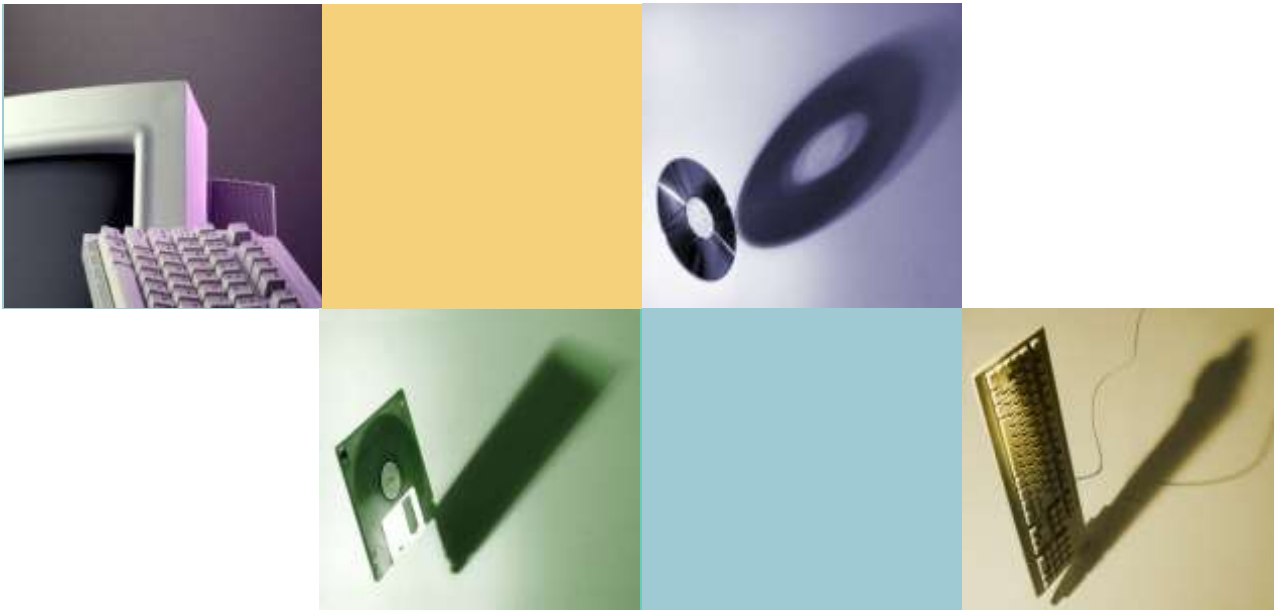


# Lección 4.3



## Ángulos de Referencia y Gráficas de Funciones Trigonométricas

# Actividades

- **Referencia Texto:**
  - Sección 6.3: 1- 4
  - Sección 6.4: 1-24;37 y 38
  - Sección 7.2: 1-6, 19-32
- **Referencias del Web:**
- **Videos**
  - [Ángulos Coterminales](#)
  - [Gráficas de las Funciones Trigonométricas](#)
  - [Gráficas de las Funciones Trigonométricas 2 \(Seno\)](#)
  - [Frecuencia de una función seno y coseno](#)



# CÁLCULO DE VALORES TRIGONOMÉTRICOS



# Funciones Circulares de Ángulos

- Sea  $t$  un número real y  $P = (a, b)$  un punto en el círculo unitario asociado a  $t$ . Entonces:

(coseno)  $\cos t = a$

(seno )  $\sin t = b$

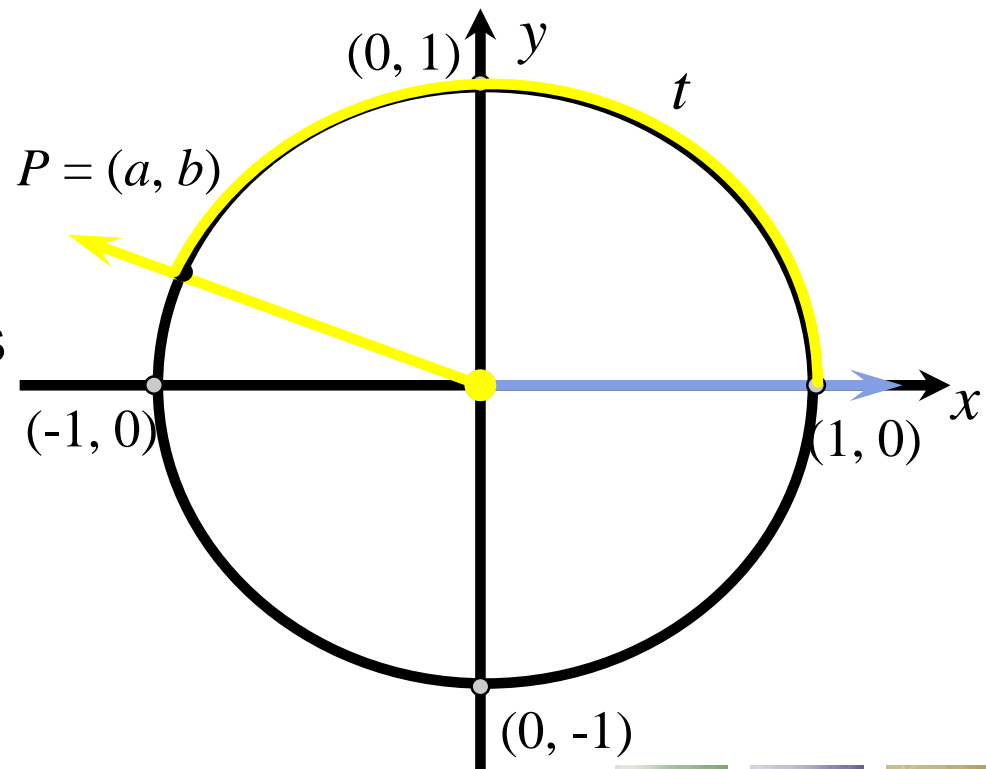
(tangente)  $\tan t = \frac{b}{a}$

- Funciones recíprocas

(secante)  $\sec t = \frac{1}{a}$

(cosecante)  $\csc t = \frac{1}{b}$

(cotangente)  $\cot t = \frac{a}{b}$



# Ejemplo 6

- Sea  $\left(\frac{1}{4}, \frac{-\sqrt{15}}{4}\right)$  un punto en el círculo unitario asociado a un número real  $t$ . Determine los valores trigonométricos de  $t$  si:
- Solución:

$$\cos t = \frac{1}{4}$$

$$\sin t = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

$$\tan t = \frac{b}{a} = \frac{-\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{4}} = -\sqrt{15}$$

$$\sec t = \frac{1}{a} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$$

$$\csc t = \frac{1}{b} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{4}{\sqrt{15}}$$

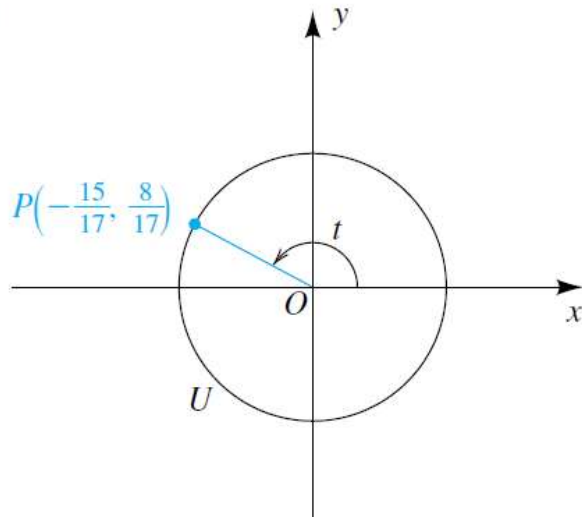
$$\cot t = \frac{a}{b} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{\sqrt{15}}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{15}}$$



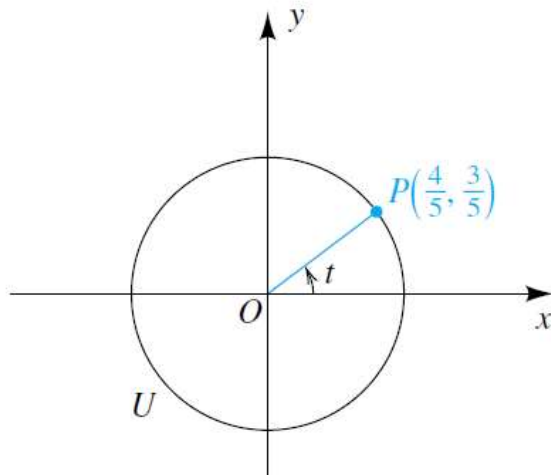
# Ejercicios del Texto 6.1

Ejer. 1–4: Un punto  $P(x, y)$  se muestra en la circunferencia unitaria  $U$  correspondiente a un número real  $t$ . Encuentre los valores de las funciones trigonométricas en  $t$ .

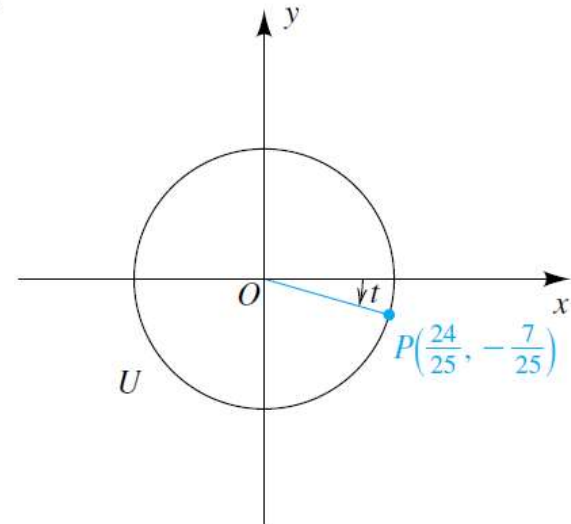
1



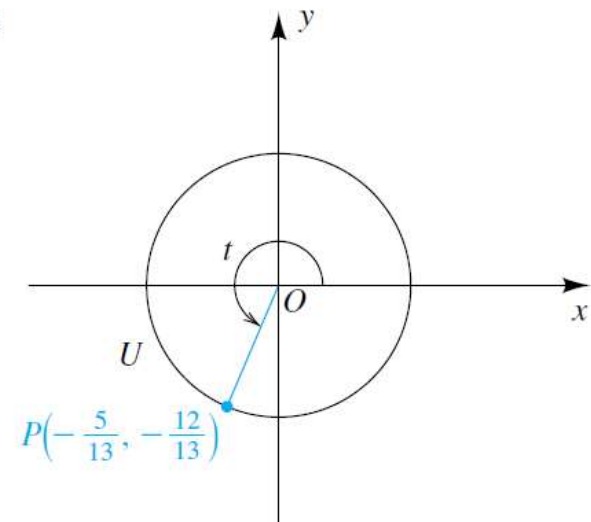
2



3



4



# Ejemplo 1

- a) Encuentre los signos de  $\sin t$ ,  $\cos t$ ,  $\tan t$  si el lado terminal del ángulo se encuentra en el cuadrante IV.

- Solución:  $\cos t > 0$   
 $\sin t < 0$   
 $\tan t < 0$

- b) Encuentre el signo de  $\sin 285^\circ$ .

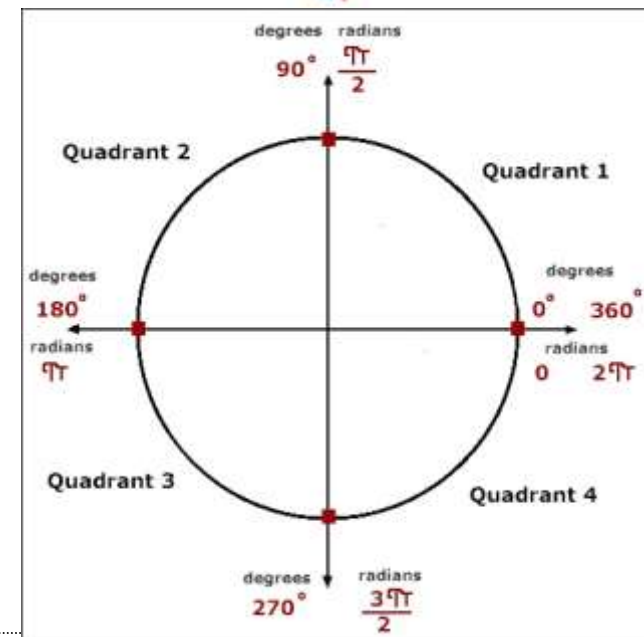
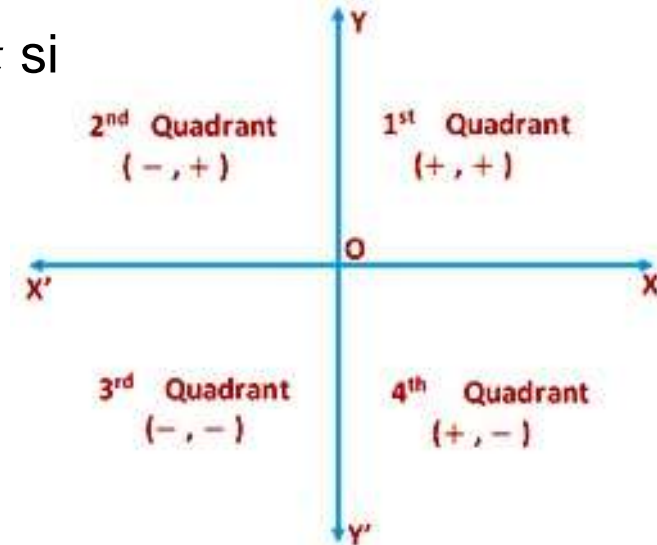
$$\sin 285^\circ < 0$$

- c) Encuentre el signo de  $\tan \frac{7\pi}{6}$ .

$$\tan \frac{7\pi}{6} > 0$$

- d) Encuentre el signo de  $\cos 2$ .

$$\cos 2 < 0$$



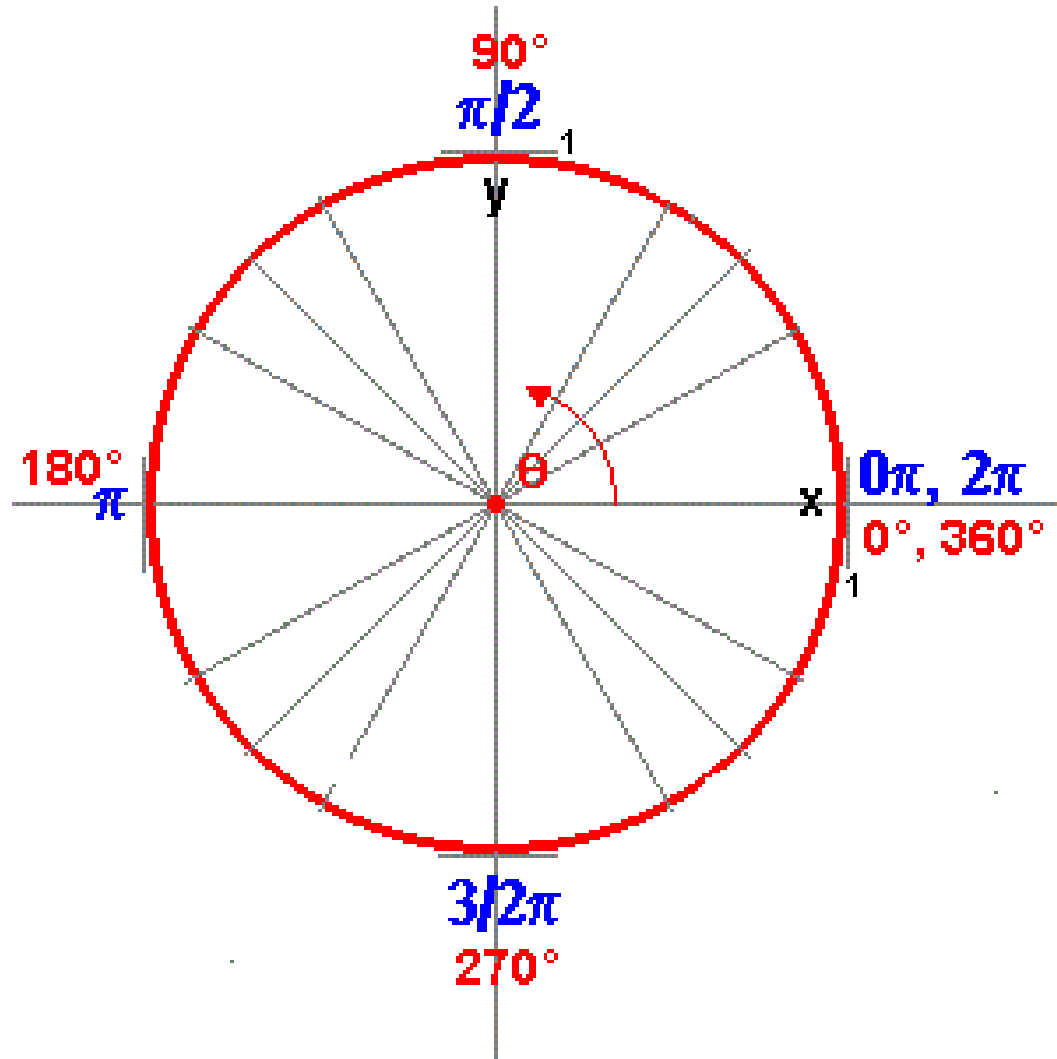
# Relaciones especiales para recordar

$$90^\circ = \frac{\pi}{2} \leftrightarrow (0,1)$$

$$180^\circ = \pi \leftrightarrow (-1,0)$$

$$270^\circ = \frac{3\pi}{2} \leftrightarrow (0,-1)$$

$$360^\circ = 2\pi \leftrightarrow (1,0)$$



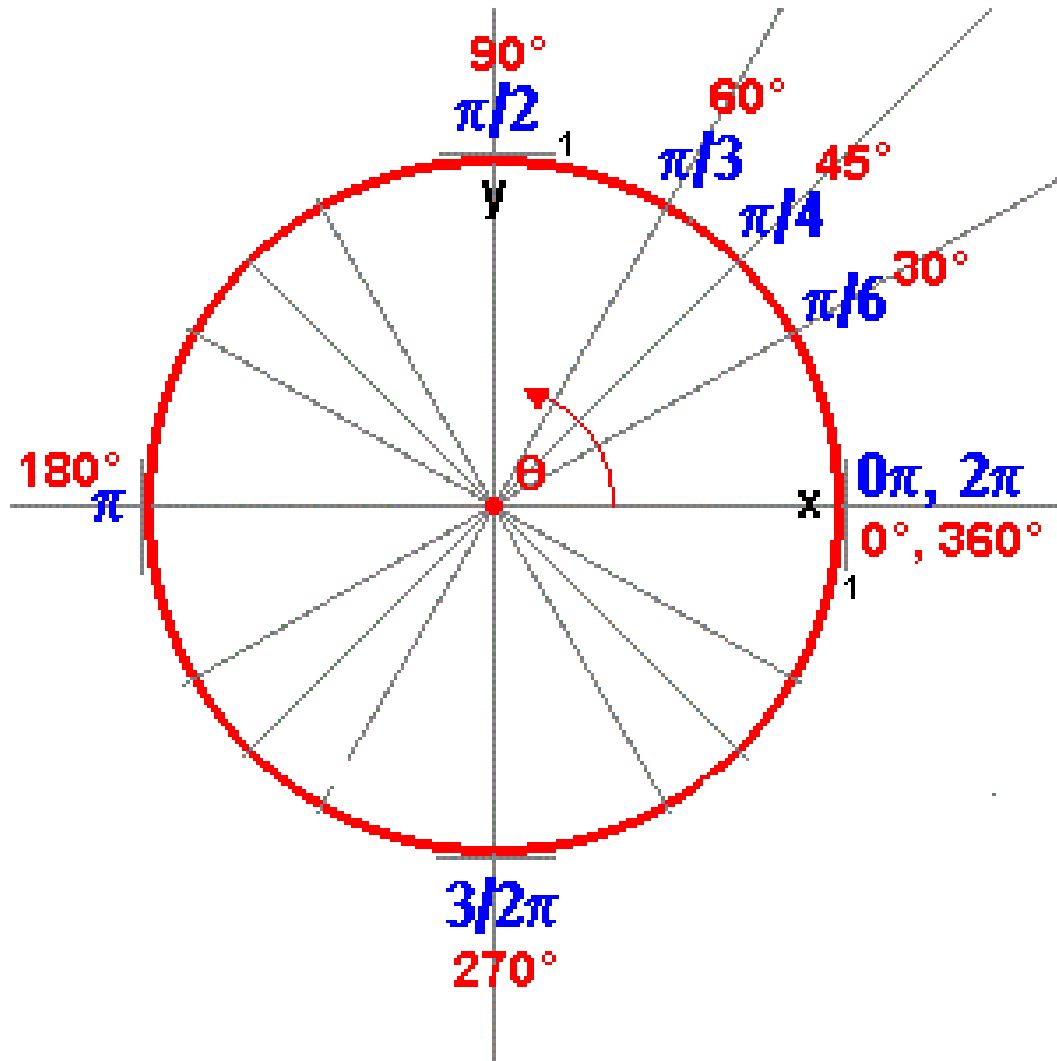


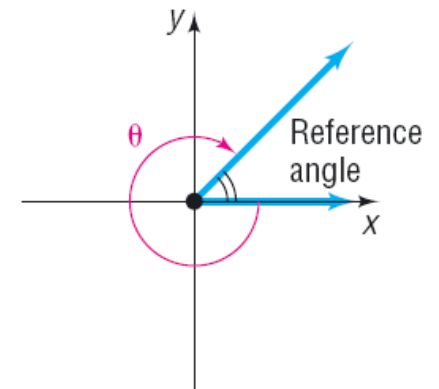
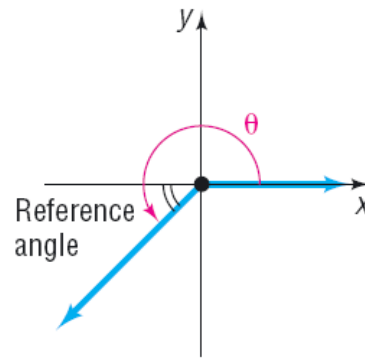
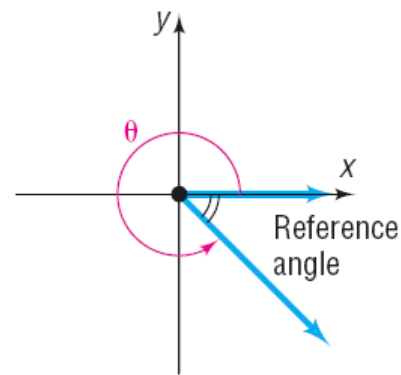
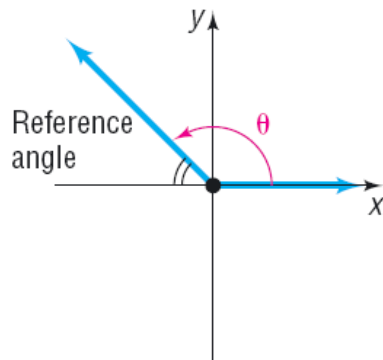
# Relaciones especiales para recordar

$$30^\circ = \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$45^\circ = \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$60^\circ = \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$





# ÁNGULOS DE REFERENCIA

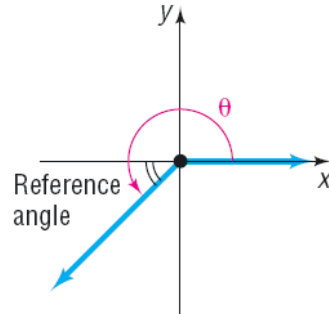
Sea  $\theta$  un ángulo en posición estándar. El ángulo de referencia es el ángulo positivo **agudo** formado por entre su lado terminal y el eje de  $x$ .



# Ejemplo 2

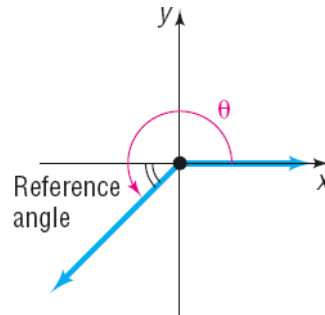
- Encuentre el ángulo de referencia de:

a)  $210^\circ$



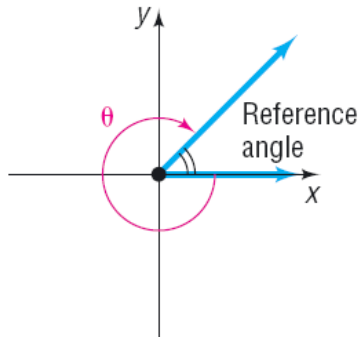
$$\theta = 210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$$

b)  $\frac{4\pi}{3}$



$$\theta = \frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{4\pi}{3} - \frac{3\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$$

c)  $-\frac{7\pi}{4}$



$$\theta = 2\pi - \frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{7\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$



# Ejercicios del Texto 6.4

**Ejer. 1–6:** Encuentre el ángulo de referencia  $\theta_R$  si  $\theta$  tiene la medida dada.

1 (a)  $310^\circ$       (b)  $260^\circ$       (c)  $-235^\circ$       (d)  $-660^\circ$

2 (a)  $290^\circ$       (b)  $195^\circ$       (c)  $-185^\circ$       (d)  $400^\circ$

3 (a)  $3\pi/4$       (b)  $4\pi/3$       (c)  $-\pi/6$       (d)  $9\pi/4$

4 (a)  $7\pi/4$       (b)  $2\pi/3$       (c)  $-3\pi/4$       (d)  $-23\pi/6$

5 (a) 3      (b)  $-2$       (c) 5.5      (d) 100

6 (a) 6      (b)  $-4$       (c) 4.5      (d) 80



# Ejercicios del Texto 6.4

**Ejer. 7–18: Encuentre el valor exacto.**

7 (a)  $\sin(2\pi/3)$  (b)  $\sin(-5\pi/4)$

8 (a)  $\sin 210^\circ$  (b)  $\sin(-315^\circ)$

9 (a)  $\cos 150^\circ$  (b)  $\cos(-60^\circ)$

10 (a)  $\cos(5\pi/4)$  (b)  $\cos(-11\pi/6)$

11 (a)  $\tan(5\pi/6)$  (b)  $\tan(-\pi/3)$

12 (a)  $\tan 330^\circ$  (b)  $\tan(-225^\circ)$

13 (a)  $\cot 120^\circ$  (b)  $\cot(-150^\circ)$

14 (a)  $\cot(3\pi/4)$  (b)  $\cot(-2\pi/3)$

15 (a)  $\sec(2\pi/3)$  (b)  $\sec(-\pi/6)$

16 (a)  $\sec 135^\circ$  (b)  $\sec(-210^\circ)$

17 (a)  $\csc 240^\circ$  (b)  $\csc(-330^\circ)$

18 (a)  $\csc(3\pi/4)$  (b)  $\csc(-2\pi/3)$

**Ejer. 19–24: Calcule a tres lugares decimales.**

19 (a)  $\sin 24^\circ 20'$  (b)  $\cos 0.68$

20 (a)  $\cos 88^\circ 30'$  (b)  $\sin 1.48$

21 (a)  $\tan 73^\circ 10'$  (b)  $\cot 1.13$

22 (a)  $\cot 9^\circ 10'$  (b)  $\tan 0.75$

23 (a)  $\sec 67^\circ 50'$  (b)  $\csc 0.32$

24 (a)  $\csc 43^\circ 40'$  (b)  $\sec 0.26$



$$x = 0.45$$

$$\sin x = 0.45$$

$$2x - 1 = 0$$

$$2 \sin 3x - 1 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

$$\tan^2 x - 5 \tan x + 6 = 0$$

# ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

... Es una ecuación entre dos expresiones que contienen *valores trigonométricos* ...



# Ejemplo 4

- Determine  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

- Como

$$\frac{\pi}{6} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- Entonces  $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

- Y  $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \approx \frac{\pi}{6}$

- En su calculadora:

$$[2nd][sin]1 \left[\frac{n}{d}\right] 2) = [<>]$$

Determine  $\sin^{-1}(0.542)$

En su calculadora ...

$$[2nd][sin]0.542) =$$

$$\sin^{-1}(0.542) \approx 0.572815168$$

Determine el ángulo en grados tal que

$$\sin^{-1}(0.8139)$$

Ajuste modalidad de su calculadora para grados. Luego, ..

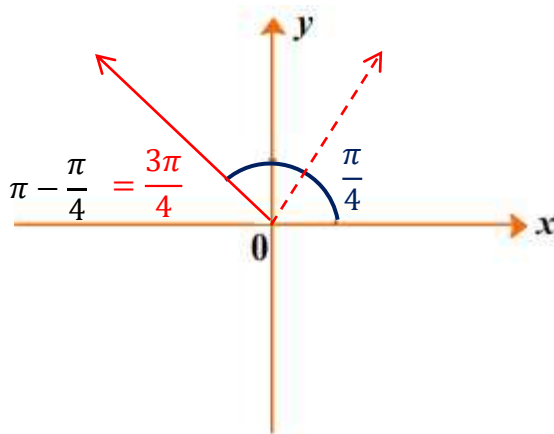
$$[2nd][sin]0.8139) =$$

$$\sin^{-1}(0.8139) \approx 54.47874114$$



# Ejemplo 5

- Resuelva la ecuación en el intervalo  $[0, 2\pi)$  tal que:  $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- *Paso 1 - Encuentre el número o ángulo de referencia*
- Como  $\frac{\pi}{4} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$  ó  $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{\pi}{4}$  es el número de referencia.
- *Paso 2 – Identifique cuadrantes que coincidan con el signo del valor trinométrico*  
Seno es positivo en el cuadrante I y II,
- *Paso 3 – Determine soluciones*
- Como senos es positivo, la primera solución coincide con el número de referencia:  $\frac{\pi}{4}$ . El del cuadrante II se calcula así:



Las dos soluciones son:  $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$

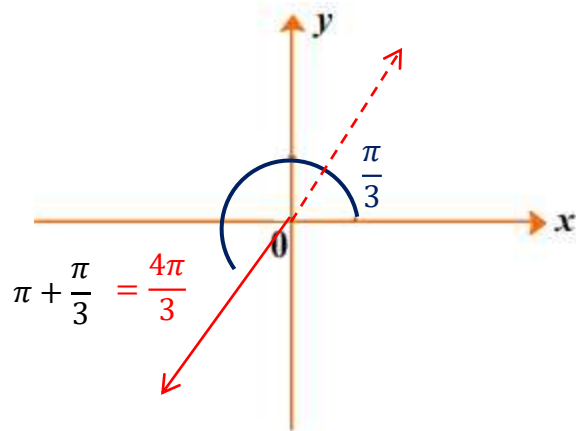




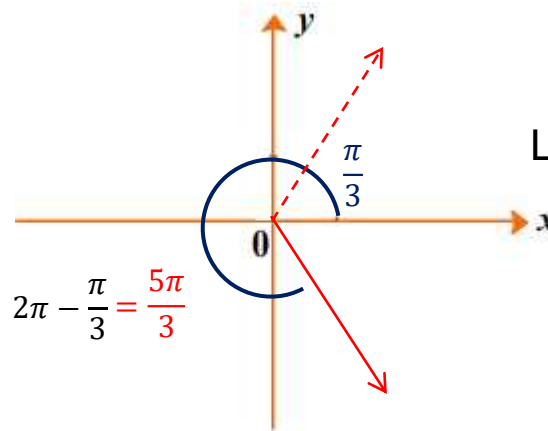
# Ejemplo 6

- Resuelva la ecuación en el intervalo  $[0, 2\pi)$  tal que:  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- Paso 1 - Encuentre el número o ángulo de referencia (ignore signo)*
- Como  $\frac{\pi}{3} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  ó  $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{\pi}{3}$  es el número de referencia.
- Paso 2 – Identifique cuadrantes que coinciden con el signo ...*  
Seno es negativo en el cuadrante III y IV,
- Paso 3 – Determine soluciones*

En el cuadrante III se calcula así:



En el cuadrante IV se calcula así:



Las dos soluciones son:

$$\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$



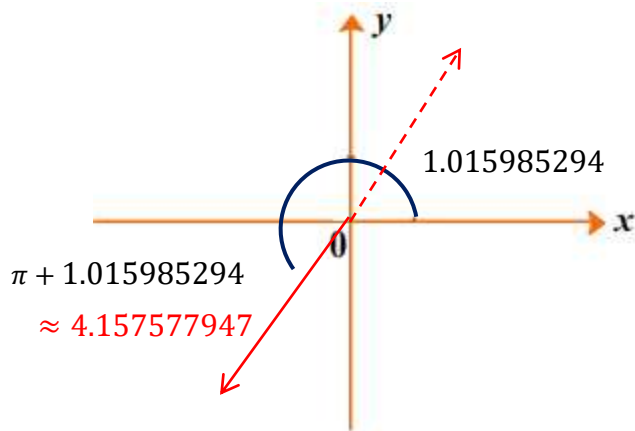
# Ejemplo 7

- Resuelva la ecuación en el intervalo  $[0, 2\pi)$  tal que:  $\sin x = -0.85$
- *Paso 1 - Encuentre el número o ángulo de referencia (ignore signo)*
- Como

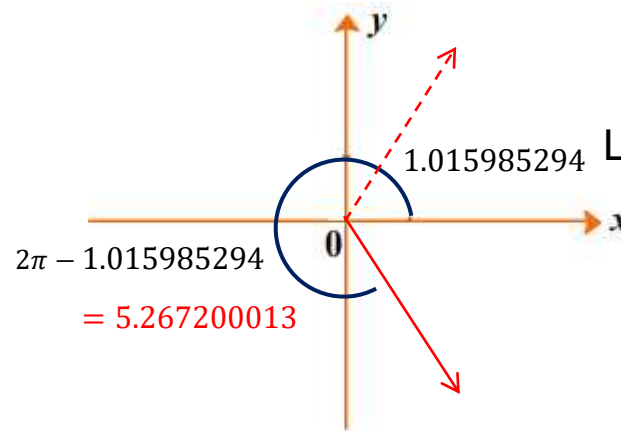
$$\sin^{-1}(0.85) \approx 1.015985294 \Rightarrow 1.015985294 \text{ es el número de referencia (aprox.)}$$

- *Paso 2 – Identifique cuadrantes que coinciden con el signo ...*  
Seno es negativo en el cuadrante III y IV,
- *Paso 3 – Determinar soluciones*

En el cuadrante III se calcula así:



En el cuadrante IV se calcula así:



Las dos soluciones son:

$$\approx 4.157577947, \\ 5.267200013$$



# Ejercicios del Texto 7.2

**Ejer. 1–42: Hallar todas las soluciones de la ecuación.**

1  $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$       2  $\cos t = -1$

3  $\tan \theta = \sqrt{3}$       4  $\cot \alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

5  $\sec \beta = 2$       6  $\csc \gamma = \sqrt{2}$

19  $2 \cos t + 1 = 0$       20  $4 \cos \theta - 2 = 0$

21  $\sqrt{3} + 2 \operatorname{sen} \beta = 0$       22  $2 \cos x = \sqrt{3}$

23  $(\cos \theta - 1) \operatorname{sen} \theta = 0$       24  $(\operatorname{sen} t - 1) \cos t = 0$

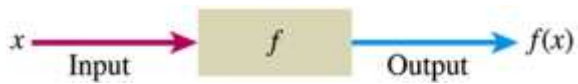
25  $\tan^2 x = 1$       26  $\cot^2 \theta - 1 = 0$

27  $\sec^2 \alpha - 4 = 0$       28  $3 - \tan^2 \beta = 0$

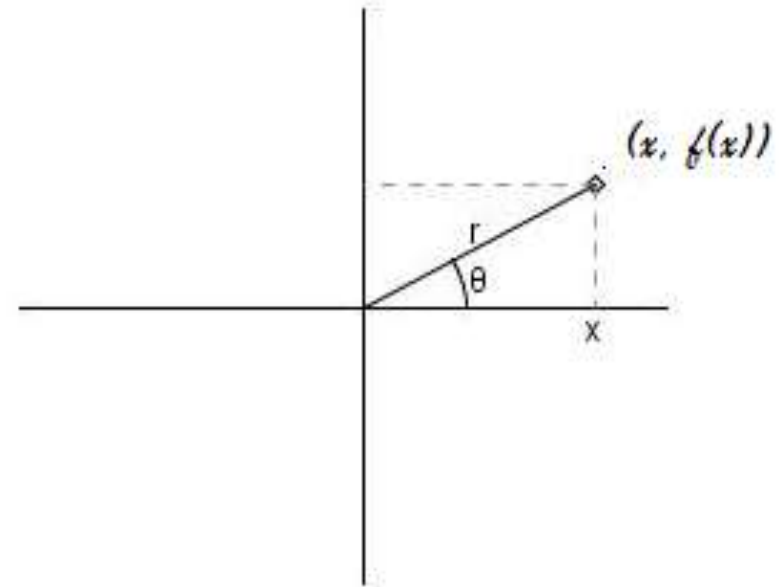
29  $\cot^2 x - 3 = 0$       30  $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$

31  $(2 \operatorname{sen} \theta + 1)(2 \cos \theta + 3) = 0$





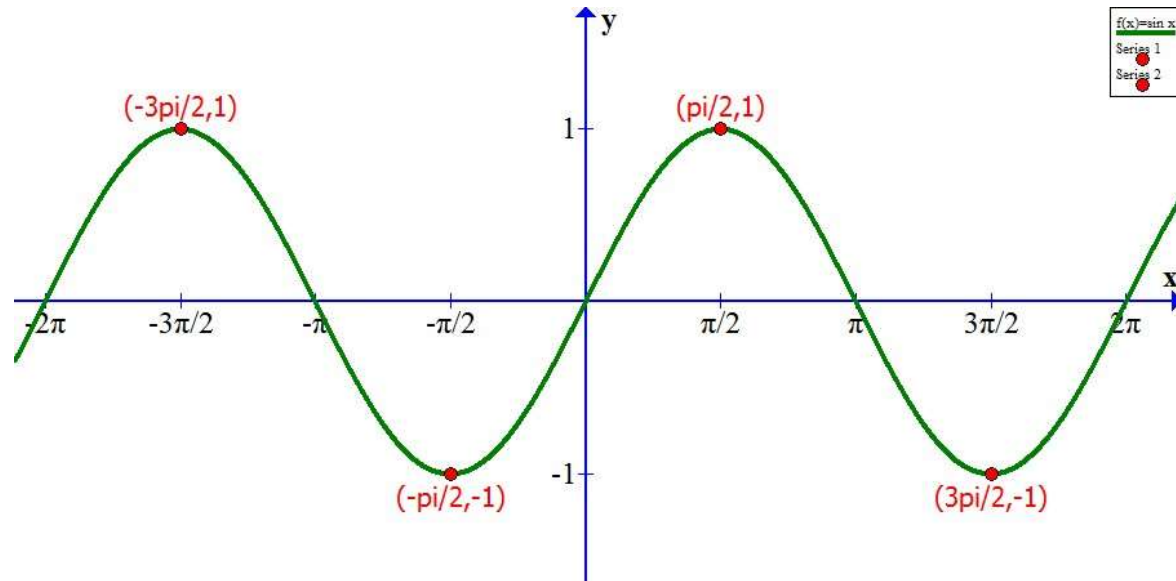
$(x, f(x))$



# GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS SENO Y COSENO



# Gráfica de $f(x) = \sin x$



El Dominio es:  $(-\infty, \infty)$

El Rango es:  $-1 \leq y \leq 1$

El valor mínimo que puede asumir es:  $-1$

El valor máximo que puede asumir es:  $1$

La función repite sus valores cada (periodo)  $2\pi$

Los interceptos en  $x$  ocurren cuando  $x = \dots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$



# Gráficas de $y = a \sin x$

El Dominio será:  $(-\infty, \infty)$

El rango será:  $-a \leq y \leq a$

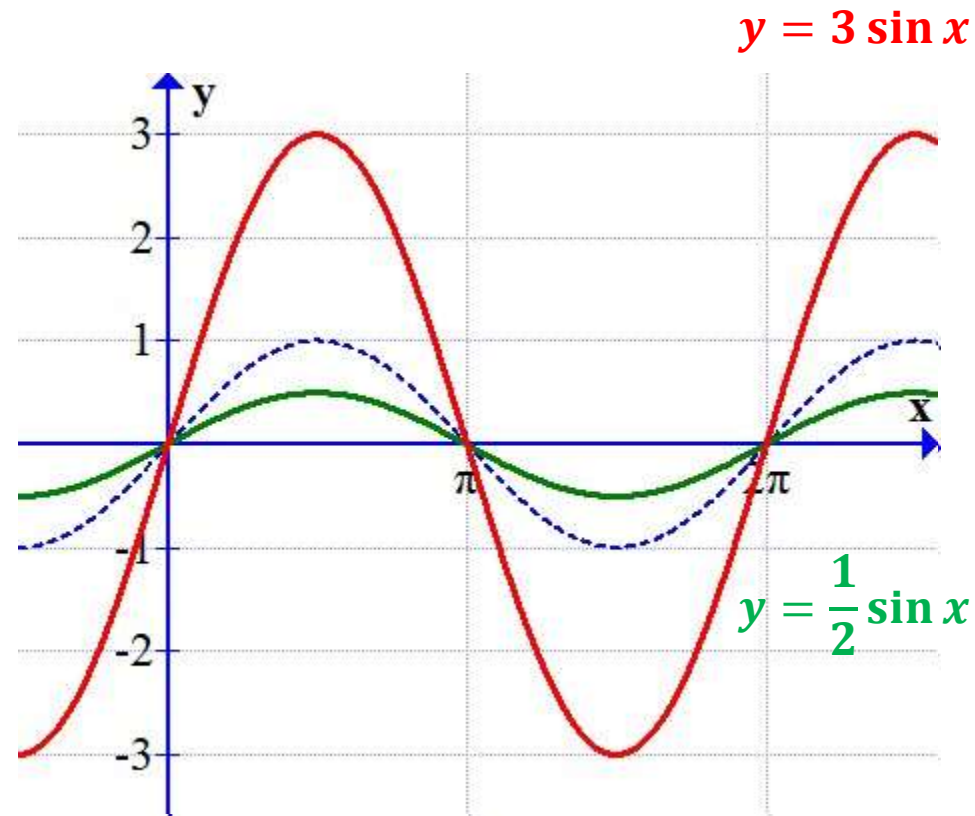
El valor máximo y mínimo que puede asumir son:  $a$  y  $-a$

Su periodo es:  $2\pi$

Los interceptos ocurrirán en:

...,  $-2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \dots$

$|a|$  se conoce como la **amplitud** de la función y determina el valor máximo y mínimo.



# Gráficas de $y = \sin bx$

$$y = \sin \frac{1}{2}x$$

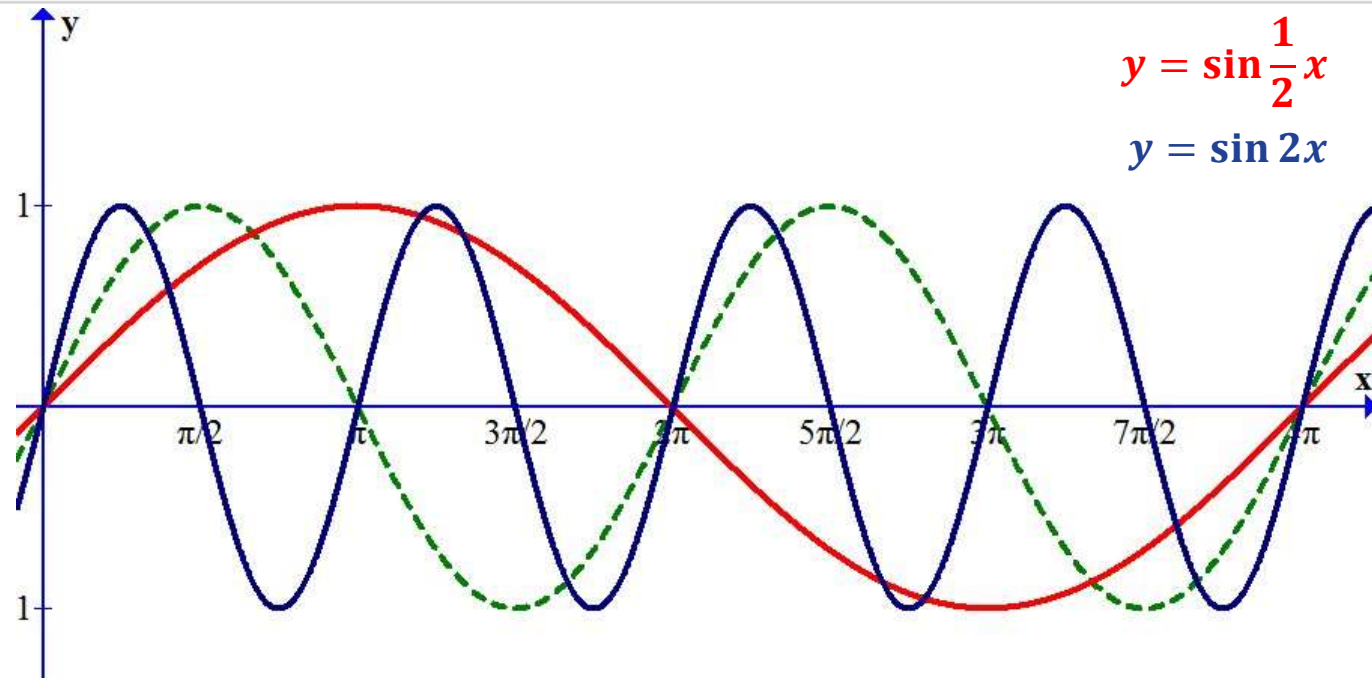
$$y = \sin 2x$$

El Dominio será:

$$(-\infty, \infty)$$

El rango será:

$$-a \leq x \leq a$$



Los valores máximos y mínimos que puede asumir son:  $a$   $-a$

Su periodo es:  $\frac{2\pi}{b}$

Los interceptos ocurrirán en:  $\dots, -\frac{3\pi}{b}, -\frac{2\pi}{b}, -\frac{\pi}{b}, 0, \frac{\pi}{b}, \frac{2\pi}{b}, \frac{3\pi}{b}, \dots$



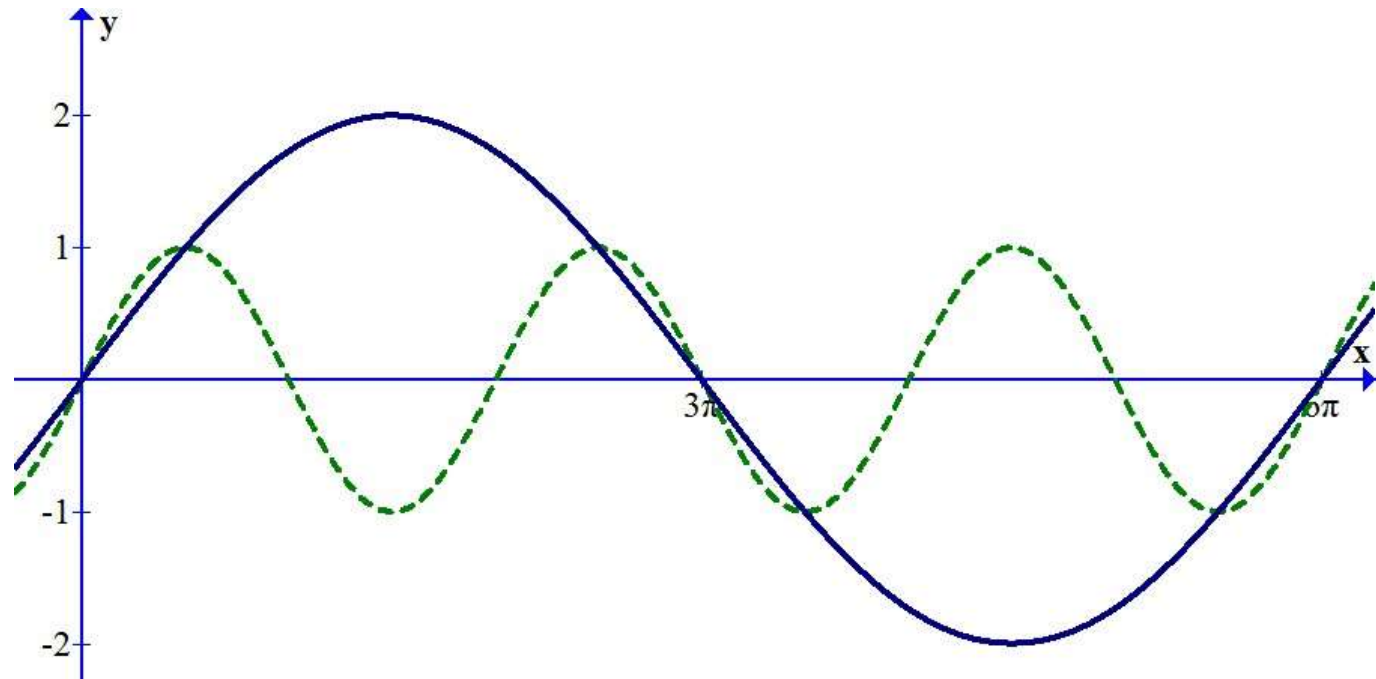
# Ejemplo 1 – Bosqueje gráfica de $y = 2 \sin \frac{x}{3}$

$$y = 2 \sin \frac{x}{3}$$
$$= 2 \sin \frac{1}{3} x$$

$$a = 2 \quad b = \frac{1}{3}$$

La amplitud es:

2



Los valores máximos y mínimos que puede asumir son: 2 -2

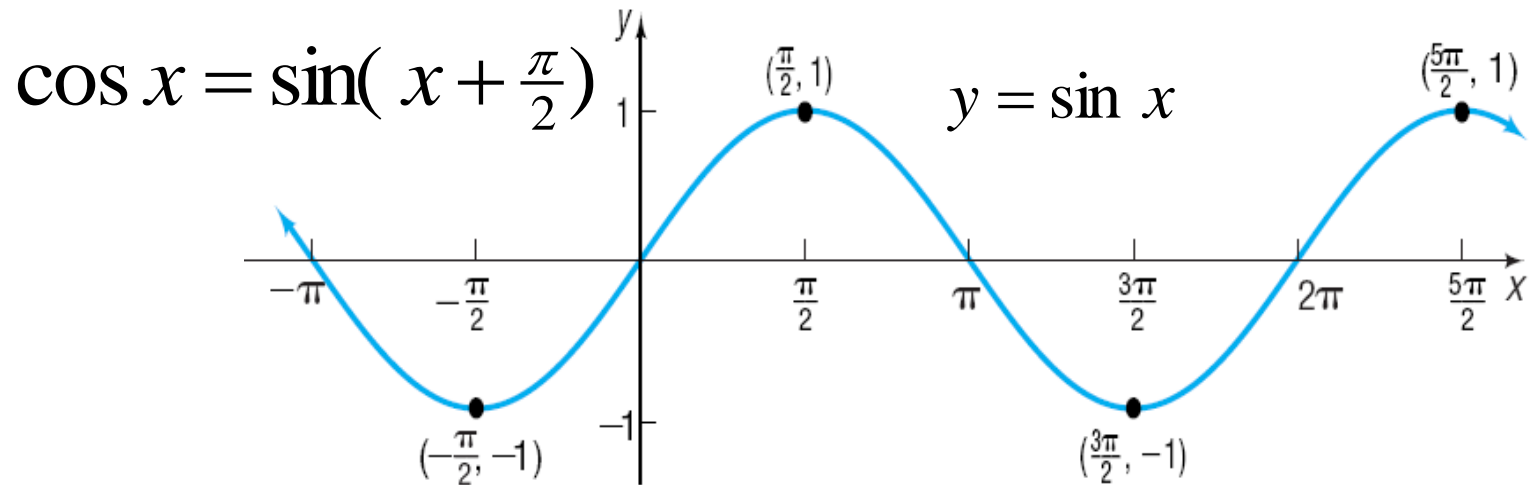
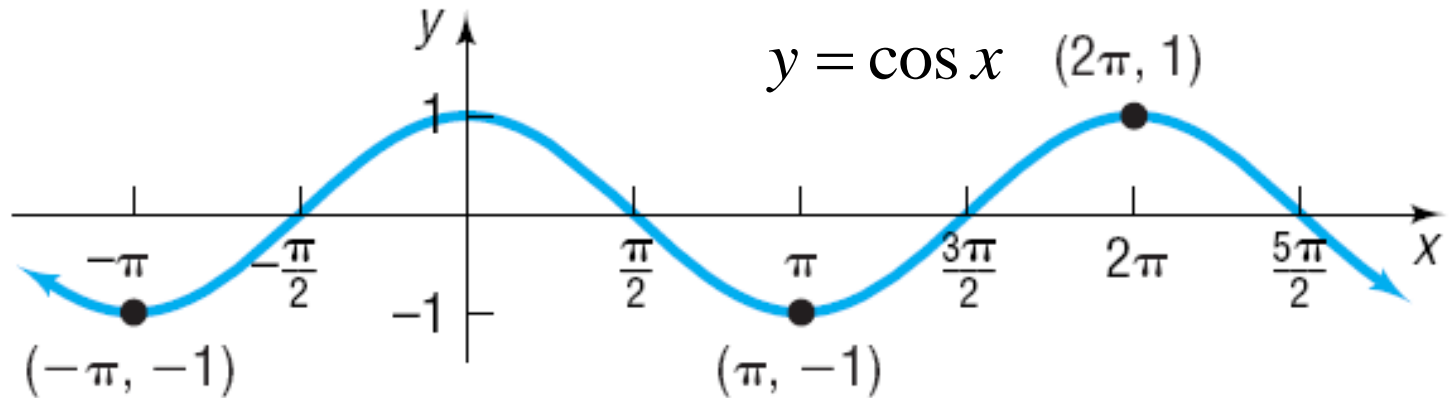
Su periodo es:  $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{1/3} = 6\pi$

Los interceptos ocurrirán en:  $\dots, 0, \frac{\pi}{1/3}, \frac{2\pi}{1/3}, \dots = \dots, 0, 3\pi, 6\pi, \dots$





# Gráfica de $y = \cos x$



# Ejercicios del Texto 6.5

1 Encuentre la amplitud y periodo y trace la gráfica de la ecuación:

(a)  $y = 4 \operatorname{sen} x$

(b)  $y = \operatorname{sen} 4x$

(c)  $y = \frac{1}{4} \operatorname{sen} x$

(d)  $y = \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$

(e)  $y = 2 \operatorname{sen} \frac{1}{4}x$

(f)  $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 4x$

(g)  $y = -4 \operatorname{sen} x$

(h)  $y = \operatorname{sen} (-4x)$

2 Para ecuaciones análogas a las de (a)–(h) del ejercicio 1 pero que contengan el coseno, encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica.

3 Encuentre la amplitud y el periodo y trace la gráfica de la ecuación:

(a)  $y = 3 \cos x$

(b)  $y = \cos 3x$

(c)  $y = \frac{1}{3} \cos x$

(d)  $y = \cos \frac{1}{3}x$

(e)  $y = 2 \cos \frac{1}{3}x$

(f)  $y = \frac{1}{2} \cos 3x$

(g)  $y = -3 \cos x$

(h)  $y = \cos (-3x)$

