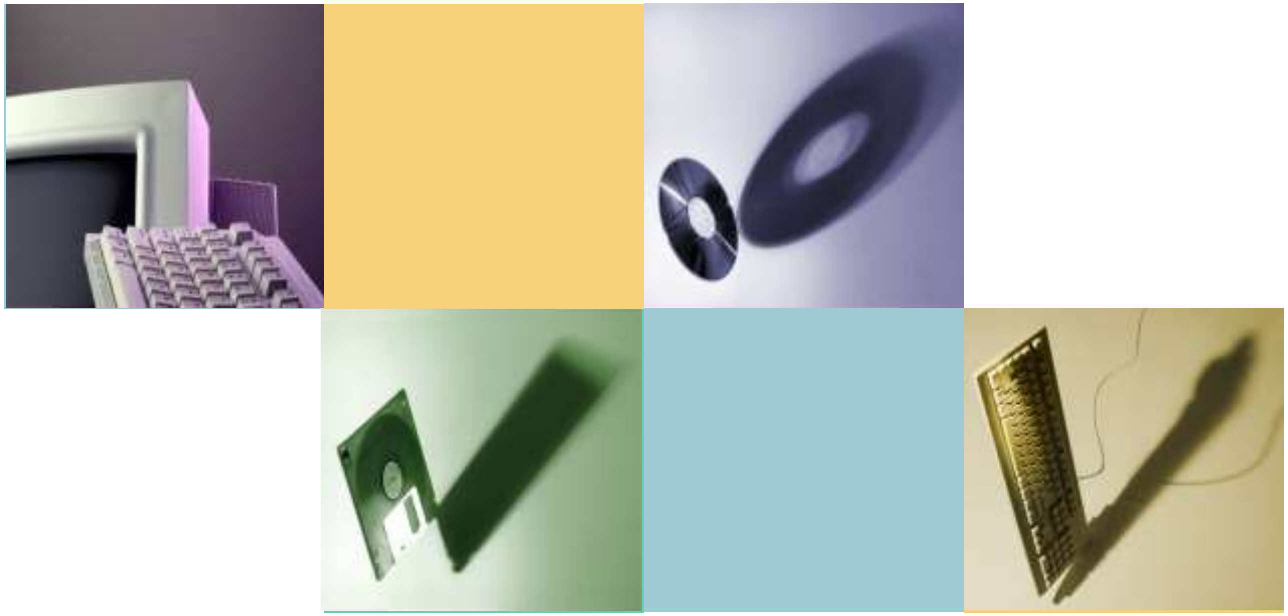
Unidad 3 – Lección 3.1



Resolución de Sistemas Lineales con Matrices

Actividades 3.1

- Referencia:
  - Sección 9.5 Sistemas de ecuaciones lineales con más de dos variables. Ejecicios de Práctica: Página 634: Impares 1 – 25
- Referencias del Web:
  - Math2me.com
    - Concepto de Matriz ; Solución de un Sistema 3 x 3 con el Método de Gauss-Jordan
  - Summary of Linear Equations and Matrices:
  - Using Matrices to Solve Systems of Equations; Part A: Setting Up a System & Doing Row Operations
  - Eliminación Gaussiana
  - Matrices: http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/T6_Matrices.htm

Matriz (*Matrix*)

- Es un arreglo rectangular compuesto de filas → y columnas . ↓
- Si tiene ***m*** filas (rows) y ***n*** columnas (columns) su **dimensión** es ***m* x *n***.
- Sus elementos se representan con una letra minúscula con doble subíndice donde el primero indica la fila y el segundo la columna.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Aplicación: Presentar datos de un problema en forma de tabla de doble entradas.

Ejemplo: Tres vendedores, Pérez, Román y Torres, venden dos modelos de autos: básico o deportivo.

Si respectivamente venden en un mes un total de 3, 4 y 2 modelos básicos y 1, 2 y ninguno. Entonces …

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{ccc} \text{Pérez} & \text{Román} & \text{Torres} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Básico} \\ \text{Deportivo} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Otras aplicaciones

Economía – Problemas de Input-Output y Oferta-Demanda
Geografía – Hacer referencia a la distancia entre varias ciudades
Computación – Programación de animaciones computadorizadas
Matemáticas – Resolver **sistemas de ecuaciones lineales**

Solución de Sistemas con tres o más variables

- Una solución de sistemas de tres o más variables es una solución común de cada una de sus ecuaciones
- Ejemplo: (1, -5, -4) NO es solución de $\left\{\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+y+z=-8 \\ x+y-z=2 \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} (1)-(-5)+(-4)\text{¿}=?0 \\ (1)+(-5)+(-4)\text{¿}=?-8 \\ (1)+(-5)-(-4)\text{¿}=?2 \end{array}\right\}$$

No

Si

No

- Sin embargo, (1, -4, -5) si lo es.

$$\left\{\begin{array}{l} (1)-(-4)+(-5)\text{¿}=?0 \\ (1)+(-4)+(-5)\text{¿}=?-8 \\ (1)+(-4)-(-5)\text{¿}=?2 \end{array}\right\}$$

Si

Si

Si

¿Será (1, -4, -5) la única solución?

Ejercicio #1

- Identifique la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 3y + z = -25 \\ 4x - 5y - z = -3 \\ 2x + y + 4z = -22 \end{array}\right\}$$

a) {(-4, -3, -2)}

b) {(-4, -2, -3)}

c) {(-3, -2, -4)}

d) { }

Solución es b) {(-4, -2, -3)}

Representación de un sistema por una matriz

Sistema — Matriz coeficiente — Matriz aumentada

$$\begin{cases} x-3y+2z=17 \\ -2x+y=-19 \\ 3x-2y+z=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ -2 & 1 & 0 & -19 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -5y+z=1 \\ 7x+y-z=-1 \\ x+2z=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ 7 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & -5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x+z=9 \\ y+3z=1 \\ z=-2 \end{cases} \Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ y=5 \\ z=-9 \end{cases} \Leftarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right]$$

Ejercicio #2

- ¿Cuál sistema es representado por la matriz aumentada?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & -5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & -9 & 5 \end{array}\right]$$

a) $$\left\{\begin{array}{l} -2x-5y+z=-2 \\ -2x-2y+2z=6 \\ 6y+y-9z=5 \end{array}\right\}$$

b) $$\left\{\begin{array}{l} -2x-5y=-2 \\ -2x-2y+2z=6 \\ 6y-9z=5 \end{array}\right\}$$

c) $$\left\{\begin{array}{l} -2x-5y=-2 \\ -2x-2y+2z=6 \\ 6x-9z=5 \end{array}\right\}$$

Solución es c)

Matriz en forma escalonada (triangular)

Se dice que una matriz está forma escalonada (*row-echelon form*) si cumple las siguientes condiciones:

1. El primer número diferente de 0 en cada fila es 1
2. La columna que contiene el primer número diferente de 0 en cualquier fila está a la izquierda de la columna que contiene el primer número diferente de 0 de la fila siguiente.
3. Las filas formados enteramente de 0 aparecen en la parte inferior de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x + z \ = 9 \\ y + 3z = 1 \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x + (-2) \ = 9 \\ y + 3(-2) = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x = 11 \\ y = 7 \\ z = -2 \end{matrix}$$

Solución: $(11, 7, -2)$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x \ = -1 \\ y = 5 \\ z = -9 \end{cases} \Rightarrow$$

Solución: $(-1, 5, -9)$

Forma escalonada reducida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x \ = 2 \\ y = -3 \\ z = \mathit{cualquier\ número\ real} \end{cases}$$

Solución: $(2, -3, z)$



Operaciones elementales por filas

- Son reglas para obtener matrices equivalentes:
  - **Intercambiar** dos filas del sistema

$$R_3 \leftrightarrow R_2$$

Intercambia fila 3 y fila 2

  - **Multiplicar** (dividir) una fila por una constante distinto de 0.

$$R_3 \to -5R_3$$

Reemplaza fila 3 por el producto de -5 por ella misma

  - **Reemplazar** una fila por la suma (diferencia) de esa fila y cualquier otra.

$$R_3 \to R_3 + (-7)R_2$$

Multiplica -7 por fila 2 y se le suma a fila 3

Ejemplo 1

- Resuelva: $\begin{cases} x - 3y + 2z = 17 \\ -2x + y - 3z = -19 \\ 3x - 2y + z = 12 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right]$$

- Solución:

Paso 1- Exprese como una matriz aumentada:

Paso 2 - Lleve a cabo las operaciones elementales por fila hasta lograr la forma escalonada o escalonada reducida.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ -2 & 1 & -3 & -19 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 \to R_2 + 2R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 1 & 15 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 \to R_3 + (-3)R_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 1 & 15 \\ 0 & 7 & -5 & -39 \end{array}\right]$$

$$R_2 \to -\frac{1}{5}R_2$$

Ejemplo 1 …

$R_3 \to R_3 + (-7)R_2$ $\qquad$ $R_3 \to -\frac{5}{18} R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{5} & -3 \\ 0 & 7 & -5 & -39 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & -\tfrac{18}{5} & -18 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 17 \\ y - \frac{1}{5}z = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Reemplace z = 5 en (2):

$$y - \frac{1}{5}(5) = -3$$
$$y - 1 = -3$$
$$y = -2$$

Reemplace y = -2, z = 5 en (1):

$$x - 3(-2) + 2(5) = 17$$
$$x + 6 + 10 = 17$$
$$x = 1$$

Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 5$

o

(1, -2, 5)

Ejercicio #3

- Identifique la operación por fila que se lleva a cabo para ir de la primera matriz a la segunda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right]$$

a) $R_3 \rightarrow -1R_3$

b) $R_3 \rightarrow -1R_2 + R_1$

c) $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$

d) $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

Solución es a)

Ejercicio #4

- Identifique la operación por fila que se lleva a cabo para ir de la primera matriz a la segunda:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 12 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 12 \end{array}\right]$$

a) $R_2 \rightarrow -1R_2$

b) $R_2 \rightarrow -1R_2 + R_1$

c) $R_2 \rightarrow R_2 + (-1)R_1$

d) $R_2 \rightarrow -1R_2 - 1R_1$

Solución es c)

Ejercicio #5

- Use matrices para resolver: $\begin{cases} x+5y=10 \\ x+3y=2 \end{cases}$

$$R_2 \to -1R_1 + R_2 \qquad\qquad R_2 \to -\frac{1}{2}R_2$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{array}\right| \qquad \left|\begin{array}{cc|c} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{llll} x+5y=10 & x+5(4)=10 & x+20=10 & x=-10 \\ y=4 & y=4 & y=4 & y=4 \end{array}$$

Solución: $(-10, 4)$

Ejercicio #6

- Use matrices para resolver: $\begin{cases} 3x+5y=3 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

$$R_1 \to \frac{1}{3}R_1$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to -5R_1 + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_2 \to -\frac{3}{4}R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & \frac{-4}{3} & -4 \end{bmatrix}$$

$$R_1 \to -\frac{5}{3}R_2 + R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

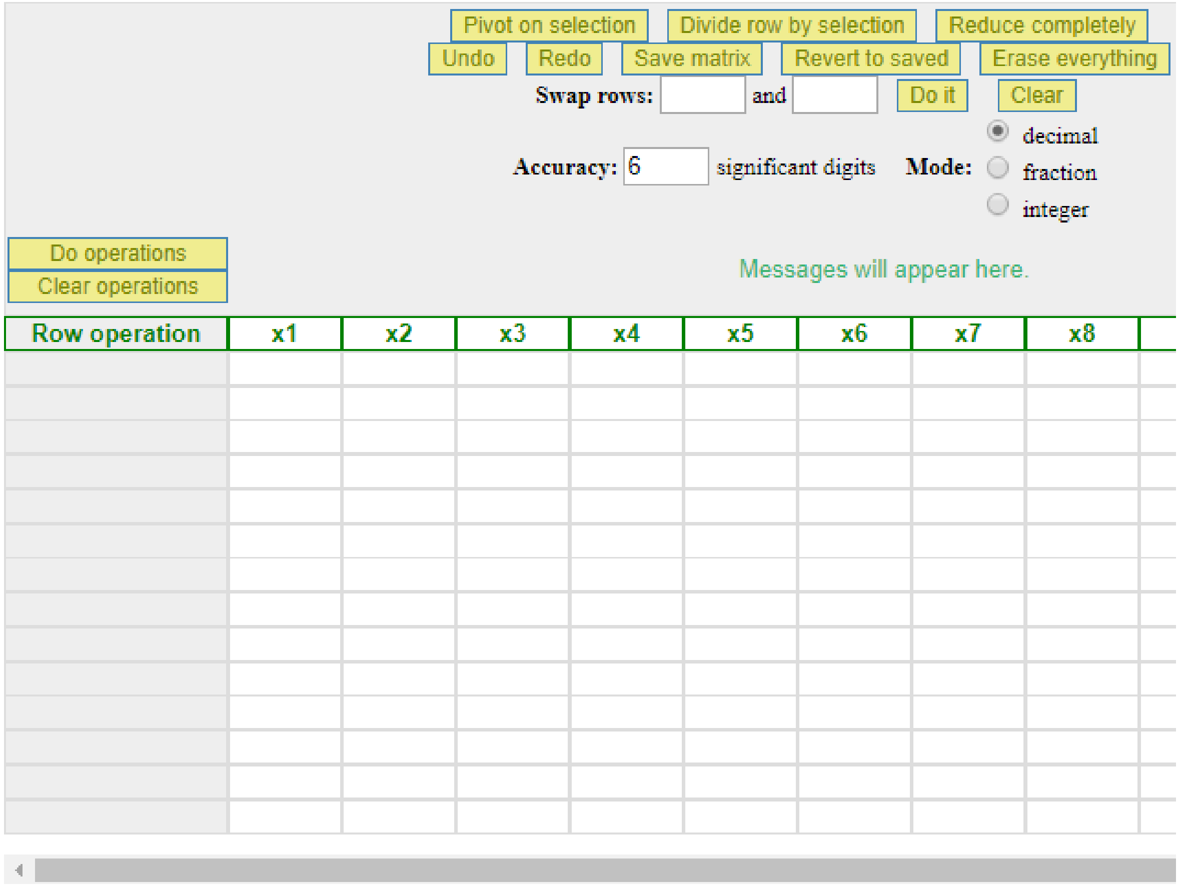
$x=-4$
$y=3$

Solución: $(-4, 6)$

“Matrix Pivot Tool”

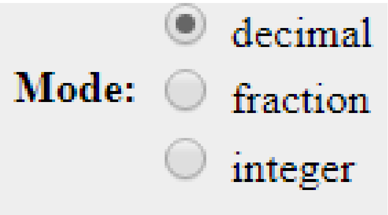
- El **Pivot and Gauss-Jordan Tool** de Steven Warner es una hoja de Excel que tiene macros para resolver sistemas a través de matrices. La versión de Web se puede acceder de: https://www.zweigmedia.com/spreadsheets/gaussjordanpage.php?lang=en

La versión de Excel (Windows) puede accederlo de: ExcelPivot.xls .
- Cuando lo abra haga clic en “Enable Macros”
- Entre la matriz a partir de la celda B14.

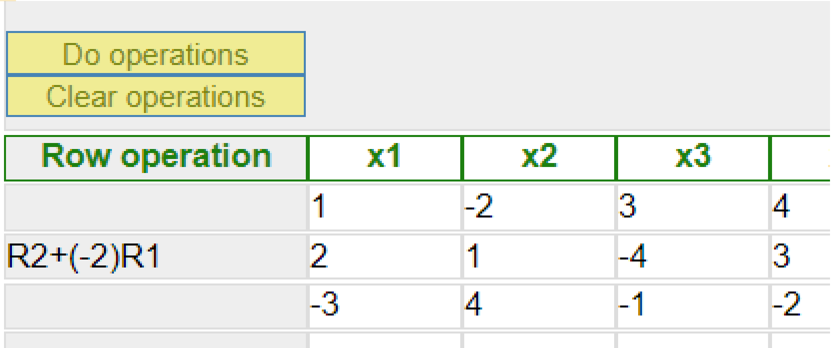


“Matrix Pivot Tool” …p2

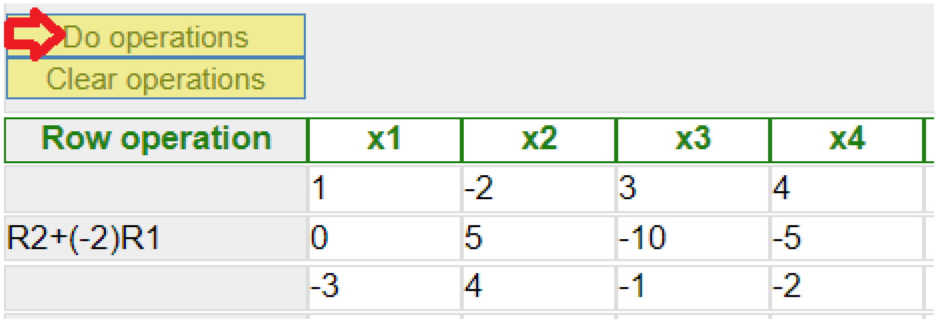
- **Mode**: Permite entrar valores como decimales, fracción o enteros. En el caso de una fracción, éntrelas como a/b.



- Row operation: Bajo esta columna, entre las operaciones en la fila que se desea cambiar. Asegúrese de escribir primero en la operación, la fila que se desea modificar.
- Ejemplo:
  - R2+(-2)R1 – Reemplaza la segunda fila por la suma de ésta y -2 por la primera



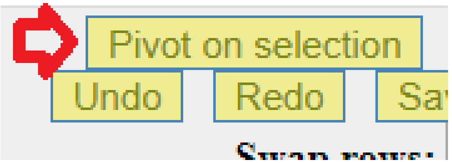
Row operation	x1	x2	x3	
	1	-2	3	4
R2+(-2)R1	2	1	-4	3
	-3	4	-1	-2



Row operation	x1	x2	x3	x4
	1	-2	3	4
R2+(-2)R1	0	5	-10	-5
	-3	4	-1	-2

“Matrix Pivot Tool” …p3

- ***Pivot on selection***: Permite convertir el valor en la celda donde está el cursor a 1. Además, los otros valores de esa columna a 0.



Row operation	x1	x2	x3	x4
	1	-2	3	4
	0	5	-10	-5
	-3	4	-1	-2

x1	x2	x3	x4
1	-2	3	4
0	5	-10	-5
0	-2	8	10

Row operation	x1	x2	x3	x4
	1	-2	3	4
	0	5	-10	-5
	0	-2	8	10

x1	x2	x3	x4
1	0	-1	2
0	1	-2	-1
0	0	4	8

Row operation	x1	x2	x3	x4
	1	0	-1	2
	0	1	-2	-1
	0	0	4	8

x1	x2	x3	x4
1	0	0	4
0	1	0	3
0	0	1	2

Solución: $x = 4, y = 3, z = 2$



Ejemplos

- Use el Matrix Pivot Tool para resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

$$\begin{bmatrix} x + 2y \quad\;\; = 2 \\ x + y + z = 1 \\ x \quad\; - 2z \; = 1 \end{bmatrix}$$

Solución:
$(1/2\,, 3/4, -1/4)$

$$\begin{bmatrix} x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{bmatrix}$$

Solución:
$(1, 3, -2)$

Sistemas Dependientes

Resuelva:

$$\begin{cases} x + y + z = 5 \\ 2x - 3y + 4z = 3 \\ 8x - 7y + 14z = 19 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7/5 & 18/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Cuando una fila de una matriz reducida resulta 0's , implica que el sistema es dependiente. Es decir, habrá infinita soluciones.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 7/5 & 18/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 7/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{array}{c} x = -y - \frac{7}{5}z + \frac{18}{5} \\ y = \frac{2}{5}z + \frac{7}{5} \\ z = \text{cualquier número} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} x = -(\frac{2}{5}z + \frac{7}{5}) - \frac{7}{5}z + \frac{18}{5} \\ y = \frac{2}{5}z + \frac{7}{5} \\ z = \text{cualquier número} \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} x = -\frac{9}{5}z + \frac{11}{5} \\ y = \frac{2}{5}z + \frac{7}{5} \\ z = \text{cualquier número} \end{array} \Rightarrow \left(-\frac{9}{5}z + \frac{11}{5},\ \ \frac{2}{5}z + \frac{7}{5},\ \ z\right)$$

Otra forma equivalente consiste de dejar que x sea cualquier número real y se expresa las demás en términos de x.

$$\left(x,\ \ \frac{-2}{9}x + \frac{16}{9},\ \ \frac{-5}{9}x + \frac{11}{9}\right)$$

Sistemas Inconsistentes

$$\begin{cases} 3x + 4y - z = 10 \\ x - y + z = 3 \\ 3x + 11y - 5z = 5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/7 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 3z/7 = 0 \\ y - 4z/7 = 0 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Cuando una fila de una matriz reducida resulta 0's excepto por el último término, implica que el sistema es inconsistente. Es decir, no habrá solución.

Ejercicio #6

1. Cuál de las siguientes representa la(s) solución(es) del sistema cuya matriz reducida es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

   a) (-3, 0, 2)
   b) No tiene solución
   c) (3-z, 1, 2)
   d) (x, 1, 2)

Solución es b)

2. Cuál de las siguientes representa la(s) solución(es) del sistema cuya matriz reducida es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

   a) (3, y, 2)
   b) No tiene solución
   c) (3, 0, 2)
   d) (3, 2)

Solución es a)

Ejercicios del Texto

Ejer. 1–22: Use matrices para resolver el sistema.

1 $\begin{cases} x - 2y - 3z = -1 \\ 2x + y + z = 6 \\ x + 3y - 2z = 13 \end{cases}$

2 $\begin{cases} x + 3y - z = -3 \\ 3x - y + 2z = 1 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$

3 $\begin{cases} 5x + 2y - z = -7 \\ x - 2y + 2z = 0 \\ 3y + z = 17 \end{cases}$

4 $\begin{cases} 4x - y + 3z = 6 \\ -8x + 3y - 5z = -6 \\ 5x - 4y = -9 \end{cases}$

5 $\begin{cases} 2x + 6y - 4z = 1 \\ x + 3y - 2z = 4 \\ 2x + y - 3z = -7 \end{cases}$

6 $\begin{cases} x + 3y - 3z = -5 \\ 2x - y + z = -3 \\ -6x + 3y - 3z = 4 \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x - 3y + 2z = -3 \\ -3x + 2y + z = 1 \\ 4x + y - 3z = 4 \end{cases}$

8 $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2 \\ 3x + 2y - z = -5 \\ 5x - 2y + z = 0 \end{cases}$

9 $\begin{cases} x + 3y - z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \\ -2x + y + 3z = 0 \end{cases}$

10 $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x - y - 2z = 0 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$

11 $\begin{cases} x + 3y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ x - 2y - 4z = 0 \end{cases}$

12 $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ x - y - 4z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$

13 $\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ x - 2y - 2z = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$

14 $\begin{cases} x + 2y - 2z = 4 \\ -x - 3y + 2z = -6 \\ 2x + y - 4z = 2 \end{cases}$

15 $\begin{cases} 3x + 13y + 5z = 7 \\ x + 4y - z = -2 \end{cases}$

16 $\begin{cases} 2x - y + 4z = 8 \\ -3x + y - 2z = 5 \end{cases}$

17 $\begin{cases} 4x - 2y + z = 5 \\ 3x + y - 4z = 0 \end{cases}$

18 $\begin{cases} 5x + 2y - z = 10 \\ y + z = -3 \end{cases}$

19 $\begin{cases} 5x + 2z = 1 \\ y - 3z = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

20 $\begin{cases} 2x - 3y = 12 \\ 3y + z = -2 \\ 5x - 3z = 3 \end{cases}$

21 $\begin{cases} 4x - 3y = 1 \\ 2x + y = -7 \\ -x + y = -1 \end{cases}$

22 $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ x + y = 1 \\ x - 2y = 13 \end{cases}$

23 $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - 3y = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$

24 $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$