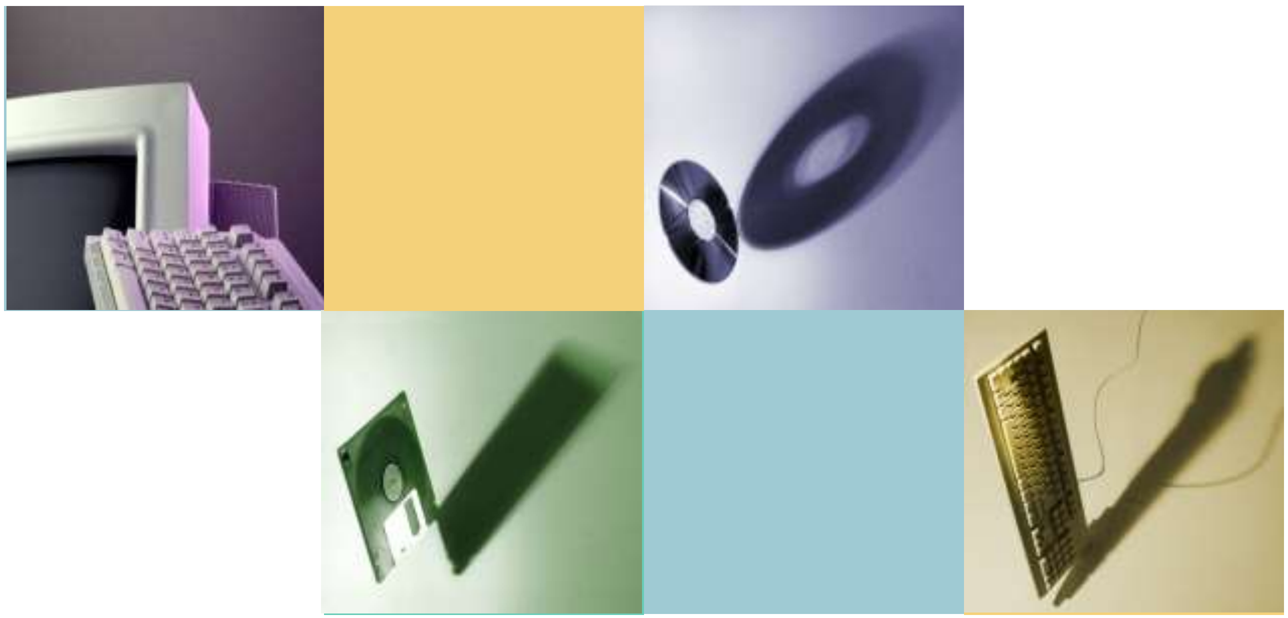
MATE3012 – Lección 3.2



Álgebra de Matrices

Actividades 3.1

- **Texto:** Sección 9.6 Álgebra de Matrices – Ejercicios de práctica: Página 643-644; Ejercicios 1 - 32 .
- **Referencias del Web:**
  - **Math2Me:** Localizar elementos de una matriz; Hallar valores x,y en una matriz 2x2; Multiplicación por un escalar en una matriz; Como SUMAR y RESTAR matrices; Hallar el valor de la matriz 2A-3B; Multiplicación de matrices
  - **Youtube:** Operaciones con matrices; Producto de Matrices Ejemplo 1; Producto de Matrices Ejemplo 2 **.**
  - **Thales.cica:** Matrices, Determinantes y Cálculo con matrices – Indice
  - **AulaFácil.com –** Matrices y Determnantes

Igualdad de Matrices

Si dos matrices son iguales, cada elemento correspondientes son iguales. Esto es, si

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$a = 5$ $\quad b =$-1

$c = -3$ $\quad d = 7$

$e = 0$ $\quad f = 8$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ -2 & y \\ 0 & 3z-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$2x = 6$

$x = 3$

$y = -9$

$3z - 1 = 1$

$3z = 2$

$z = \dfrac{2}{3}$

Adición y Sustracción de Matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 12 & -4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}. \text{Encuentre: (a) } A + B \quad \text{(b) } A - B$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5+3 & -1+(-2) \\ -3+12 & 7+(-4) \\ 0+6 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 9 & 3 \\ 6 & 17 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 5-3 & -1-(-2) \\ -3-12 & 7-(-4) \\ 0-6 & 8-9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -15 & 11 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Para sumar dos matrices estas deben tener el mismo número de filas y columnas1

Multiplicación escalar

- Sea c un número constante (escalar) y A una matriz de dimensión m x n. Entonces, el producto escalar:

$$cA = c\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \cdots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \cdots & ca_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \cdots & ca_{mn} \end{bmatrix}$$

Ejemplo:

Calcule -2A + 3B dado que $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathrm{B} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$

$$-2\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & -15 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -15 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones con matrices

- Resuelva la ecuación matricial $2X + A = B$ dado que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\ y\ \ X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

Solución:

$$2X + A = B$$

$$2X + A - A = B - A$$

$$2X = B - A$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2X = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot (B - A)$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right)$$

$$X = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$X = \begin{bmatrix} \frac{-1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Ejemplo 2

- Tres vendedores, Báez, Matos y Ruiz, venden dos modelos de autos: básico o deportivo. Si las matrices a la derecha muestran la ventas del mes de agosto y del mes de septiembre,

a) ¿Cuál será las ventas totales de cada modelo por vendedor en los dos meses?

b) ¿Cuál es la diferencia en las ventas de cada modelo por vendedor en los dos meses?

c) Si ambos vendedores reciben una comisión de 5% de sus ventas, calcule la comisión de cada vendedor por modelo vendido en el mes de septiembre.

d) ¿Cuál fue la comisión de Matos en septiembre por el modelo deportivo?

$$\text{Ventas de agosto}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \end{array}$$

$$A = \begin{bmatrix} 54{,}000 & 85{,}000 \\ 115{,}000 & 0 \\ 104{,}000 & 63{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Báez} \\ \text{Matos} \\ \text{Ruiz} \end{array}$$

$$\text{Ventas de septiembre}$$

$$\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 114{,}000 & 285{,}000 \\ 194{,}000 & 312{,}000 \\ 145{,}000 & 78{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Báez} \\ \text{Matos} \\ \text{Ruiz} \end{array}$$

Solución del Ejemplo 2 – (a)

a) ¿Cuál será las ventas totales de cada modelo por vendedor en los dos meses?

$$\overset{\text{Ventas de agosto}}{\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \\ \end{array}} \quad \overset{\text{Ventas de septiembre}}{\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \\ \end{array}} \quad \overset{\text{Ventas de agosto y septiembre}}{\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \\ \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 54{,}000 & 85{,}000 \\ 115{,}000 & 0 \\ 104{,}000 & 63{,}000 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 114{,}000 & 285{,}000 \\ 194{,}000 & 312{,}000 \\ 145{,}000 & 78{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 168{,}000 & 370{,}000 \\ 309{,}000 & 312{,}000 \\ 249{,}000 & 141{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Báez} \\ \text{Matos} \\ \text{Ruiz} \end{array}$$

b) ¿ Cuál es la diferencia en las ventas de cada modelo por vendedor en los dos meses?

$$\overset{\text{Ventas de septiembre}}{\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \\ \end{array}} \quad \overset{\text{Ventas de agosto}}{\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \\ \end{array}} \quad \overset{\text{Aumento en ventas}}{\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \\ \end{array}}$$

$$\begin{bmatrix} 114{,}000 & 285{,}000 \\ 194{,}000 & 312{,}000 \\ 145{,}000 & 78{,}000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 54{,}000 & 85{,}000 \\ 115{,}000 & 0 \\ 104{,}000 & 63{,}000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60{,}000 & 200{,}000 \\ 79{,}000 & 312{,}000 \\ 41{,}000 & 15{,}000 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Báez} \\ \text{Matos} \\ \text{Ruiz} \end{array}$$

Solución del Ejemplo 2 – (c) y (d)

c) Si ambos vendedores reciben una comisión de 5% de sus ventas, calcule la comisión de cada vendedor por cada modelo vendido en el mes de septiembre.

$$
\begin{array}{c}
\text{Ventas de septiembre} \\
\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \end{array} \\
0.05\begin{bmatrix} 114{,}000 & 285{,}000 \\ 194{,}000 & 312{,}000 \\ 145{,}000 & 78{,}000 \end{bmatrix}
\end{array}
=
\begin{array}{c}
\text{Comisión en ventas} \\
\begin{array}{cc} \text{Básico} & \text{Deportivo} \end{array} \\
\begin{bmatrix} 5{,}700 & 14{,}250 \\ 9{,}700 & 15{,}600 \\ 7{,}250 & 3{,}900 \end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l} \\ \\ \text{Báez} \\ \text{Matos} \\ \text{Ruiz} \end{array}
$$

d) ¿Cuál fue la comisión de Matos en septiembre por el modelo deportivo?

$$\$15{,}600$$

Multiplicación de un vector fila por vector columna

Considere la matriz $1 \times n$ $R = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix}$ y la matriz $n \times 1$ $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix}$. La primera matriz se llama un "vector fila" y la segunda un "vector columna".

El vector producto RC $= \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot\cdot \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1c_1 + r_2c_2 & \ldots\ldots & + r_nc_n \end{bmatrix}$

Recuerde:

1. El vector fila tiene que tener el **mismo número *n* de columnas que filas** tiene el vector columna

2. El vector producto es **un vector 1 x 1**

Ejemplo 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2\times 2 + 1\times -3 + 1\times -1 + -1\times 0]$$

$$= [4 - 3 - 1 + 0] = [0]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2 + -2 + 1] = [-3]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [3 - 2 + 0 + -2] = [-1]$$

Multiplicación de matrices

- Sea A una matriz m x $\mathbf{r}$, B una matriz $\mathbf{r}$ x n. La matriz producto AB está definida como la matriz m x n cuyos elementos en la fila i, columna j es el producto del vector fila i de A por el vector columna j de B
- Ejemplo: Encuentre el producto de AB:

$$A=\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

- Tres (3)Pasos recomendados para multiplicar:
  1. Verifique que se pueda realizar producto –
     - Número de Columnas de A es **2**
     - Número de Final de B es **2**.
  2. Determine dimensión de la matriz producto.
     - Número de filas de A es 3
     - Número de columnas de B es 3
     - Dimensión de matriz producto es m x n: **3 x 3**

Ejemplo 5

- 3. Realice la operación:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7\cdot 1+1\cdot 3 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ -2\cdot 1+0\cdot 3 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ 3\cdot 1+5\cdot 3 & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ -2 & \_\_\_ & \_\_\_ \\ 18 & \_\_\_ & \_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 7\cdot -4+1\cdot 8 & \_\_\_ \\ -2 & -2\cdot -4+0\cdot 8 & \_\_\_ \\ 18 & 3\cdot -4+5\cdot 8 & \_\_\_ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & \_\_\_ \\ -2 & 8 & \_\_\_ \\ 18 & 28 & \_\_\_ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -20 & 7\cdot -6+1\cdot 5 \\ -2 & 8 & -2\cdot -6+0\cdot 5 \\ 18 & 28 & 3\cdot -6+5\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -37 \\ -2 & 8 & 12 \\ 18 & 28 & 7 \end{bmatrix}$$

Ejercicios de clase

- Encuentre la dimensión de la matriz producto AB, si existe, dado que las dimensiones de A y B son:

A	B	AB
2×3	3×1	2×1
4×2	2×3	4×3
3×2	3×3	*no está definida*

- Encuentre el producto de AB:

1.
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 & -1 \\ 5 & 15 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 12 \end{bmatrix}$$

Multiplicación de matrices no es conmutativa

- Se A, B dos matrices. Entonces, $AB \neq BA$
- Observe:

Sean $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 2 \times 1 & \underline{\qquad\qquad} \\ -1 \times 1 + -1 \times 1 & \underline{\qquad\qquad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & \underline{\qquad\qquad} \\ -2 & \underline{\qquad\qquad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 2 \times 2 + 2 \times 2 \\ -2 & -1 \times 2 + -1 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 2 + 2 \times -1 & \underline{\qquad\qquad} \\ 1 \times 2 + 2 \times -1 & \underline{\qquad\qquad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \underline{\qquad\qquad} \\ 0 & \underline{\qquad\qquad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \times 2 + 2 \times -1 \\ 0 & 1 \times 2 + 2 \times -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB \neq BA$$



Ejercicios del Texto - p1

Ejer. 1-8: Encuentre, si posible, $A + B$, $A - B$, $2A$, y $-3B$.

1 $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

2 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

3 $A = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 2 & 0 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \\ 6 & 0 \end{bmatrix}$

4 $A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 5 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

5 $A = [4 \quad -3 \quad 2]$, $B = [7 \quad 0 \quad -5]$

6 $A = \begin{bmatrix} 7 \\ -16 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -11 \\ 9 \end{bmatrix}$

7 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ -3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

8 $A = [2 \quad 1]$, $B = [3 \quad -1 \quad 5]$

Ejer. 9–12: Si

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 16 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 9 & -3 \\ 12 & 0 \end{bmatrix}, \text{ y } C = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix},$$

encuentre C para la ecuación matricial.

9 $2C = A$

10 $-3C = B$

11 $A + C = B$

12 $A - C = B$

Ejercicios del Texto – p2

Ejer. 13–14: Encuentre el elemento dado del producto matricial $C = AB$ en el ejercicio citado.

13 c_{21}; ejercicio 19 14 c_{23}; ejercicio 22

Ejer. 15–28: Encuentre, si es posible, AB y BA.

15 $A = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$

16 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

17 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$

18 $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

19 $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

20 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

21 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 7 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

26 $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$

27 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

28 $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

Ejer. 29–32: Encuentre AB.

29 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$

30 $A = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}$

31 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ -7 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \\ -3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

32 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \end{bmatrix}$