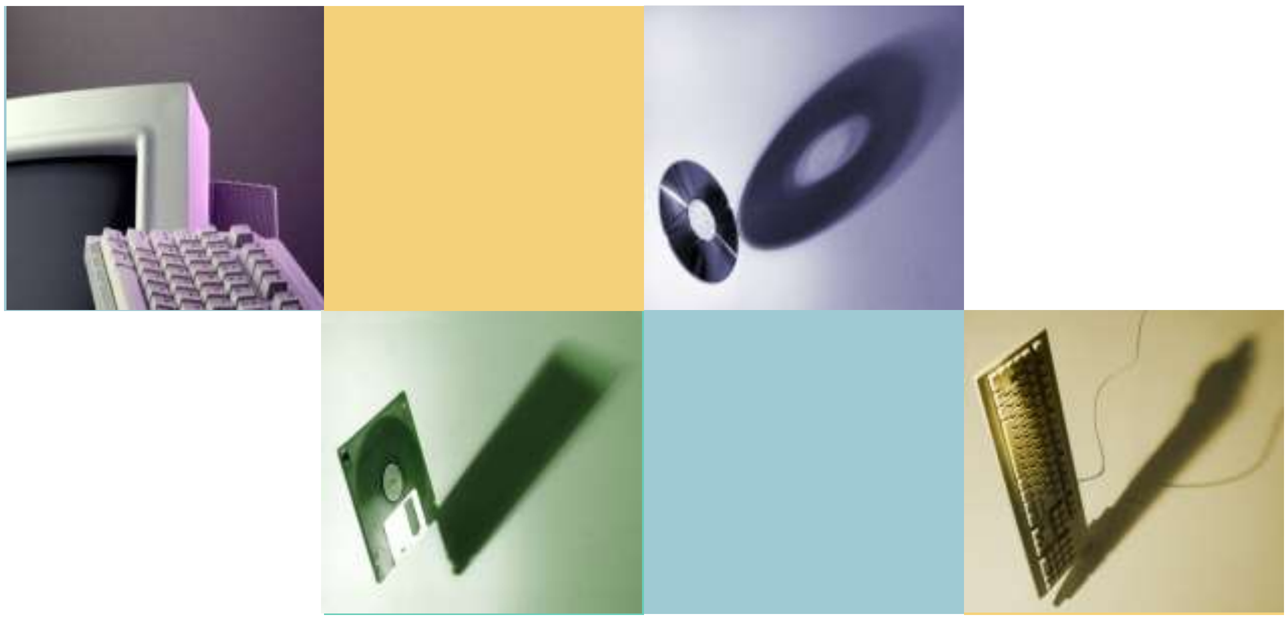
Lección 4.4



Leyes del Seno y Coseno

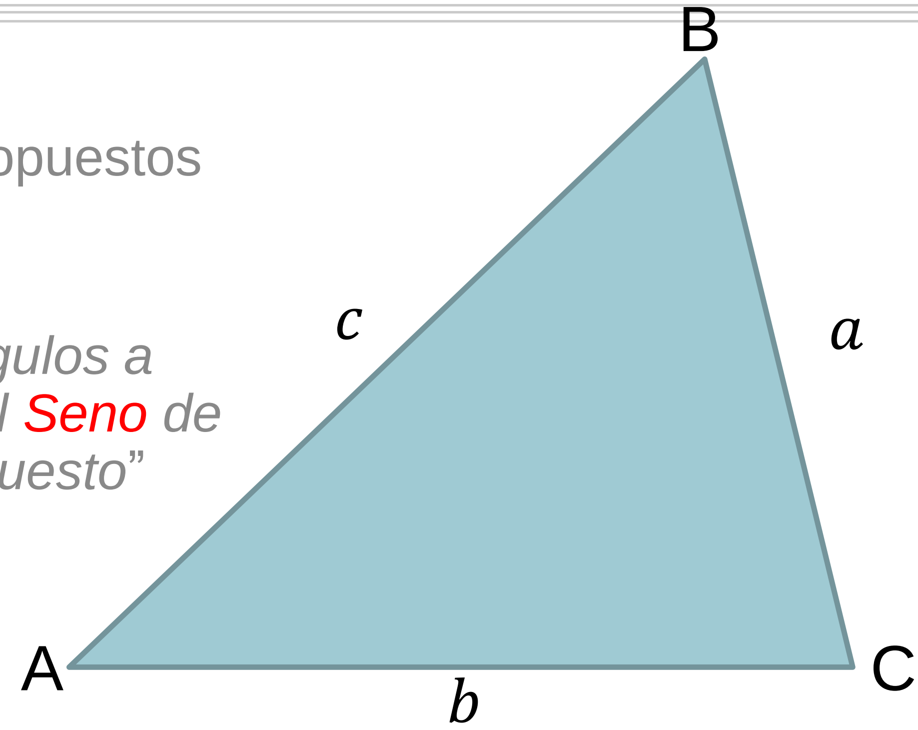
Actividades

- **Referencias del Texto:**
  - 8.1: Problemas 1 – 23
  - 8.2: Problemas 1 – 21
- **Referencias del Web**:
- Videos de Julio Profesor.NET
  - Problema 1 (Se utiliza la Ley de Senos) Ver video
  - Problema 2 (Se utiliza la Ley de Cosenos) Ver video
  - Problema 3 (Se utiliza la Ley de Cosenos): De un puerto sale un barco a las 2:00 PM con velocidad constante de 60 km/h hacia el Este. A las 3:00 PM sale, del mismo puerto, otro barco con velocidad constante de 40 km/h y con rumbo N18°E. ¿Qué distancia separa los barcos a las 5:00 PM? Ver video

Para un triángulo ABC con lados opuestos a, b, c respectivamente.

"*El* Seno *de cualquiera de sus ángulos a su lado opuesto es proporcional al* Seno *de cualquier otro ángulo y su lado opuesto*"

$$\frac{Sin\ A}{a} = \frac{Sin\ B}{b} = \frac{Sin\ C}{c}$$



LEY DEL SENO

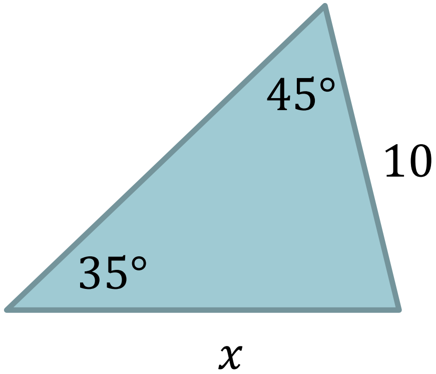
Ejemplo 1

- Determine el valor desconocido en los siguientes triángulos. Redondee a la milésima más cercana.

$$\frac{Sin\ 35°}{10} = \frac{Sin\ 45°}{x}$$

$$x = \frac{10\ Sin\ 45°}{Sin\ 35°}$$

$$x \approx 12.32803052 \approx 12.328$$



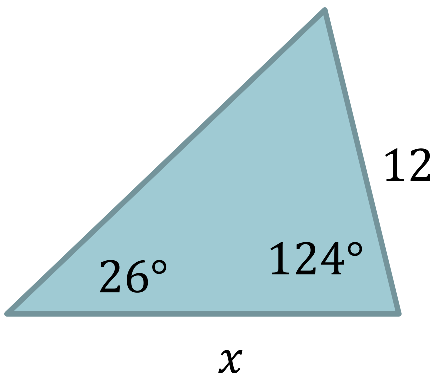
Por la suma de ángulos interiores, el tercer ángulo tiene que ser:

$$180° - 26° - 124° = 30°$$

$$\frac{Sin\ 26°}{12} = \frac{Sin\ 30°}{x}$$

$$x = \frac{12\ Sin\ 30°}{Sin\ 26°}$$

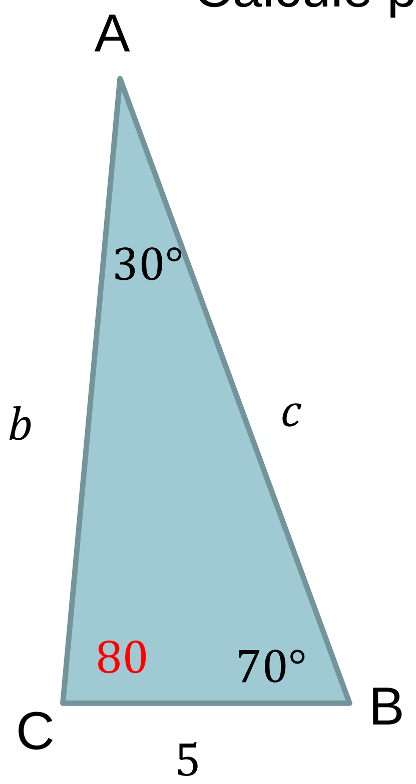
$$x \approx 13.6870322 \approx 13.687$$



Ejemplo 1 – Caso SAA

- Resuelva el triángulo. Redondee al entero más cercano.
- Solución:

Calcule primero el tercer ángulo: $180^\circ - 70^\circ - 30^\circ = 80^\circ$



$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 70^\circ}{b} \qquad \frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 80^\circ}{c}$$

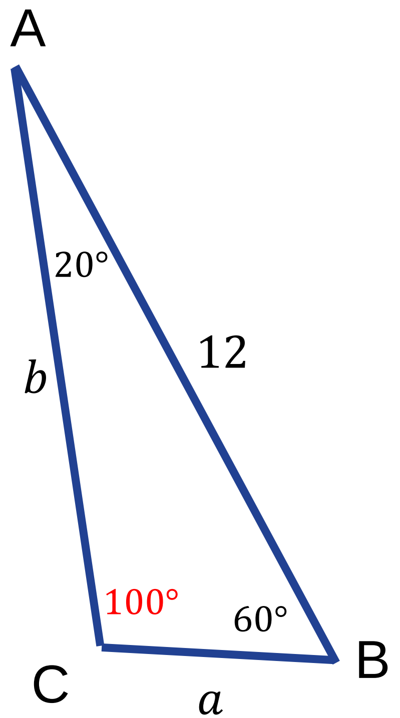
$$b = \frac{5\sin 70^\circ}{\sin 30^\circ} \qquad c = \frac{5\sin 80^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$b \approx 9.396926208 \qquad c \approx 9.84807753$$

$$b \approx 9 \qquad c \approx 10$$

Ejemplo 2 – Caso ASA

- Resuelva el triángulo. Redondee al entero más cercano.
- Solución:
- Calcule primero el tercer ángulo: $180^\circ - 60^\circ - 20^\circ = 100^\circ$



$$\frac{\sin 100^\circ}{12} = \frac{\sin 20^\circ}{a}$$

$$a = \frac{12 \sin 20^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$a \approx 4.16755624$$

$$a \approx 4$$

$$\frac{\sin 100^\circ}{12} = \frac{\sin 60^\circ}{b}$$

$$b = \frac{12 \sin 60^\circ}{\sin 100^\circ}$$

$$b \approx 10.5526229$$

$$b \approx 11$$

Ejemplo 3 – Caso SSA

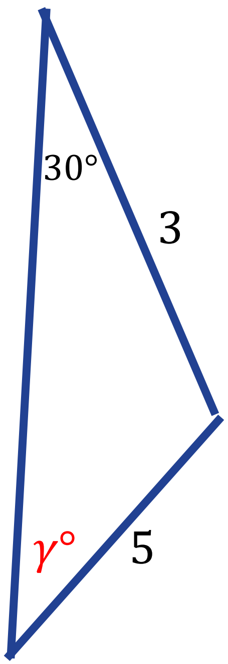
- Cuando se conoce sólo un ángulo opuesto a uno de los lados, tres situaciones pueden resultar:

1. Un triángulo es identificado
2. Dos posibles triángulos son identificados
3. Ningún triángulo es posible

- Por esto se conoce como el “caso ambiguo”

Ejemplo 3 – Caso SSA (1 triángulo)

- Determine los posibles valores del ángulo γ que puedan definir un tríangulo. Redondee al entero más cercano.
- Solución:



$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin \gamma}{3}$$

$$\sin \gamma = \frac{3\sin 30^\circ}{5}$$

$$\sin \gamma = 0.3$$

$$\sin^{-1}(0.3) \approx 17.45760312$$

$$\gamma_1 \approx 17^\circ$$

Como el Seno es positivo en el cuadrante II, hay otro posible ángulo con el mismo seno.

$$\gamma_2 \approx 180^\circ - 17^\circ$$

$$= 163^\circ$$

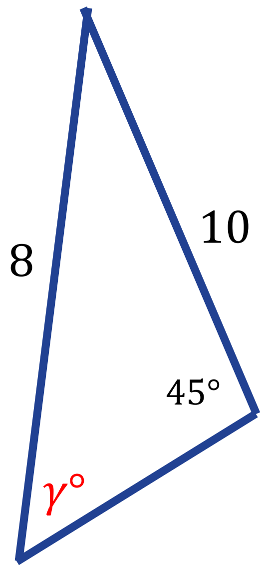
Pero esto **no es posible**, por que …

$$30^\circ + 163^\circ = 193^\circ > 180^\circ$$

Sólo es posible un triángulo. Esto ocurre cuando $\gamma = 17°$

Ejemplo 4 - Caso SSA (2 triángulos)

- Determine los posibles valores del ángulo γ que puedan definir un triángulo. Si hay más de uno resuelva los triángulos. Redondee al entero más cercano.
- Solución:



$$\frac{\sin 45^\circ}{8} = \frac{\sin\gamma}{10}$$

$$\sin\gamma = \frac{10\sin 45^\circ}{8} \approx 0.88$$

$$\sin^{-1}(0.88) \approx 61.64236342$$

Como el Seno es positivo en el cuadrante II, hay dos posibles ángulos que comparten el mismo seno.

$$\gamma_1 \approx 62^\circ \text{ ó } \gamma_2 \approx 118^\circ$$

Ambos conducen a **dos posibles triángulos** por que:

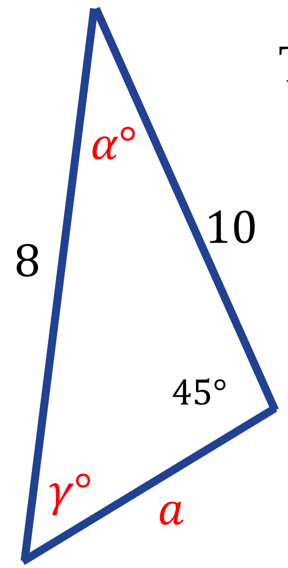
$$45^\circ + 62^\circ < 180^\circ \qquad 45^\circ + 118^\circ < 180^\circ$$



Ejemplo 4 …

Triángulo 1:

$$\gamma_1 \approx 62^\circ$$



Triángulo 2:

$$\gamma_2 \approx 118^\circ$$

$$\alpha_1 = 180^\circ - 45^\circ - 62^\circ \approx 73^\circ$$

$$\alpha_2 = 180^\circ - 45^\circ - 118^\circ \approx 17^\circ$$

$$\frac{\sin 73^\circ}{a_1} = \frac{\sin 45^\circ}{8}$$

$$\frac{\sin 17^\circ}{a_2} = \frac{\sin 45^\circ}{8}$$

$$a_1 = \frac{8 \sin 73}{\sin 45^\circ} \approx 11$$

$$a_2 = \frac{8 \sin 17^\circ}{\sin 45^\circ} \approx 3$$

$$a_1 \approx 11, b = 8, c = 10$$

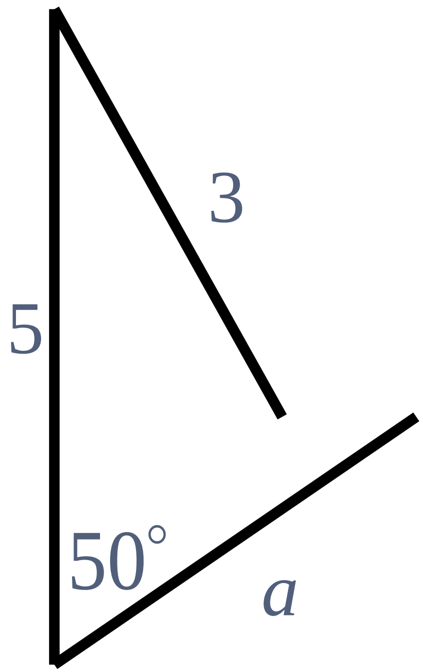
$$\alpha_1 \approx 73^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma_1 \approx 62^\circ$$

$$a_2 \approx 3, b = 8, c = 10$$

$$\alpha_2 \approx 17^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma_2 \approx 118^\circ$$

Ejemplo 5 - Caso SSA (0 triángulo)

- Resuelva el triángulo (SSA):



$$\frac{\sin 50^\circ}{3} = \frac{\sin \gamma}{5}$$

$$\sin \gamma = \frac{5 \sin 50^\circ}{3}$$

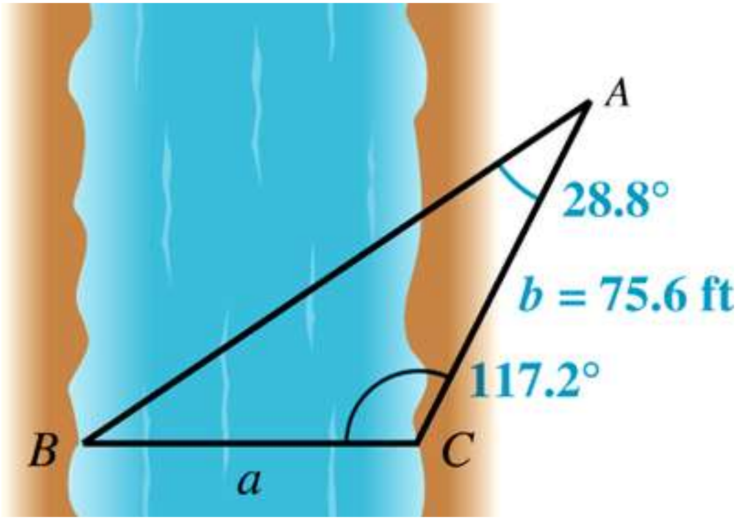
$$\sin \gamma \approx 1.28$$

¡No hay un ángulo con seno valor que 1!

¡No hay un triángulo con estas medidas!

Ejemplo 6

- Para medir el ancho de un río se establece tres puntos de referencia como se resume en le diagrama siguiente. Se determina que $C = 117.2^\circ$, $A = 28.8^\circ$, and $b = 75.6$ pies. Encuentre la distancia a.



$$\beta = 180^\circ - 28.8^\circ - 117.2^\circ$$

$$\beta = 34^\circ$$

$$\frac{\sin 34^\circ}{75.6} = \frac{\sin 28.8^\circ}{a}$$

$$a = \frac{75.6 \sin 28.8^\circ}{\sin 34^\circ}$$

$$a \approx 65.1306151$$

$$a \approx 65.1 \text{ pies}$$

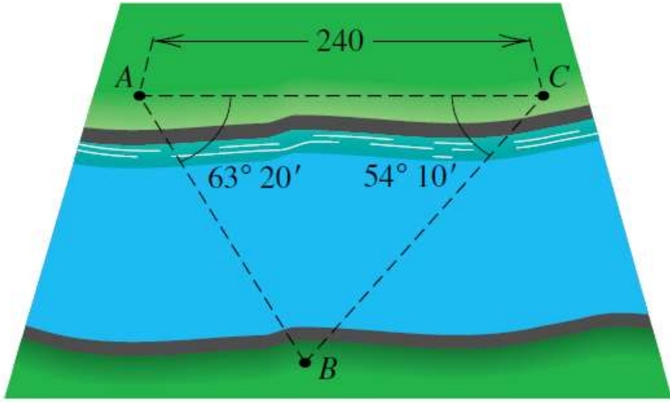
Ejercicios – Ley del Seno

Ejer. 1-16: Resuelva el $\triangle ABC$.

1	$\alpha = 52°$,	$\gamma = 65°$,	$a = 23.7$
2	$\beta = 25°$,	$\gamma = 41°$,	$b = 170$
3	$\alpha = 27°40'$,	$\beta = 52°10'$,	$a = 32.4$
4	$\beta = 50°50'$,	$\gamma = 70°30'$,	$c = 537$
5	$\alpha = 42°10'$,	$\gamma = 61°20'$,	$b = 19.7$
6	$\alpha = 103.45°$,	$\gamma = 27.19°$,	$b = 38.84$
7	$\gamma = 81°$,	$c = 11$,	$b = 12$
8	$\alpha = 27°$,	$c = 75$,	$a = 34$
9	$\gamma = 53°20'$,	$a = 140$,	$c = 115$
10	$\alpha = 27°30'$,	$c = 52.8$,	$a = 28.1$
11	$\gamma = 47.74°$,	$a = 131.08$,	$c = 97.84$
12	$\alpha = 42.17°$,	$a = 5.01$,	$b = 6.12$
13	$\alpha = 47°20'$,	$a = 86.3$,	$b = 77.7$
14	$\beta = 113°10'$,	$b = 248$,	$c = 195$

Ejercicios – Ley del Seno …

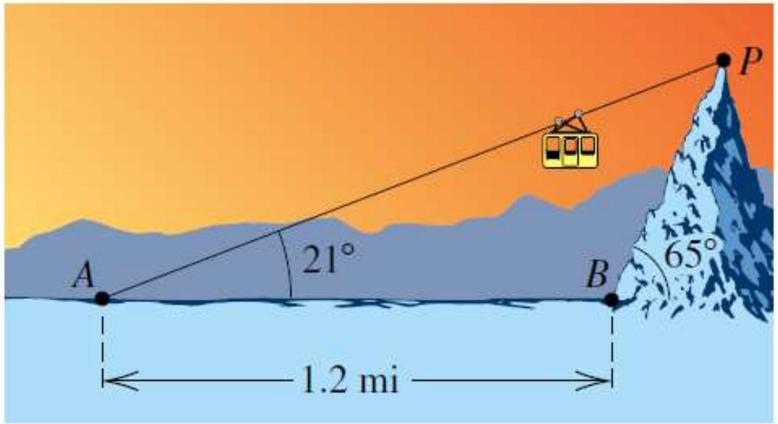
17 **Topografía** Para hallar la distancia entre dos puntos A y B que se encuentran en márgenes opuestas de un río, un topógrafo traza un segmento de recta AC de 240 yardas de longitud a lo largo de una de las márgenes y determina que las medidas de los $\angle BAC$ y $\angle ACB$ son $63°20'$ y $54°10'$, respectivamente (vea la figura). Calcule la distancia entre A y B.



19 **Ruta de un funicular** Como se ilustra en la figura de la página siguiente, un funicular lleva pasajeros de un punto A, que está a 1.2 millas de un punto B en la base de una montaña, a un punto P en la cima de la montaña. Los ángulos de elevación de P desde A y B son 21° y 65°, respectivamente.

(a) Calcule la distancia entre A y P.

(b) Calcule la altura de la montaña.



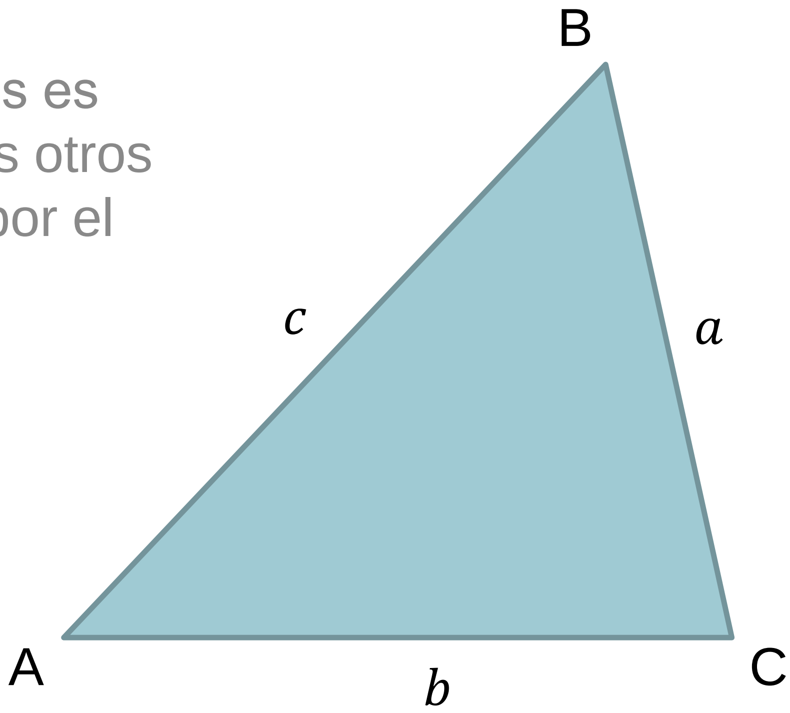
Para todo triángulo,

“el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble de sus productos por el coseno de su ángulo opuesto”.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\,A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2acCos\,B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\,C$$

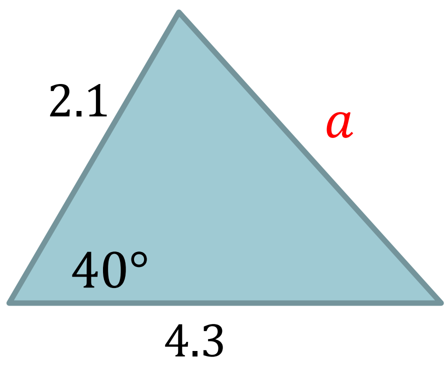


LEY DEL COSENO

La Ley del Coseno se aplica para resolver problemas donde se conocen dos lados y su ángulo incluido (SAS) y donde se conocen los tres lados (SSS).

Ejemplo 7 (SAS)

- Determine el lado desconocido del siguiente triángulo. Redondee al entero.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bcCos\ A$$

$$a^2 = (2.1)^2 + (4.3)^2 - 2(2.1)(4.3)Cos\ 40°$$

$$a^2 \approx 9.065237357$$

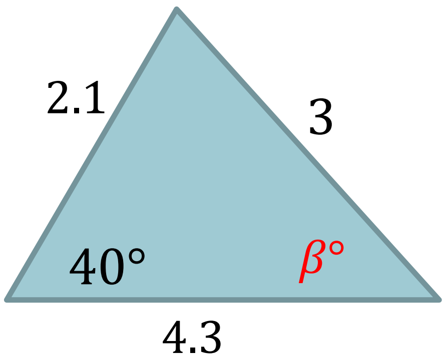
$$a \approx 3.010853261$$

$$a \approx 3$$

- Solución:

Ejemplo 8 - ¿Se puede usar la Ley del Coseno en un problema donde aplica la Ley del Seno

- Determine el ángulo $\beta°$ en el triángulo. Redondee al entero.



Por la Ley del Seno.

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin \beta}{2.1}$$

$$\sin \beta = \frac{2.1 \sin 40^\circ}{3}$$

$$\sin \beta \approx 0.449951327$$

$$\beta \approx sin^{-1}(0.449951327\ )$$

$$\approx 26.74056118°$$

$$\approx 27°$$

- Solución:

Por la Ley de Coseno:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2baCos\ \beta$$

$$2.1^2 = 4.3^2 + 3^2 - 2(4.3)(3)Cos\ \beta$$

$$-23.08 \ = -25.8Cos\ \beta$$

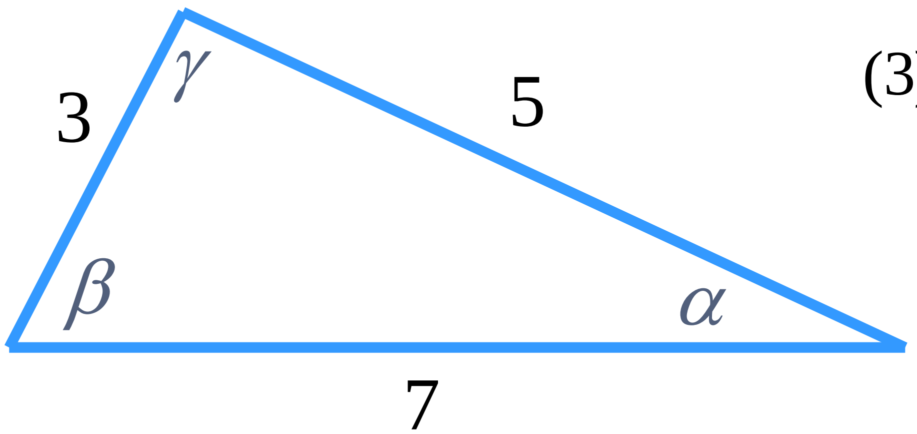
$$Cos\ \beta \ = \ 0.894573643$$

$$Cos^{-1}(894573643) = \ 26.546282$$

$$\beta \approx 27$$

Ejemplo 9 (SSS)

- Determine el ángulo α. Redondee al entero más cercano.



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$(3)^2 = (5)^2 + (7)^2 - 2(5)(7)\cos\alpha$$

$$-65 = -2(5)(7)\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{65}{70}$$

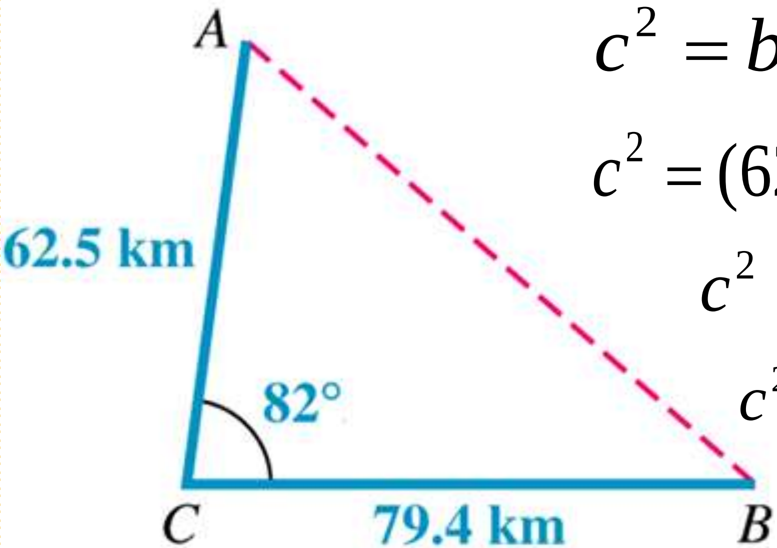
$$\alpha = \cos^{-1}(0.928571429)$$

$$\approx 21.78678923$$

$$\approx 22^\circ$$

Ejemplo 10

- Dos botes zarpan desde un puerto C en una dirección que forma un ángulo de 82° entre ellos. Cuando el bote A ha navegado 62.5 km, el bote B ha navegado 79.4 km. En ese momento, ¿cuál es la distancia entre ellos?



$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bc\cos\gamma$$

$$c^2 = (62.5)^2 + (79.4)^2 - 2(62.5)(79.4)\cos 82°$$

$$c^2 = 3906.25 + 6304.36 - 9925\cos 82°$$

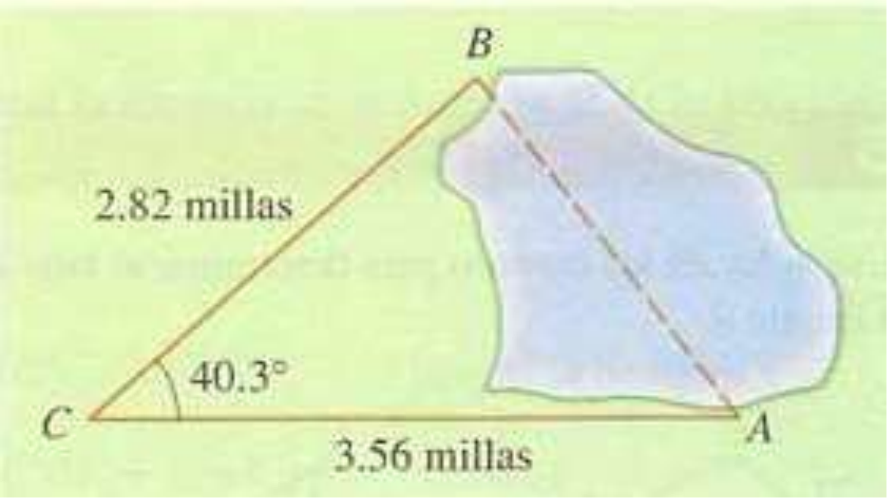
$$c^2 = 10210.61 - 9925(0139173101)$$

$$c^2 \approx 8829.316973$$

$$c \approx 94.0\ km$$

Ejemplo 11

- Un agrimensor necesita calcular la distancia (AB) a través de un pequeño lago y para esto toma mediciones desde un tercer punto (C) . Encuentre la distancia redondeada a dos lugares decimales.



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\ C$$

$$c^2 = (2.82)^2 + (3.56)^2 - 2(2.82)(3.56)Cos\ 40.3°$$

$$c^2 \approx 5.312840209$$

$$c \approx 2.304959915$$

c ≈ 2.30 millas

Ejercicios – Ley del Coseno

Ejer. 5–18: Resuelva el $\triangle ABC$

5	$\alpha = 60°$,	$b = 20$,	$c = 30$
6	$\gamma = 45°$,	$b = 10.0$,	$a = 15.0$
7	$\beta = 150°$,	$a = 150$,	$c = 30$
8	$\beta = 73°50'$,	$c = 14.0$,	$a = 87.0$
9	$\gamma = 115°10'$,	$a = 1.10$,	$b = 2.10$
10	$\alpha = 23°40'$,	$c = 4.30$,	$b = 70.0$
11	$a = 10$,	$b = 11$,	$c = 22$
12	$a = 3.7$,	$b = 5.6$,	$c = 9.8$
13	$a = 2.0$,	$b = 3.0$,	$c = 4.0$
14	$a = 10$,	$b = 15$,	$c = 12$

Ejercicios – Ley del Coseno

20 **Topografía** Para hallar la distancia entre dos puntos A y B, un topógrafo selecciona un punto C que está a 420 yardas de A y a 540 yardas de B. Si el ángulo ACB mide 63°10', calcule la distancia entre A y B.

21 **Distancia entre automóviles** Dos automóviles salen de una ciudad al mismo tiempo y viajan a lo largo de carreteras rectas que difieren en dirección por 84°. Si sus velocidades son 60 mi/h y 45 mi/h, respectivamente, ¿aproximadamente a qué distancia están uno de otro al término de 20 minutos?

22 **Ángulos de un terreno triangular** Un terreno triangular tiene lados de longitudes 420 pies, 350 pies y 180 pies. Calcule el mínimo ángulo entre los lados.

23 **Distancia entre barcos** Un barco sale de puerto a la 1:00 p.m. y navega al S35°E a una velocidad de 24 mi/h. Otro barco sale del mismo puerto a la 1:30 p.m. y navega al S20°O a 18 mi/h. ¿Aproximadamente a qué distancia están uno del otro a las 3:00 p.m.?

24 **Distancia de vuelo** Un avión vuela 165 millas desde el punto A en la dirección 130° y luego en la dirección 245° otras 80 millas. ¿Aproximadamente a qué distancia de A está el avión?

Topografía Dos puntos P y Q al nivel del terreno están en lados opuestos de un edificio. Para hallar las distancias entre los puntos, un topógrafo selecciona un punto R que está a 300 pies de P y a 438 pies de Q, y luego determina que el ángulo PRQ mide 37°40′ (vea la figura). Calcule la distancia entre P y Q.