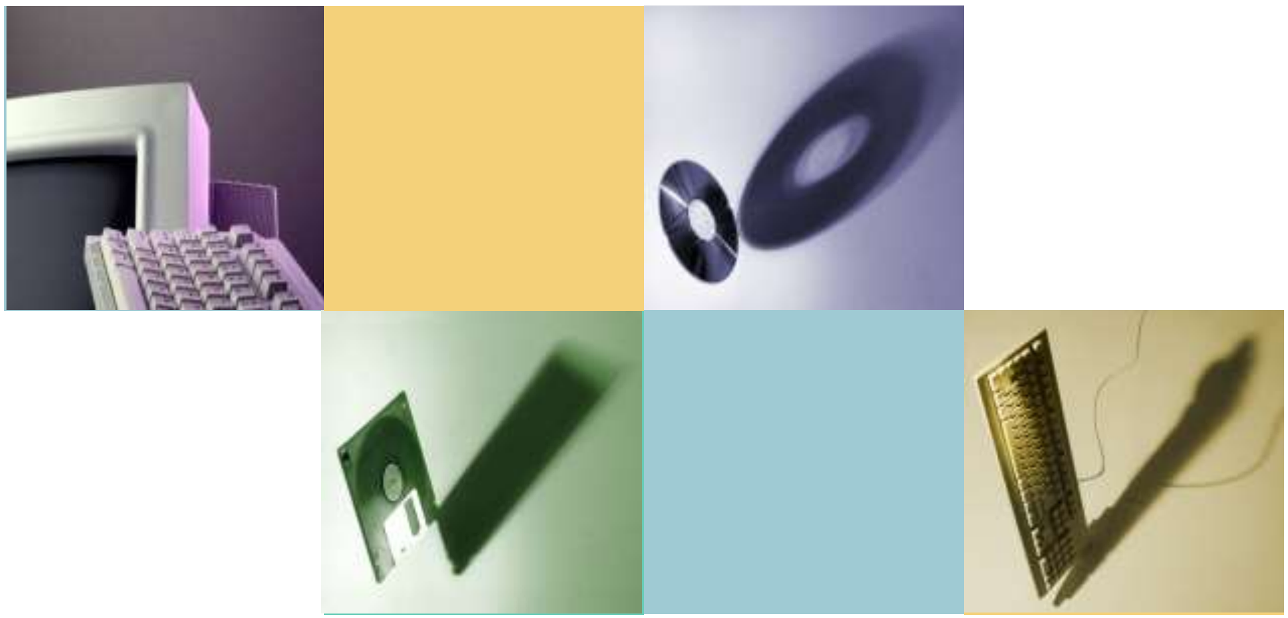
Lección 4.2



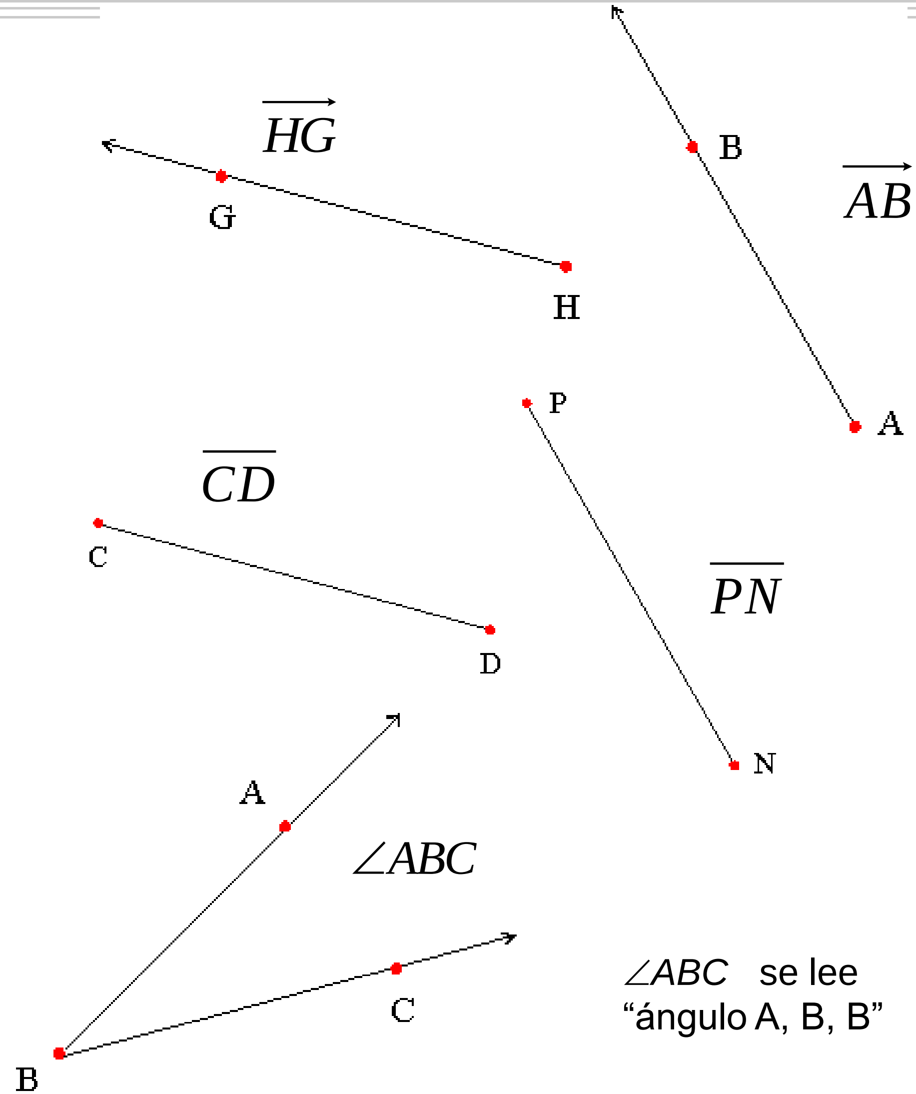
Ángulos y Funciones Trigonométricas de Ángulos

Actividades

- **Referencia Texto**: Seccíón 6.1 – Ángulos; 1-16; Sección 6.2 3-16, 23, 24; 29-36; 83-84.
- **Referencias del Web**:
  - Math2me:
  - Conceptos Básicos
  - Razones Trigonométricas
  - Razones Trigonométricas en la calculadora
  - Ángulos de elevación y depresión
  - Ángulos de elevación y depresión Problema 1
  - Ángulos de elevación y depresión Problema 2
  - Resolución de problemas prácticos (ángulos de elevación y depresión)

Conceptos básicos de Geometría

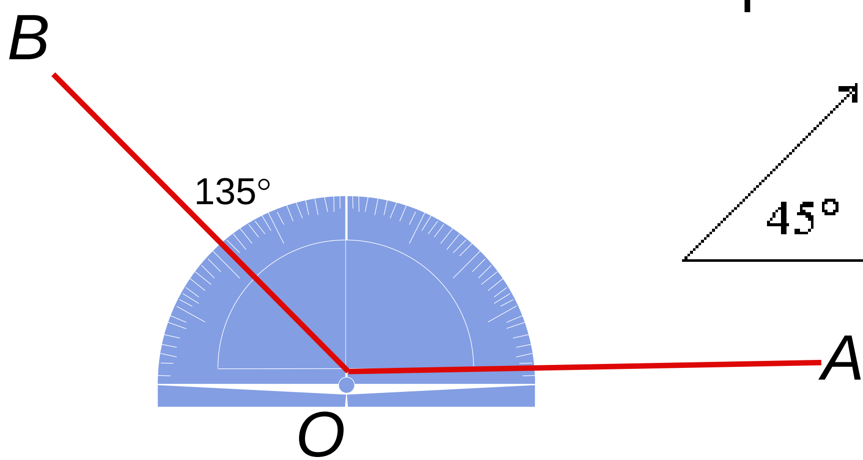
- Un **rayo** es una línea que tiene sólo tiene un punto de inicio.
- Un **segmento** es un conjunto infinito de puntos que se extienden entre dos puntos.
- Un **ángulo** es la intersección de dos rayos



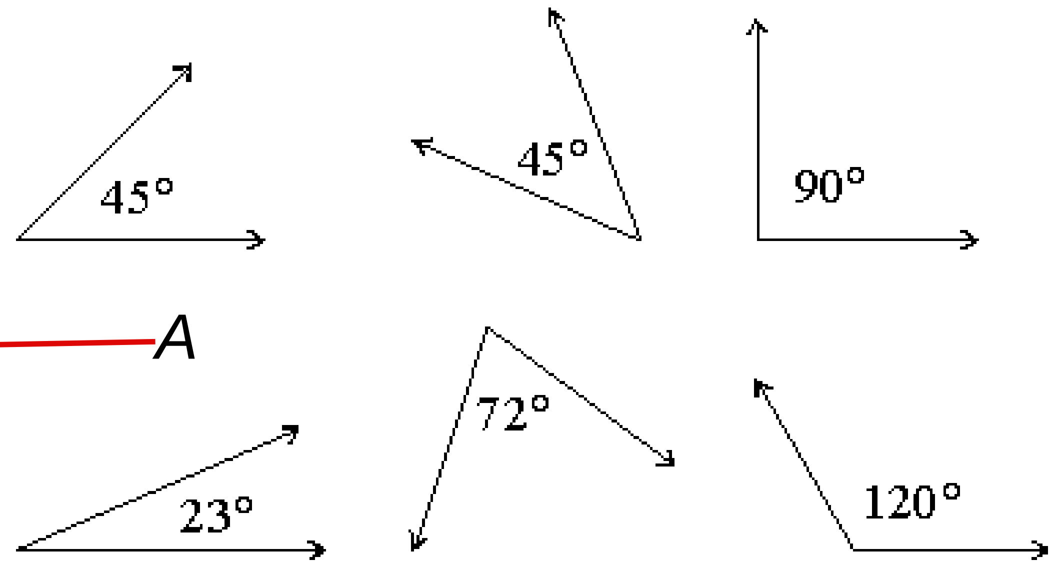
$\angle ABC$ se lee "ángulo A, B, B"

Medidas de Ángulos

- **Grados (degrees)**. 1 grado es equivalente a 1/360 de una revolución completa.

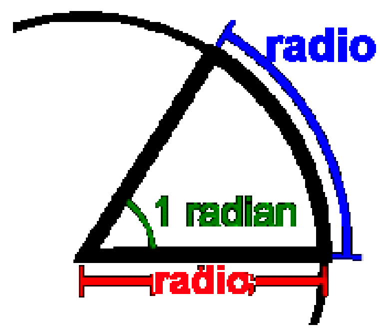


El **transportador** (***proctractor***) es un instrumento para medir ángulos.



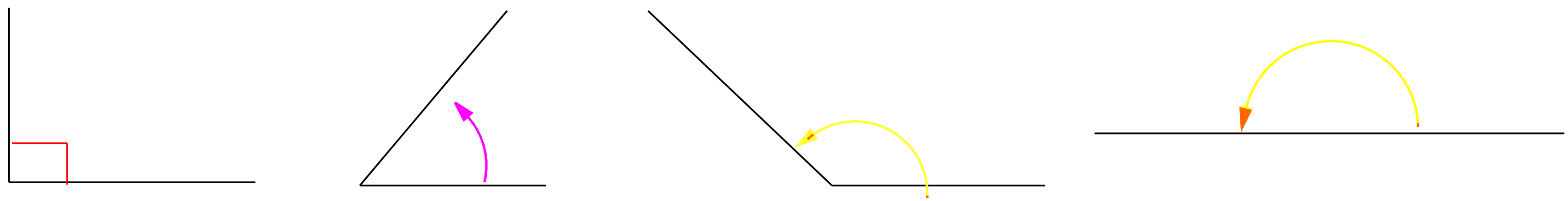
- **Radianes**:

1 radian es equivalente al ángulo que se forma por un sector cuyo largo (arc length) mide igual que el radio en donde se forma.



Clasificación de ángulos

- Medida:



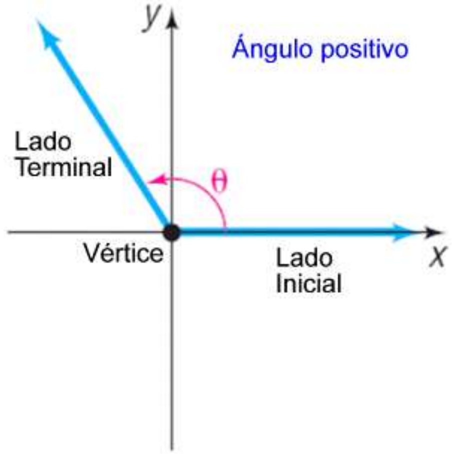
Un ángulo recto mide 90º

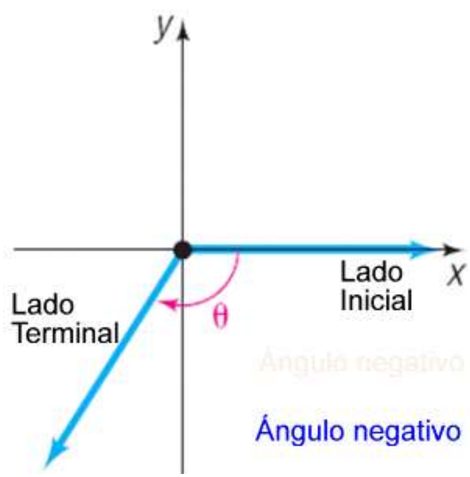
Un ángulo ***agudo*** mide menos de 90º

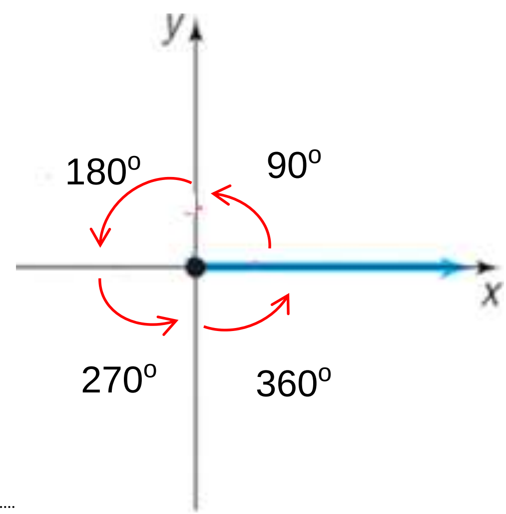
Un ángulo obtuso mide más de 90º

Un ángulo ***llano*** mide 180º

- Signo







Conversión entre grados y radianes

- Exprese en radianes.

$$60^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{3} \text{ radianes}$$

$$20^\circ \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{\pi}{9} \text{ radianes}$$

- Exprese en grados.

$$\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180}{\pi} = 30^\circ$$

$$\frac{5\pi}{2} \cdot \frac{180}{\pi} = 450^\circ$$

$$1\,rad \approx 57.296^\circ$$

Equivalencias especiales

(¡Recordar!)

θ (Radians)	θ (Degrees)
$\frac{\pi}{6}$	30°
$\frac{\pi}{4}$	45°
$\frac{\pi}{3}$	60°

Grados Minutos Segundos DMS

1 grado (1^o) = 60 minutos (60’)

1 minuto (1’) = 60 segundos (60”)

- Ejemplo: Convierta **48º20’15”** a grados decimales.

$$48° \; 20' \; 15'' = 48 + \frac{20}{60} + \frac{15}{3600} \approx 48.3375°$$

$$25° \; 32' \; 6'' = 25 + \frac{32}{60} + \frac{6}{3600} \approx 25.535°$$

- Convierta a DMS

$$\begin{aligned} 34.54° &= 34° + (0.54 \times 60)' \\ &= 34° + 32.4' \\ &= 34° + 32' + (0.4 \times 60)'' \\ &= 34° + 32' + 24'' \\ &= 34° \; 32' \; 24'' \end{aligned}$$

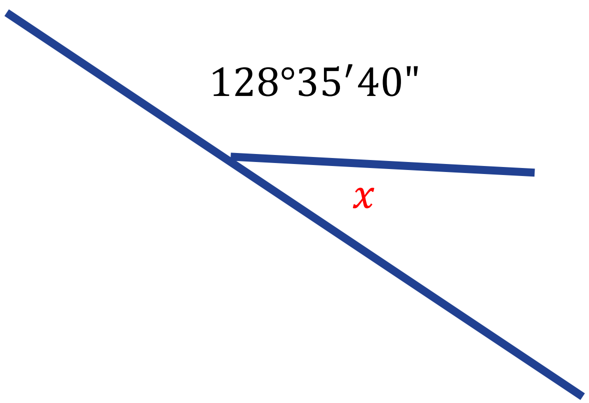
$$\begin{aligned} 58.18° &= 58° + (0.18 \times 60)' \\ &= 58° + 10.8' \\ &= 58° + 10' + (0.8 \times 60)'' \\ &= 58° + 10' + 48'' \\ &= 58° \; 10' \; 48'' \end{aligned}$$

Relaciones entre Ángulos

- Ángulos ***congruentes*** – Aquellos que tienen la misma medida
- Ángulos ***complementarios*** – Ángulos cuyas medidas suman a $90°$.
- Ángulos ***suplementarios*** – Aquellos cuyas medidas suman a $180°$.
- Ángulos ***coterminales*** – Aquellos que comparten el mismo lado terminal
- Ejemplos:
- 1 - Determine un ángulo complementario a $78°12'$
- Solución

$$90° - 78°12' = 89°\,60' - 78°12' = 11°\,48'$$

- 2 - Determine la medida del ángulo desconocido:



$$x = 180° - 128°35'40''$$

$$= 179°\,60' - 128°35'40''$$

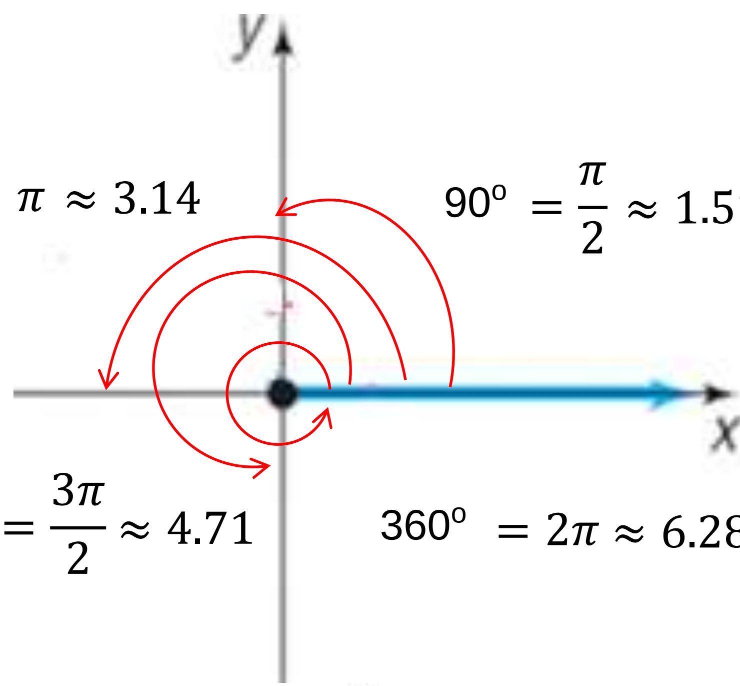
$$= 179°\,59'60'' - 128°35'40''$$

$$= 51°24'20''$$

Determinando el cuadrante del lado terminal de un ángulo

$180^{o} = \pi \approx 3.14$

$90^{o} = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$

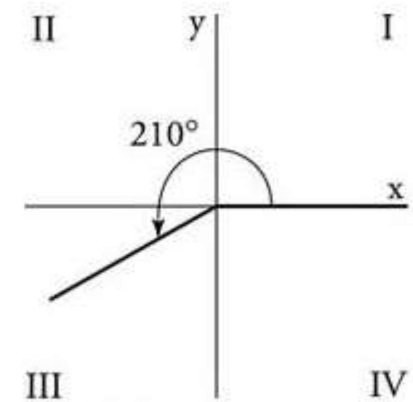


$270^{o} = \frac{3\pi}{2} \approx 4.71$

$360^{o} = 2\pi \approx 6.28$

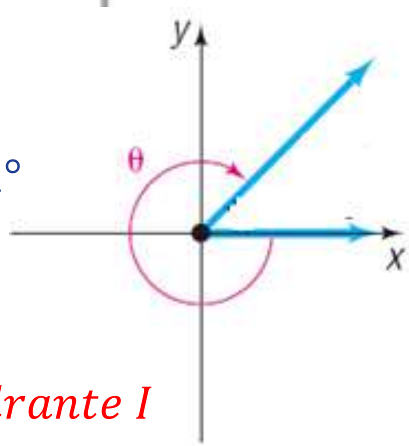
Ejemplo: Identifique el cuadrante en donde se encuentra el lado terminal del ángulo

$\mathbf{210°}$



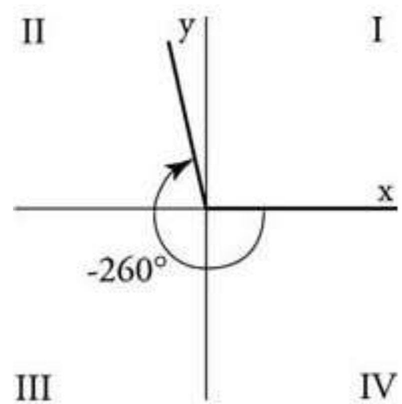
cuadrante III

$\mathbf{-281°}$



cuadrante I

$\mathbf{-260°}$



cuadrante II

Más ejemplos …

1. ¿En cuál cuadrante se encuentra el ángulo $950°$?

   Paso 1: Determine aproximadamente cuántas revoluciones hay en el ángulo $950° \div 360° \approx 2\, revoluciones$

   Paso 2: Determine el ángulo residual

   $$950° - 2(360°) = 950° - 720° = 230°$$

   Paso 3: Determine el cuadrante del ángulo residual $cuadrantre\ III$

2. ¿En cuál cuadrante se encuentra el ángulo $-22{,}4$?

   Paso 1: Determine aproximadamente cuántas revoluciones hay en el ángulo (ignore signo) $22.4 \div 6.28 \approx 3\, revoluciones$

   Paso 2: Determine el ángulo residual

   $$22.4 - 3(6.28) = 22.4 - 18.84 = 3.56$$

   Paso 3: Determine el cuadrante del negativo del ángulo residual $-\ 3.56$

   $$cuadrantre\ I$$

Más ejemplos …

3. ¿Cuál par de ángulos, uno positivo y otro negativo son coterminales al ángulo de $117°$?

$$117° + 360° = 477°$$

$$117° - 360° = -243°$$

Ejercicios del Texto 6.1 - Ángulos

Ejer. 1–4: Si el ángulo dado está en posición estándar, encuentre dos ángulos coterminales y dos ángulos coterminales negativos.

1 (a) $120°$ (b) $135°$ (c) $-30°$

2 (a) $240°$ (b) $315°$ (c) $-150°$

3 (a) $620°$ (b) $\frac{5\pi}{6}$ (c) $-\frac{\pi}{4}$

4 (a) $570°$ (b) $\frac{2\pi}{3}$ (c) $-\frac{5\pi}{4}$

Ejer. 5–6: Encuentre el ángulo complementario de θ.

5 (a) $\theta = 12°37'24''$ (b) $\theta = 43.87°$

6 (a) $\theta = 76°4'53''$ (b) $\theta = 5.08°$

Ejer. 7–8: Encuentre el ángulo suplementario de θ.

7 (a) $\theta = 125°16'27''$ (b) $\theta = 58.07°$

8 (a) $\theta = 87°13'52''$ (b) $\theta = 97.9°$

Ejercicios del Texto 6.1 - Ángulos

Ejer. 9–12: Encuentre la medida exacta del ángulo en radianes.

9 (a) $150°$ (b) $-60°$ (c) $225°$

10 (a) $120°$ (b) $-135°$ (c) $210°$

11 (a) $450°$ (b) $72°$ (c) $100°$

12 (a) $630°$ (b) $54°$ (c) $95°$

Ejer. 13–16: Encuentre la medida exacta del ángulo en grados.

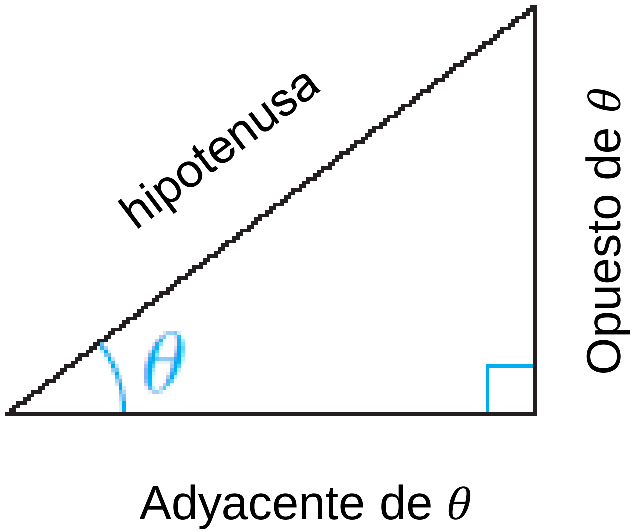
13 (a) $\dfrac{2\pi}{3}$ (b) $\dfrac{11\pi}{6}$ (c) $\dfrac{3\pi}{4}$

14 (a) $\dfrac{5\pi}{6}$ (b) $\dfrac{4\pi}{3}$ (c) $\dfrac{11\pi}{4}$

15 (a) $-\dfrac{7\pi}{2}$ (b) 7π (c) $\dfrac{\pi}{9}$

16 (a) $-\dfrac{5\pi}{2}$ (b) 9π (c) $\dfrac{\pi}{16}$

Propiedades de Triángulos Rectos



(2) Teorema de Pitágoras

El cuadrado de la hipotenusa de todo triángulo recto es igual a la suma de los cuadrados de sus catetos.

$$hipotenusa^2 = cateto\ 1^2 + cateto\ 2^2$$

(3) Los ángulos no rectos de un triángulo recto son complementarios

(1) Razones trigonométricas

$$\cos\theta = \frac{Adyacente\ de\ \theta}{Hipotenusa} \qquad \sin\theta = \frac{Opuesto\ de\ \theta}{Hipotenusa} \qquad \tan\theta = \frac{Opuesto\ de\ \theta}{Adyacente\ de\ \theta}$$

$$\sec\theta = \frac{Hipotenusa}{Adyacente\ de\ \theta} \qquad \csc\theta = \frac{Hipotenusa}{Opuesto\ de\ \theta} \qquad \cot\theta = \frac{Adyacente\ de\ \theta}{\mathrm{Opuesto}\ de\ \theta}$$

Ejemplo 1

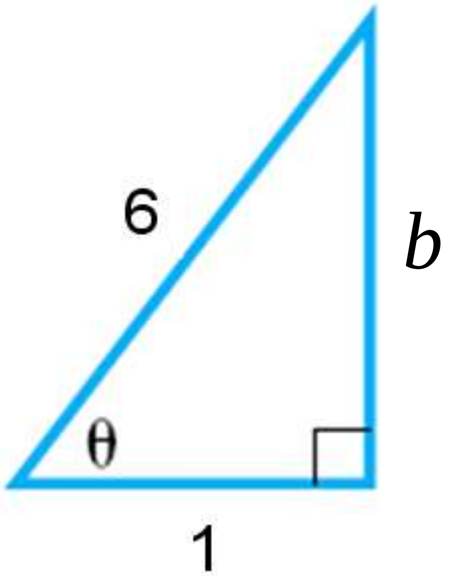
- Encuentre los valores trigonométricos del ángulo *θ*.

Teorema de Pitágoras

$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$6^2 = 1^2 + b^2$$

$$b = \sqrt{35}$$



$$\cos\theta = \frac{Adyacente\ de\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{1}{6} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = 6$$

$$\sin\theta = \frac{Opuesto\ de\ \theta}{Hipotenusa} = \frac{\sqrt{35}}{6} \qquad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{6}{\sqrt{35}}$$

$$\tan\theta = \frac{Opuesto\ de\ \theta}{Adyacente\ de\ \theta} = \frac{\sqrt{35}}{1} = \sqrt{35} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sqrt{35}}$$

Para recordar ….

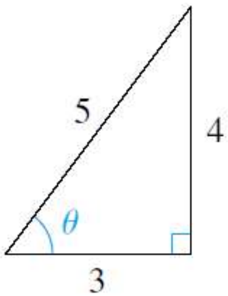
Valores especiales de las funciones trigonométricas

θ (radianes)	θ (grados)	$\cos\theta$	$\operatorname{sen}\theta$	$\tan\theta$
$\frac{\pi}{6}$	$30°$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$45°$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$60°$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$

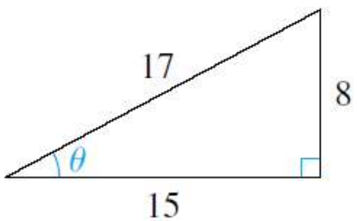
Ejercicios del Texto 6.2

Ejer. 3–10: Encuentre los valores de las seis funciones trigonométricas para el ángulo θ.

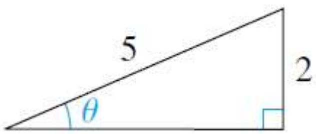
3



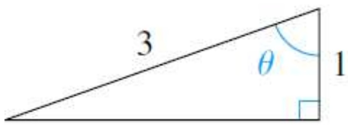
4



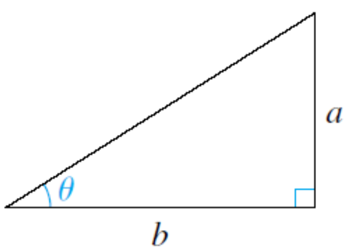
5



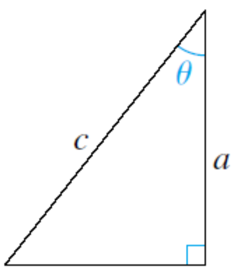
6



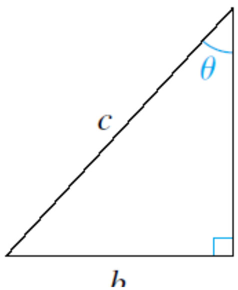
7



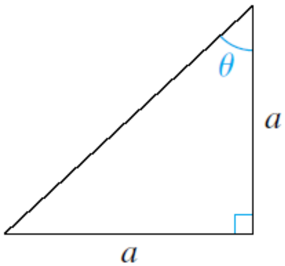
8



9

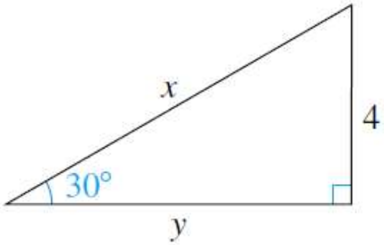


10

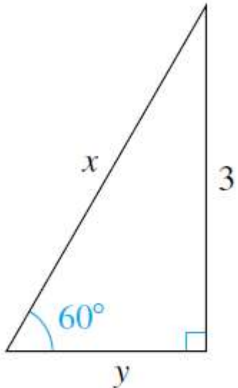


Ejer. 11–16: Encuentre los valores exactos de x y y.

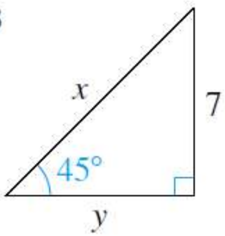
11



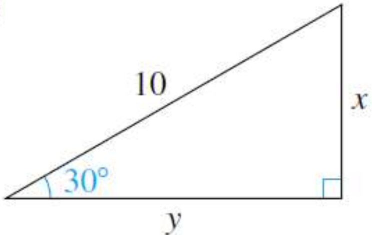
12



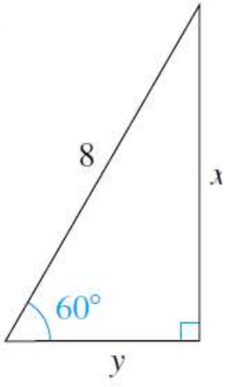
13



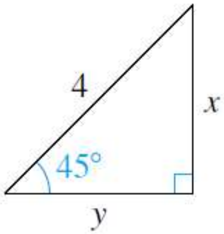
14



15



16



Uso de la Calculadora

- Use su calculadora para aproximar los siguientes valores trigonométricos a cinco lugares decimales (*Nota: – Asegúrese que su calculadora está en modalidad de radianes o grados según aplique).*

1) $\sin 5.3 \approx -0.83227$

2) $\cos 15°36'15'' \approx 0.96314$

3) $\tan \frac{\pi}{5} \approx 0.72654$

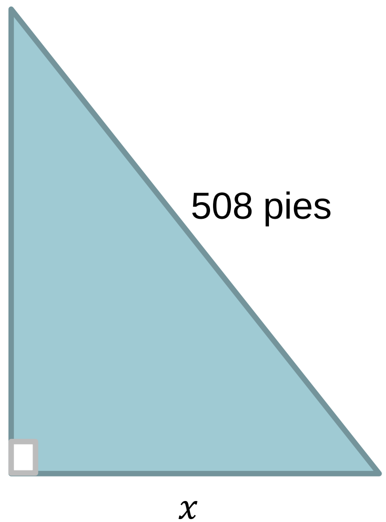
4) $\sec \frac{\pi}{5} = \frac{1}{cos\frac{\pi}{5}} \approx 1.23607$

5) $\cot 85° = \frac{1}{\tan 85°} \approx 0.08749$

6) $sin^2\, 38° = (\sin 38°)^2 \approx 0.37904$

Ejemplo 2

- Encuentre el valor desconocido en el siguiente triángulo recto. Redondée a la centésima más cercana.

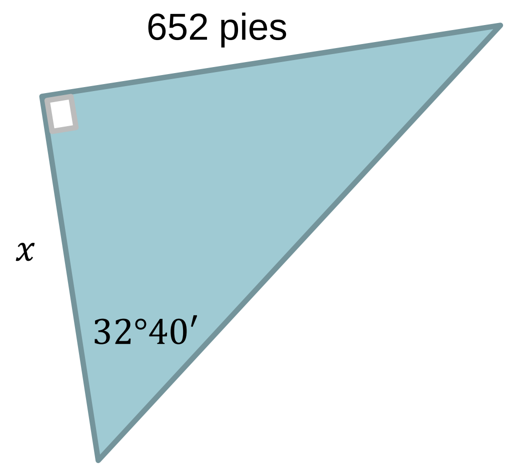


$$\cos 35°24' = \frac{x}{508}$$

$$508 \cos 35°24' = x$$

$$x \approx 414.0849202$$

$$x \approx 414.08 \ pies$$



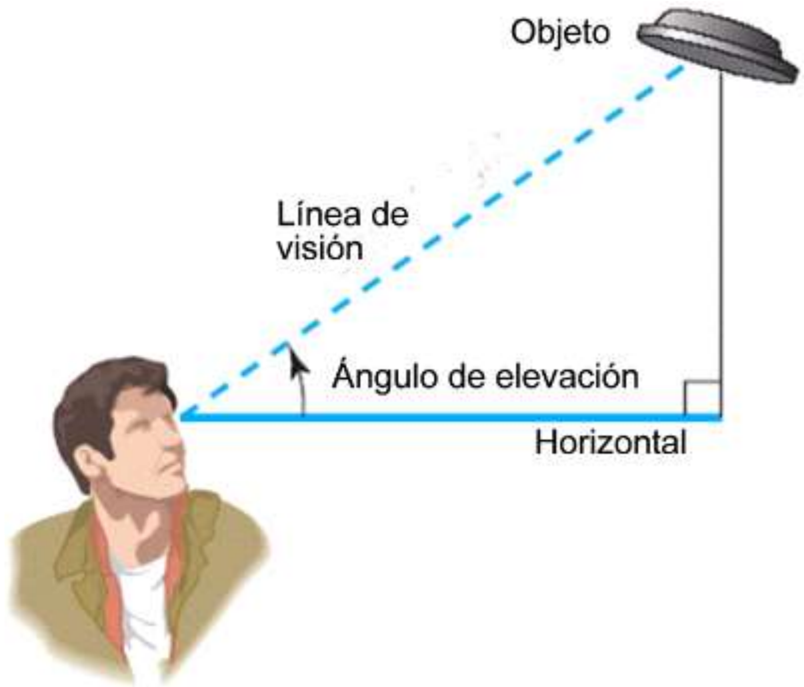
$$\tan 32°40' = \frac{652}{x}$$

$$x = \frac{652}{\tan 32°40'}$$

$$x \approx 1016.895212$$

$$x \approx 1016.90 \ pies$$

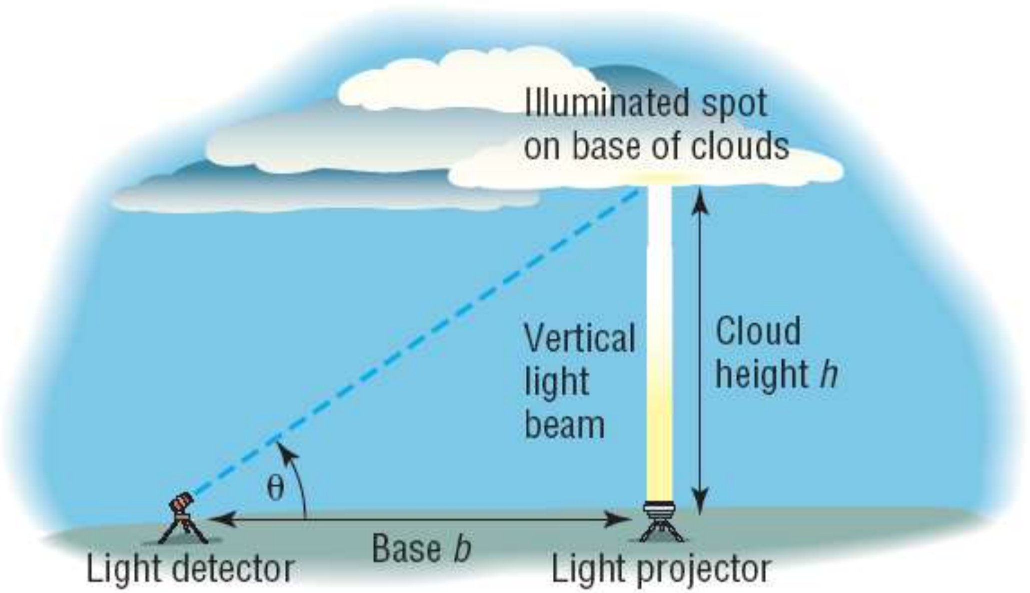
Ángulo de *elevación y depresión*



Ejemplo 3

- Un *ceilometer* (nefoaltímetro) con base de 300 pies detecta que la luz sobre la nube forma un ángulo de elevación de 75º. ¿Cuál es la altura de la nube?

$$\tan\theta = \frac{h(altura)}{b(base\ )}$$



$$\mathrm{b}\tan\theta = h$$

$$h = b\tan\theta$$

$$h = 300\tan 75°$$

$$h = 300(3.732050808) \approx 1{,}120 \text{ pies}$$

Ejemplo 4

- Un avión está volando a una altura de 35,000 pies tiene a la vista ***El Castillo San Felipe del Morro*** en San Juan, Puerto Rico. Si el piloto mide que el ángulo de depresión a un punto en la base del Morro es de 22 grados, ¿cuál es la distancia del avión al morro?

$$\sin 22° = \frac{35{,}000}{x}$$

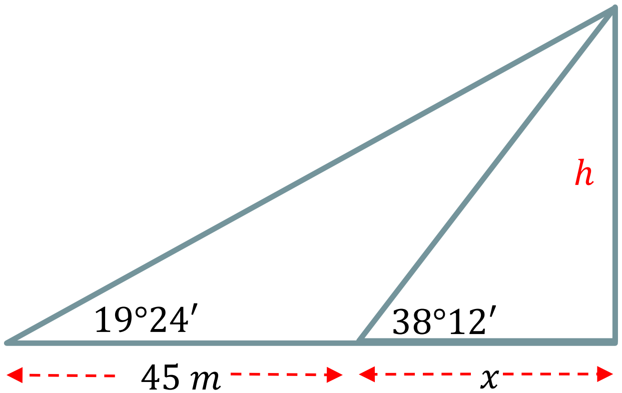
$$x = \frac{35{,}000}{\sin 22°}$$

$$x \approx 93431.35069$$

$$\boldsymbol{x \approx 93{,}431}\ \textbf{pies}$$

Ejemplo 5

- Determine el valor de h en el siguiente triángulo recto.



$$\tan 38°12' = \frac{h}{x}$$

$$x \tan 38°12' = h$$

$$\tan 19°24' = \frac{h}{45 + x}$$

$$(45 + x)\tan 19°24' = h$$

$$x \tan 38°12' = (45 + x)\tan 19°24'$$

$$x \tan 38°12' = 45\tan 19°24' + x \tan 19°24'$$

$$x \tan 38°12' - x \tan 19°24' = 45\tan 19°24'$$

$$x\,(\tan 38°12' - \tan 19°24') = 45\tan 19°24'$$

$$x = \frac{45\tan 19°24'}{(\tan 38°12' - \tan 19°24')}$$

$$x \approx 36.44942781$$

$$h = x \tan 38°12'$$

$$h = (36.44942781) \tan 38°12'$$

$$h \approx 28.68287134 \approx 29\ m$$

Ejercicios del Texto 6.2

23 **Altura de un árbol** Un guardabosque, situado a 200 pies de la base de una sequoia roja, observa que el ángulo entre el suelo y la cima del árbol es de 60°. Estime la altura del árbol.

24 **Distancia al Monte Fuji** El monte Fuji de Japón mide aproximadamente 12,400 pies de altura. Un estudiante de trigonometría, situado a varias millas del monte, observa que el ángulo entre el nivel del suelo y el piso es de 30°. Estime la distancia del estudiante al punto a nivel del suelo que está directamente abajo del pico.

25 **Bloques de Stonehenge** Stonehenge en los llanos de Salisbury, Inglaterra, fue construido usando bloques de piedra maciza de más de 99,000 libras cada uno. Levantar una sola piedra requería de 550 personas que la empujaran por una rampa inclinada a un ángulo de 9°. Calcule la distancia que una piedra era movida para levantarla a una altura de 30 pies.

26 **Altura de un anuncio espectacular** Colocado en 1990 y removido en 1997, el anuncio más alto del mundo era una gran letra I situada en lo alto del edificio de 73 pisos First Interstate World Center en Los Ángeles. A una distancia de 200 pies del punto directamente abajo del anuncio, el ángulo entre el suelo y la cima del anuncio era de 78.87°. Calcule la altura de la cima del anuncio.

Ejer. 29-34: Calcule a cuatro lugares decimales, cuando sea apropiado.

29 (a) $\operatorname{sen} 73^\circ$ (b) $\cos 61^\circ$ (c) $\csc 105^\circ$ (d) $\sec(-215^\circ)$

30 (a) $\tan 282^\circ$ (b) $\cot(-81^\circ)$ (c) $\sec 202^\circ$ (d) $\operatorname{sen} 97^\circ$

31 (a) $\cot(\pi/13)$ (b) $\csc 1.32$ (c) $\cos(-8.54)$ (d) $\tan \frac{15}{8}$

32 (a) $\operatorname{sen}(-0.11)$ (b) $\sec(2\pi/5)$ (c) $\tan\left(-\frac{3}{13}\right)$ (d) $\cos 2.4\pi$

33 (a) $\operatorname{sen} 30^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 30$ (c) $\cos \pi^\circ$ (d) $\cos \pi$

34 (a) $\operatorname{sen} 45^\circ$ (b) $\operatorname{sen} 45$ (c) $\cos(3\pi/2)^\circ$ (d) $\cos(3\pi/2)$