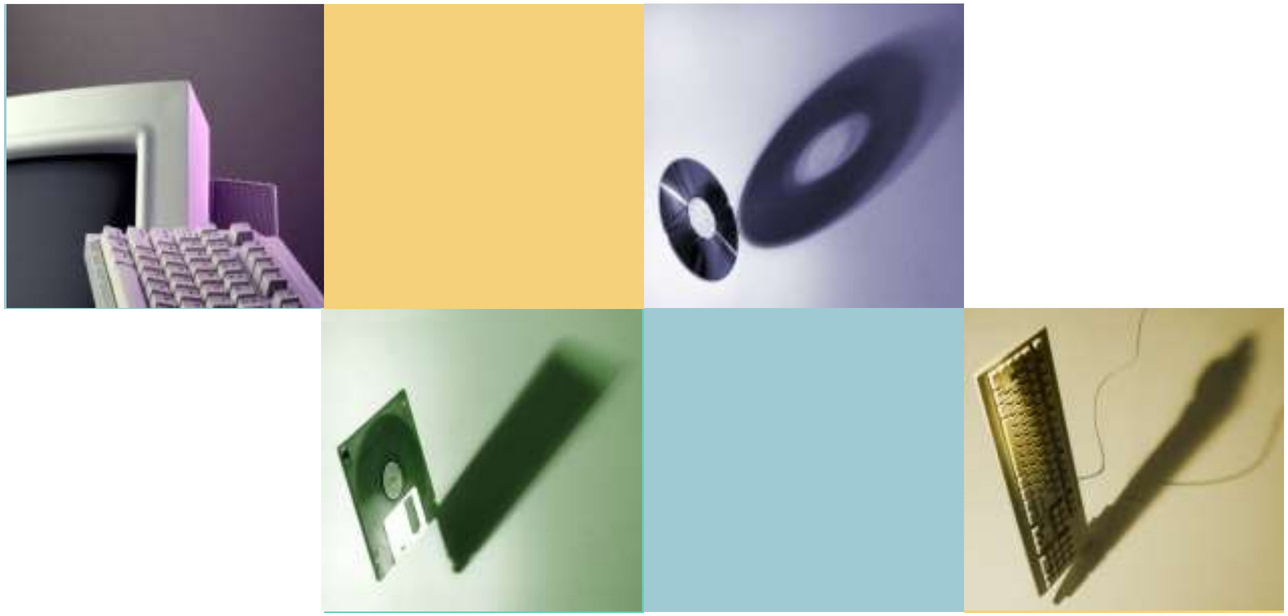
Lección 1.3



Funciones Logarítmicas

Actividades 1.3

- **Referencias:** 5.4 Funciones Logarítmicas;
  - Ejercicios de Práctica: Páginas 338-340. Impares del 1 – 35; 39-46; 55-65. Use GRAPH para las gráficas
- **Referencias del Web:**
  - **Math2Me:**
    - Concepto de logaritmo
    - Que es un logaritmo con números naturales
    - Concepto de logaritmo | ejercicios
    - Concepto de logaritmo natural
  - **Khan Academy** – Algebra II Logaritmos ; Propiedades de Logarítmos
  - Videos – Cambiar a logarítmito; Cambiar a forma exponencial

Definición de logaritmos

- Sea $a > 0$ and $a \neq 1$. Entonces, **el logaritmo con base a de un número x …**

$$\log_a x = y \quad \Longleftrightarrow \quad a^y = x$$

- Ejemplos:

$$\log_{10} 100 = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 10^2 = 100$$

$$\log_4 64 = 3 \quad \Longleftrightarrow \quad 4^3 = 64$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$

Ejemplo 1

- Escriba los siguientes enunciados en forma logarítmica:

1. $6^3 = 216 \Rightarrow \log_6 216 = 3$
2. $2^{-3} = 0.125 \Rightarrow \log_2 0.125 = -3$
3. $7^3 = 343 \Rightarrow \log_7 343 = 3$
4. $e^{0.5x} = t \Rightarrow \log_e t = 0.5x$ o $\ln t = 0.5x$

- Escriba los siguientes enunciados en forma exponencial y determine el valor de x:

$\log_5 125 = x$	$\log_4 x = 2$	$\log_x 243 = 5$
$125 = 5^x$	$x = 4^2$	$243 = 3^5$
$5^3 = 5^x$	$x = 16$	$3^5 = 3^x$
$x = 3$		$x = 5$



Ejercicio #1

- Escriba los siguientes enunciados en forma exponencial y determine el valor de x:

$$\log_2 32 = x$$

$$32 = 2^x$$

$$2^5 = 2^x$$

$$x = 5$$

$$\log_4 \sqrt{2} = x$$

$$\sqrt{2} = 4^x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = (2^2)^x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2} = 2x$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Ejercicios del Texto

Ejer. 1–2: Cambie a forma logarítmica.

1 (a) $4^3 = 64$ (b) $4^{-3} = \frac{1}{64}$

(c) $t^r = s$ (d) $3^x = 4 - t$

(e) $5^{7t} = \dfrac{a + b}{a}$ (f) $(0.7)^t = 5.3$

2 (a) $3^5 = 243$ (b) $3^{-4} = \frac{1}{81}$

(c) $c^p = d$ (d) $7^x = 100p$

(e) $3^{-2x} = \dfrac{P}{F}$ (f) $(0.9)^t = \frac{1}{2}$

Ejer. 3–4: Cambie a forma exponencial.

3 (a) $\log_2 32 = 5$ (b) $\log_3 \frac{1}{243} = -5$

(c) $\log_t r = p$ (d) $\log_3 (x + 2) = 5$

(e) $\log_2 m = 3x + 4$ (f) $\log_b 512 = \frac{3}{2}$

4 (a) $\log_3 81 = 4$ (b) $\log_4 \frac{1}{256} = -4$

(c) $\log_v w = q$ (d) $\log_6 (2x - 1) = 3$

(e) $\log_4 p = 5 - x$ (f) $\log_a 343 = \frac{3}{4}$

Ejer. 11-12: Cambie a forma logarítmica.

11 (a) $10^5 = 100{,}000$ (b) $10^{-3} = 0.001$

(c) $10^x = y - 3$ (d) $e^7 = p$

(e) $e^{2t} = 3 - x$

12 (a) $10^4 = 10{,}000$ (b) $10^{-2} = 0.01$

(c) $10^x = 38z$ (d) $e^4 = D$

(e) $e^{0.1t} = x + 2$

Ejer. 13-14: Cambie a forma exponencial.

13 (a) $\log x = 50$ (b) $\log x = 20t$

(c) $\ln x = 0.1$ (d) $\ln w = 4 + 3x$

(e) $\ln (z - 2) = \frac{1}{6}$

14 (a) $\log x = -8$ (b) $\log x = y + 4$

(c) $\ln x = \frac{1}{2}$ (d) $\ln z = 7 + x$

(e) $\ln (t - 5) = 1.2$

Ecuaciones Logarítmicas

- Una ecuación logarítmica es una ecuación de la forma: $$y = \log_a x$$

  Si $\log_a x = \log_a y$ Entonces $x = y$

- Resuelva:

$$\log_4(2x-1) = \log_4(x+5)$$
$$2x - 1 = x + 5$$
$$2x - x = 5 + 1$$
$$x = 6$$

$$\log_3(2x-1) = 2$$
$$2x - 1 = 3^2$$
$$2x - 1 = 9$$
$$x = 5$$

$$\ln e^{-2x} = 8$$
$$e^{-2x} = e^8$$
$$-2x = 8$$
$$x = -4$$

Ejercicios del Texto

Ejer. 21–36: Resuelva la ecuación

21 $\log_4 (x + 10) = \log_4 (8 - x)$

22 $\log_3 (x + 4) = \log_3 (1 - x)$

23 $\log_5 (x - 2) = \log_5 (3x + 7)$

24 $\log_7 (x - 5) = \log_7 (6x)$

25 $\log x^2 = \log (-3x - 2)$

26 $\ln x^2 = \ln (12 - x)$

27 $\log_3 (x - 4) = 2$

28 $\log_2 (x - 5) = 4$

29 $\log_9 x = -\frac{3}{2}$

30 $\log_4 x = -\frac{3}{2}$

31 $\ln x^2 = -2$

32 $\log x^2 = -4$

33 $e^{2 \ln x} = 9$

34 $e^{-\ln x} = 0.2$

35 $e^{x \ln 3} = 27$

36 $e^{x \ln 2} = 0.25$

Cálculo de logaritmos

- La mayoría de calculadoras realizan el cálculo de logaritmos de base 10 (log x) o de base e (ln x).

  log (10.5) ≈ 1.021189299

  ln (0.0025) ≈ -5.991464547

- Para calcular logaritmos de otras base usamos la siguiente igualdad:

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} = \frac{\ln M}{\ln a} = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$log_5 63 = \frac{\log 63}{\log 5} \approx 2.5742744344$$

$$\log_8 0.0035 \approx -2.719$$

$$\log_5 3.05 \approx 0.693$$

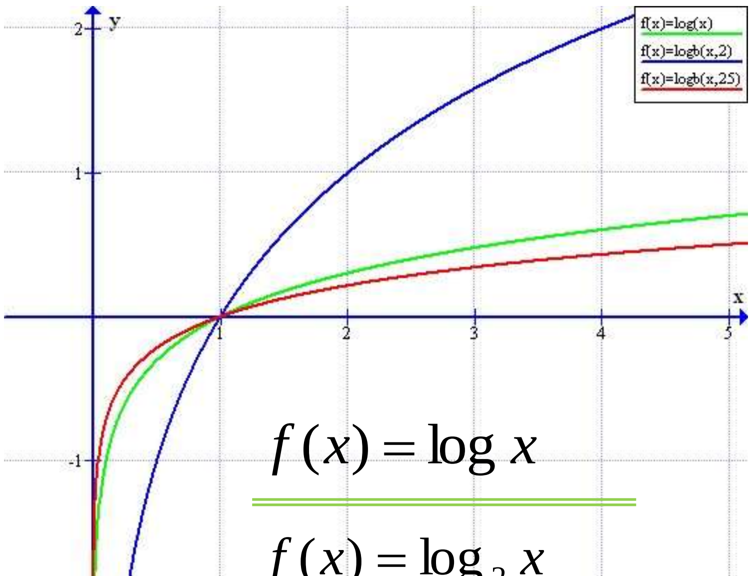
$$log_5 63 = \frac{\ln 63}{\ln 5} \approx 2.5742744344$$



La Función Logarítmo (base > 1)

$$f(x) = \log_a x$$

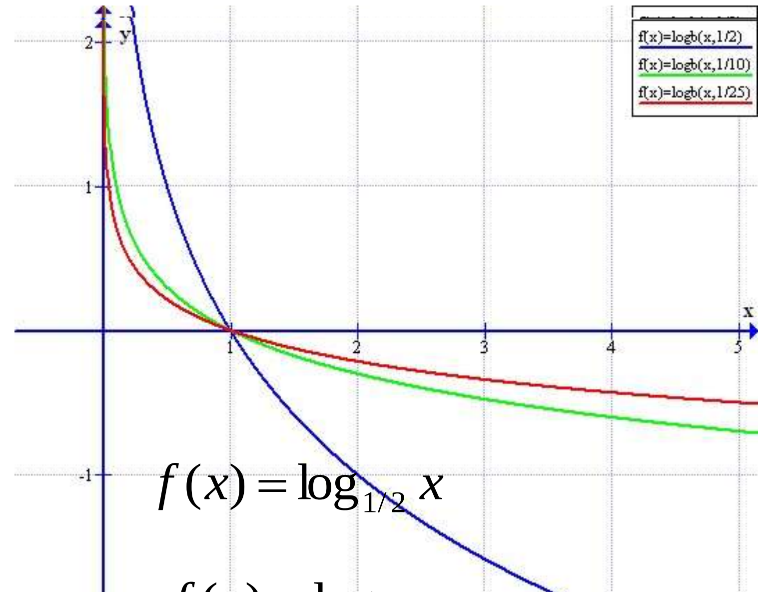
- Si a > 1, la función logarítmo es creciente.
- Si 0< a < 1, la función logarítmo es decreciente.



$$f(x) = \log x$$

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_{25} x$$



$$f(x) = \log_{1/2} x$$

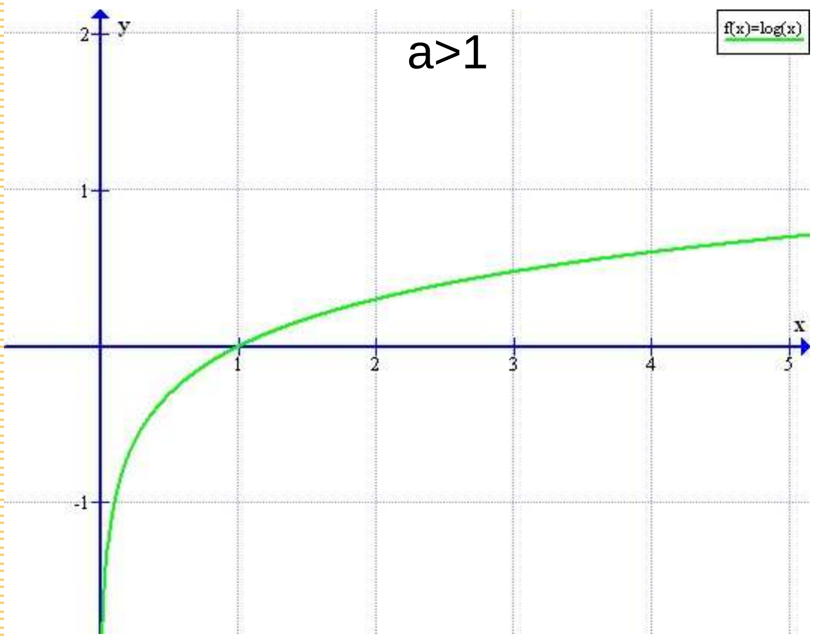
$$f(x) = \log_{1/10} x$$

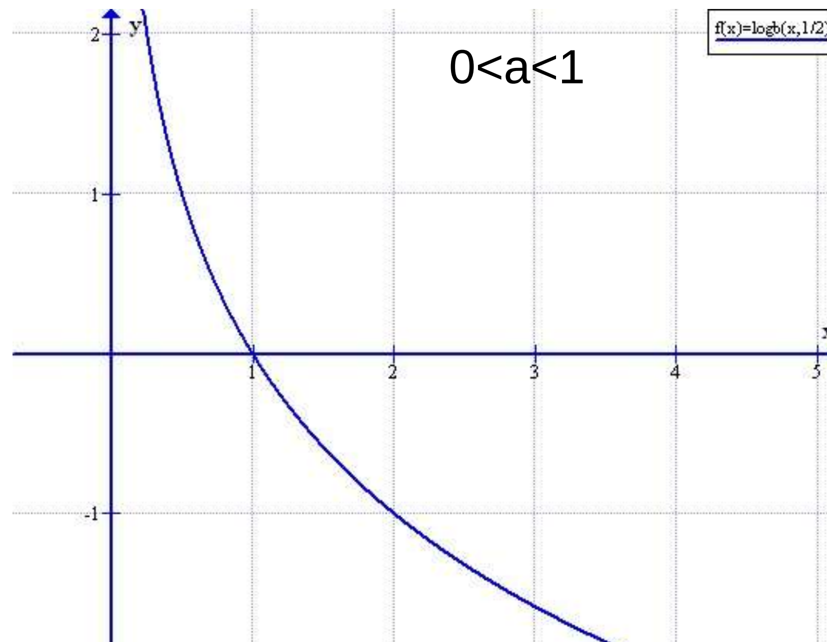
$$f(x) = \log_{\frac{1}{25}} x$$

En GRAPH entre **log(x)** para la función con base 10 y use el formato **logb(x, *a*)** para la función con base *a*.

Características de las funciones con logarítmos

- Dominio = (0,∞) , Rango = (-∞, ∞)
- El intercepto en x ocurre en (1,0).
- No hay intercepto en y.
- El eje vertical, $x = 0$, es un asíntota vertical de su gráfica.





Ejemplo 6

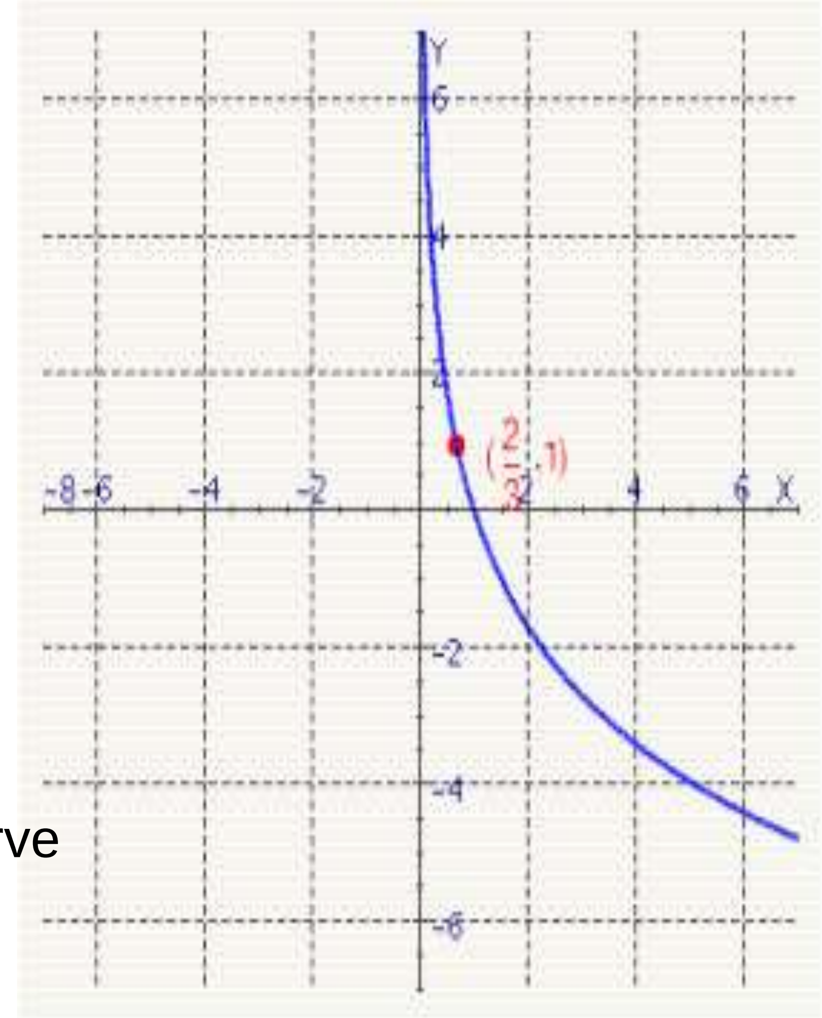
- Determine la función logarítmica cuya gráfica es:

a) $y = \ln \frac{\sqrt{2}}{3} x$

b) $y = \log \frac{2}{3} x$

c) $y = \frac{3}{2} \log_4 x$

d) ninguna de las anteriores



Solución Correcta:
d) Ninguna de las anteriores. Observe que la la gráfica muestra que es un logarítmo con base menor que 1.

Ejercicios del Texto

39 Trace la gráfica de f si $a = 4$.

(a) $f(x) = \log_a x$ (b) $f(x) = -\log_a x$

(c) $f(x) = 2\log_a x$ (d) $f(x) = \log_a (x + 2)$

(e) $f(x) = (\log_a x) + 2$ (f) $f(x) = \log_a (x - 2)$

(g) $f(x) = (\log_a x) - 2$ (h) $f(x) = \log_a |x|$

(i) $f(x) = \log_a (-x)$ (j) $f(x) = \log_a (3 - x)$

(k) $f(x) = |\log_a x|$ (l) $f(x) = \log_{1/a} x$

40 Haga el ejercicio 39 si $a = 5$.

Ejer. 41–46: Trace la gráfica de f.

41 $f(x) = \log (x + 10)$ **42** $f(x) = \log (x + 100)$

43 $f(x) = \ln |x|$ **44** $f(x) = \ln |x - 1|$

45 $f(x) = \ln e + x$ **46** $f(x) = \ln (e + x)$

Ejer. 55–56: Aproxime x a tres cifras

55 (a) $\log x = 3.6274$ (b) $\log x = 0.9469$

(c) $\log x = -1.6$ (d) $\ln x = 2.3$

(e) $\ln x = 0.05$ (f) $\ln x = -1.6$

56 (a) $\log x = 1.8965$ (b) $\log x = 4.9680$

(c) $\log x = -2.2$ (d) $\ln x = 3.7$

(e) $\ln x = 0.95$ (f) $\ln x = -5$

Problema de Aplicación (Fechado de Carbono)

La edad de un objeto antiguo se puede determinar por la cantidad de $carbono\ 14$ radioactivo que permanece en él. Si D_0 es la cantidad original de $carbono\ 14$ y D es la cantidad restante, entonces la edad A del objeto (en años) se determina por:

$$A = -8267\ ln\left(\frac{D}{D_0}\right)$$

Encuentre la edad de un objeto si la cantidad D de $carbono\ 14$ que permanece en el objeto es 73% de la cantidad original D_0

Solución:

$$A = -8267\ ln\left(\frac{73}{100}\right)$$

$$\approx -8267\ (-0.314710745)$$

$$\approx 2601.713728$$

$$\approx 2602 \text{ años}$$

Ejercicios del Texto

57 **Hallar una rapidez de crecimiento** Cambie $f(x) = 1000(1.05)^x$ a una función exponencial con base e y aproxime el porcentaje de crecimiento de f.

58 **Hallar una rapidez de crecimiento** Cambie $f(x) = 50(9/8)^x$ a una función exponencial con base e y aproxime una rapidez de crecimiento de f.

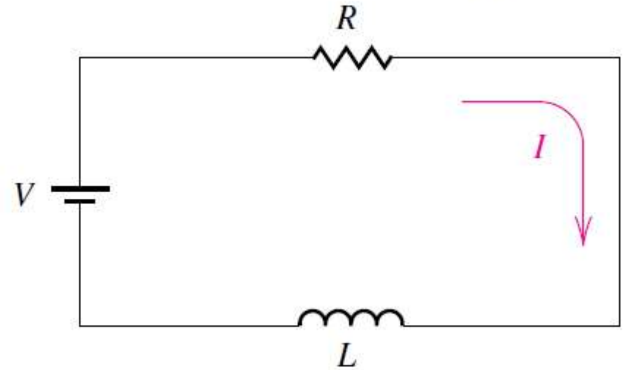
59 **Hallar una rapidez de decaimiento** Cambie $f(x) = 20(0.97)^x$ a una función exponencial con base e y aproxime la rapidez de decaimiento de f.

60 **Hallar una rapidez de decaimiento** Cambie $f(x) = 100\left(\frac{1}{2}\right)^x$ a una función exponencial con base e y aproxime la rapidez de decaimiento de f.

61 **Decaimiento del radio** Si empezamos con q_0 miligramos de radio, la cantidad q restante después de t años está dada por la fórmula $q = q_0(2)^{-t/1600}$. Exprese t en términos de q y de q_0.

62 **Decaimiento del isótopo de bismuto** El isótopo radiactivo de bismuto ^{210}Bi se desintegra de acuerdo con $Q = k(2)^{-t/5}$, donde k es una constante y t es el tiempo en días. Exprese t en términos de Q y k.

63 **Circuito eléctrico** Un diagrama de un circuito eléctrico sencillo formado por un resistor y un inductor se muestra en la figura siguiente. La corriente I en el tiempo t está dada por la fórmula $I = 20e^{-Rt/L}$, donde R es la resistencia y L es la inductancia. De esta ecuación despeje t.



64 **Condensador eléctrico** A un condensador eléctrico con carga inicial Q_0 se le permite descargarse. Después de t segundos, la carga Q es $Q = Q_0e^{kt}$, donde k es una constante. De esta ecuación despeje t.

75 **Crecimiento de elefantes** El peso W (en kilogramos) de una elefanta africana de edad t (en años) se puede aproximar con

$$W = 2600(1 - 0.51e^{-0.075t})^3.$$

(a) Aproxime el peso al nacimiento.

(b) Estime la edad de una elefanta africana que pesa 1800 kg mediante el uso (1) de la gráfica siguiente y (2) de la fórmula para W.