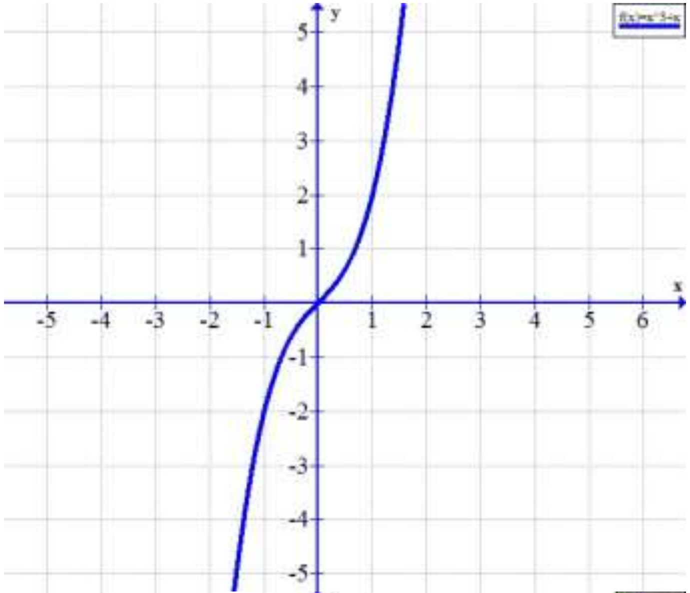
- Determine si la función es par, impar o ninguna de las dos.

a)

$$f(x) = x^3 + x$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 + (-x) \\ &= -x^3 - x \\ &= -(x^3 + x) = -f(x) \end{aligned}$$

Función es impar

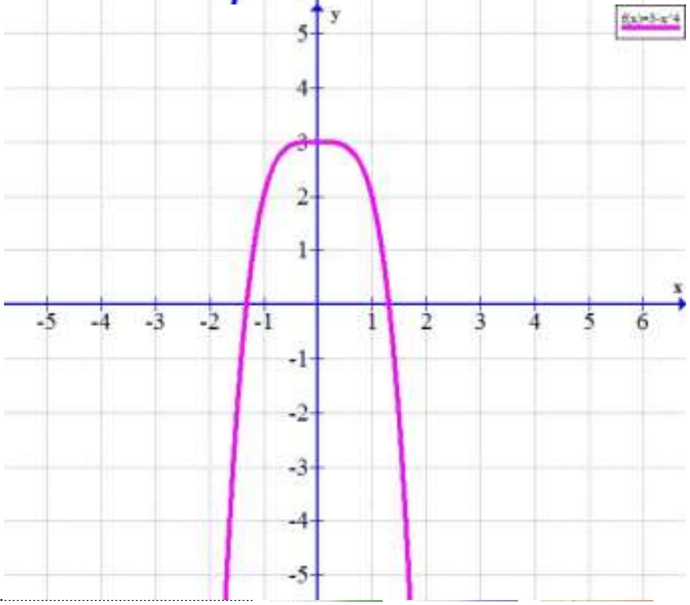


b)

$$f(x) = 3 - x^4$$

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3 - (-x)^4 \\ &= 3 - x^4 \\ &= f(x) \end{aligned}$$

Función es par

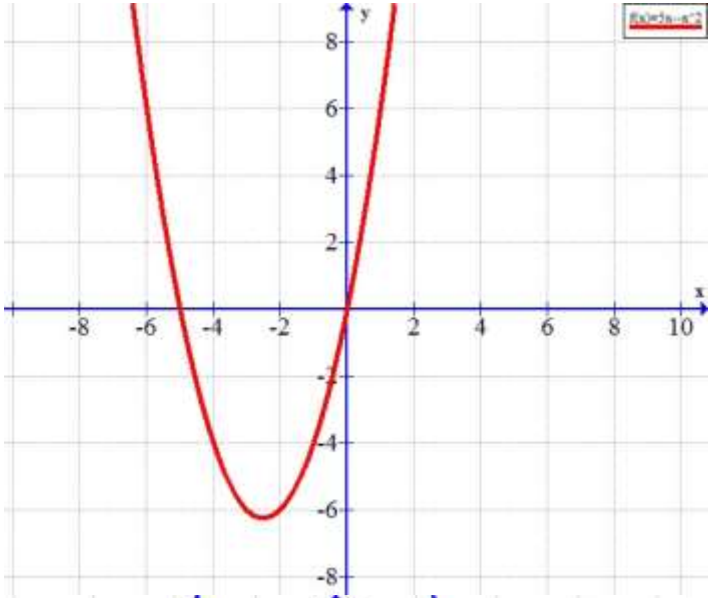


Ejemplo 3 …

c) $f(x) = 5x - x^2$

$$f(-x) = 5(-x) - (-x)^2$$
$$= -5x - x^2$$

Función no es ni par o impar

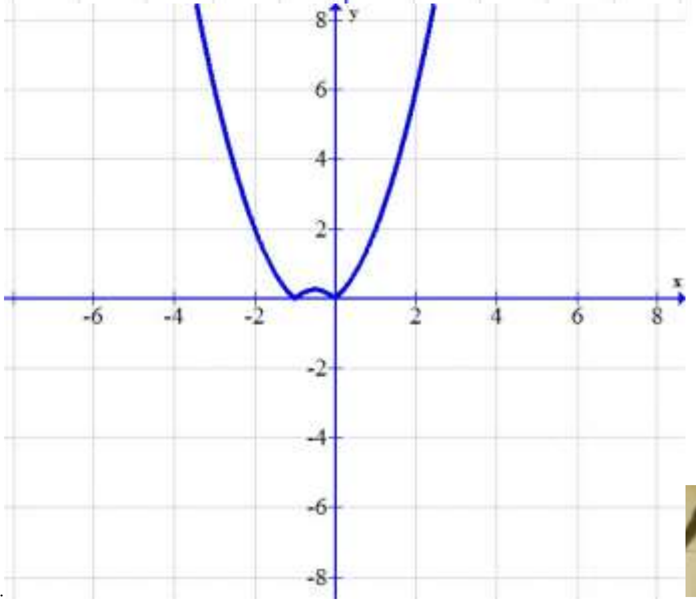


d) $f(x) = \left| x^2 + x \right|$

$$f(-x) = \left| (-x)^2 + (-x) \right|$$

$$= \left| x^2 - x \right|$$

Función no es ni par o impar



Ejercicio del Texto 3.5

Ejer. 1–2: Suponga que *f* es una función par y *g* es una función impar. Complete la tabla, si es posible.

1

x	-2	2
$f(x)$		7
$g(x)$		-6

2

x	-3	3
$f(x)$		-5
$g(x)$		6

Ejer. 3–12: Determine si *f* es par, impar o ninguna de éstas.

3 $f(x) = 5x^3 + 2x$

4 $f(x) = |x| - 3$

5 $f(x) = 3x^4 - 6x^2 - 5$

6 $f(x) = 7x^5 + 2x^3$

7 $f(x) = 8x^3 - 3x^2$

8 $f(x) = \sqrt[3]{5}$

9 $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$

10 $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$

11 $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$

12 $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x}$

Ejercicio del Texto 3.5

Ejer. 13–26: Trace, en el mismo plano de coordenadas, las gráficas de *f* para los valores dados de *c*. (Haga uso de simetría, desplazamiento, elongación, compresión o reflexión.)

13 $f(x) = |x| + c;$ $\quad c = -3, 1, 3$

14 $f(x) = |x - c|;$ $\quad c = -3, 1, 3$

15 $f(x) = -x^2 + c;$ $\quad c = -4, 2, 4$

16 $f(x) = 2x^2 - c;$ $\quad c = -4, 2, 4$

17 $f(x) = 2\sqrt{x} + c;$ $\quad c = -3, 0, 2$

18 $f(x) = \sqrt{9 - x^2} + c;$ $\quad c = -3, 0, 2$

19 $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x - c};$ $\quad c = -3, 0, 4$

20 $f(x) = -\frac{1}{2}(x - c)^2;$ $\quad c = -3, 0, 4$

21 $f(x) = c\sqrt{4 - x^2};$ $\quad c = -2, 1, 3$

22 $f(x) = (x + c)^3;$ $\quad c = -2, 1, 2$

23 $f(x) = cx^3;$ $\quad c = -\frac{1}{3}, 1, 2$

24 $f(x) = (cx)^3 + 1;$ $\quad c = -1, 1, 4$

25 $f(x) = \sqrt{cx} - 1;$ $\quad c = -1, \frac{1}{9}, 4$

26 $f(x) = -\sqrt{16 - (cx)^2};$ $\quad c = 1, \frac{1}{2}, 4$