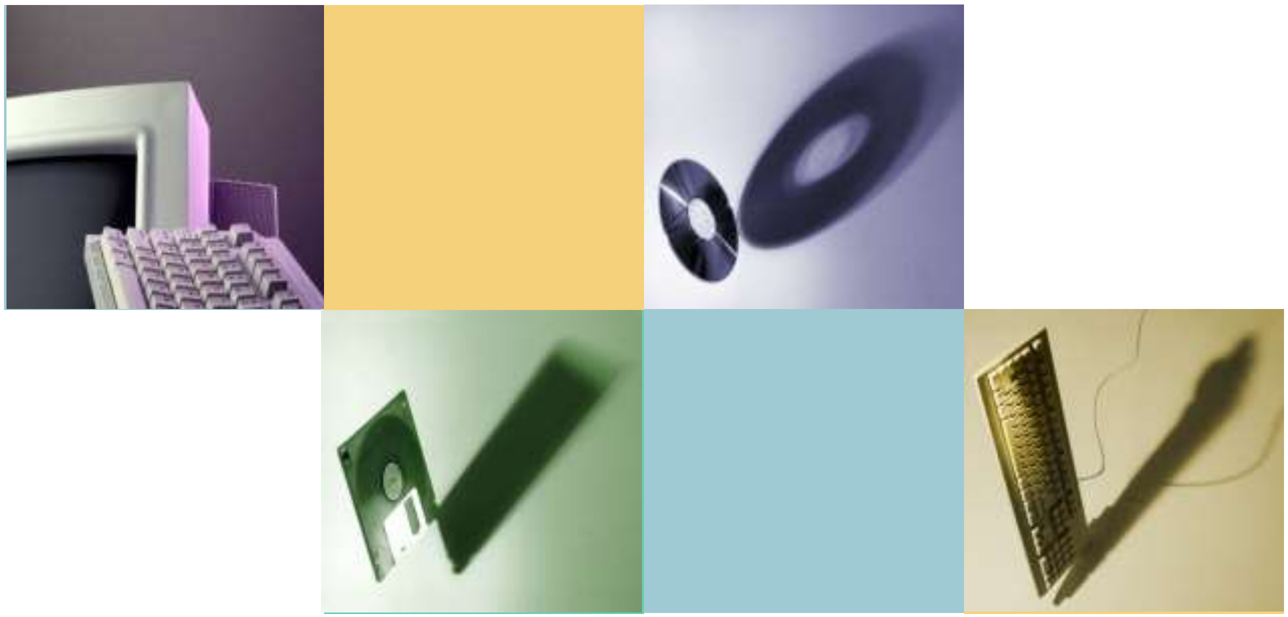
Lección 4.1



Variación

Actividades

- Referencia del Texto: Sección 4.6 - Variación
- Ejercicios de Práctica: Páginas 285-287: Impares 1 – 20
- Referencias en el Web
  - Math2Me:
    - Intro a la regla de tres simple | directa e inversa
    - Regla de tres simple | variación directa
    - Regla de tres simple | variación inversa 1
  - Razones y proporciones; Portal de Educar Chile
  - Proporcionalidad, Ejercicios de Matemáticas; Portal de emathematics.net

Razón

- Una razón de a y b es una comparación de estas cantidades expresadas como:

$$a : b \qquad \frac{a}{b}$$

a, b son números reales distintos de 0

- Ejemplos:
  - La razón de estudiantes varones y féminas es de 3:4.
  - El costo de impresión es de 400 ejemplares por $50.
  - La velocidad de un carro es de 65 millas por hora

Proporción

- Una proporción es una igualdad entre dos razones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- Ejemplo:
  - La razón de estudiantes varones y féminas es de 3:4. Si en el recinto hay 650 varones, aproximadamente ¿cuántos féminas habrán?

$$\frac{Varones}{Féminas} \quad \frac{3}{4} = \frac{650}{x}$$

$$x = \frac{(650)(4)}{3}$$

$$x \approx 866.6666667 \approx 867$$

Habrán aproximadamente 867 féminas.

Variación directa

- Dos magnitudes varían directamente si al aumentar una también lo hace la otra y viceversa
- Ejemplos:
  - El tamaño de un recipiente y el número de litros que puede contener.
  - La edad de una persona y su altura.
  - La profundidad que uno desciende en un cuerpo de agua y la presión del agua que siente.
  - El dinero recaudado y el número de taquiilas vendidas para un concierto.
  - La circunferencia de un círculo y su radio

Proporción directa

- Dos variables y, x ***directamente proporcional*** si para un valor constante k:

$$y = k\,x$$

  - k se llama la constante de proporcionalidad.
  - También se dice que y es *varía directamente* a x.
- Ejemplos:
  - El dinero (R) recaudado cuando se venden n taquillas a $\$2.50$ cada una.

$$R = 2.50n$$

    La constante de proporcionalidad es 2.50
  - La circunferencia C de un círculo es directamente proporcional a su radio r:

$$C = 2\pi r$$

    La constante de proporcionalidad es 2π

Ejemplo 2 – Proporción directa

- Suponga que la variable z *varía directamente a* q. Encuentre una ecuación que las relaciona si el valor de $z = 56$ cuando $q = 7$.
- Solución:
- Sea k es la constante de proporcionalidad. Entonces

$$z = kq$$

Si $z = 56$ cuando $q = 7$

$$(56) = k(7)$$
$$8 = k$$

Por lo tanto la ecuación es:

$$z = 8q$$

Variación inversa

- Dos magnitudes varían inversamente, si al aumentar una la otra disminuye y viceversa
- Ejemplos:
  - La cantidad de animales en una granja y la cantidad almacenada de su alimento.
  - El tiempo que toma para construir una pared y el número de albañiles contratados para ese proyecto.
  - La altura sobre el nivel de la tierra y la presión atmosférica en esa altura.
  - La velocidad que viaja un carro entre dos puntos en un expreso y el tiempo que le toma por ese viaje.

Proporción inversa

- Dos variables y, x son ***inversamente proporcional*** si para un valor constante k:

$$y = \frac{k}{x}$$

  - k se llama la constante de proporcionalidad
  - También se dice que y es *varía inversamente* a x
- Ejemplo:
- La **Ley de Boyle** establece que cuando un gas se comprime a una temperatura constante, la presión P del gas varía inversamente a su volumen V.

$$\mathrm{P} = \frac{k}{V}$$

La constante de proporcionalidad es k

Ejemplo 3

- Suponga que la presión de una muestra de gas ocupa 0.1m^3 (metros cúbicos) a una temperatura de 30 C^{o} (centígrados) tiene una presión de 40 kPa (*kilopascal*). Entonces:

a) Determine la constante de proporcionalidad.

b) Si la muestra expande a un volumen de 0.5 m^3, estime la nueva presión (asuma que se mantuvo temperatura de 30 C^{o} .

- Solución 3a):
- Sea P, V la presión y volumen del gas. Entonces,

$$\mathrm{P} = \frac{k}{V}$$

$$(40) = \frac{k}{(0.1)} \Rightarrow k = 4$$

Solución del Ejemplo 3b

- Sea P, V la presión y volumen del gas. Entonces,

$$P = \frac{4}{V}$$

- Si el gas ocupa $0.5m^3$, entonces

$$P = \frac{4}{0.5}$$

$$P = 8$$

- La presión del gas cuando el volumen es $0.5m^3$, es 8 kPa.

Combinación de Proporciones

Sea y, x, z variables. Entonces:

- z es ***conjuntamente proporcional*** a x, y si para un valor constante k:

  $$z = kxy$$

  Es decir, cuando z es *directamente proporcional* a x tanto como a y simultáneamente.

- z es ***directamente proporcional*** a x, ***inversamente proporcional*** a y si para un valor constante k:

  $$z = k\frac{x}{y}$$

Ejemplo 4

- Una variable w varía directamente con el producto de las variables u y v e inversamente con el cuadrado de la variable s.

a) Si $w = 20$, cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, encuentre la constante de variación.

b) Encuentre el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$. Redondee su respuesta dos lugares decimales.

Solución:

Una fórmula general para w será:

$$w = k \cdot \frac{uv}{s^2}$$

Solución del Ejemplo 4a

a) Si $w = 20$, cuando $u = 3$, $v = 5$ y $s = 2$, encuentre la constante de variación.

$$w = k \cdot \frac{uv}{s^2}$$

$$(20) = k \cdot \frac{(3)(5)}{(2)^2}$$

$$\frac{4}{15} \cdot 20 = k \cdot \frac{15}{4} \cdot \frac{4}{15}$$

$$\frac{16}{3} = k$$

Solución del Ejemplo 4b

b) Encuentre el valor de w cuando $u = 7$, $v = 4$ y $s = 3$. Redondee su respuesta dos lugares decimales.

$$w = k \cdot \frac{uv}{s^2}$$

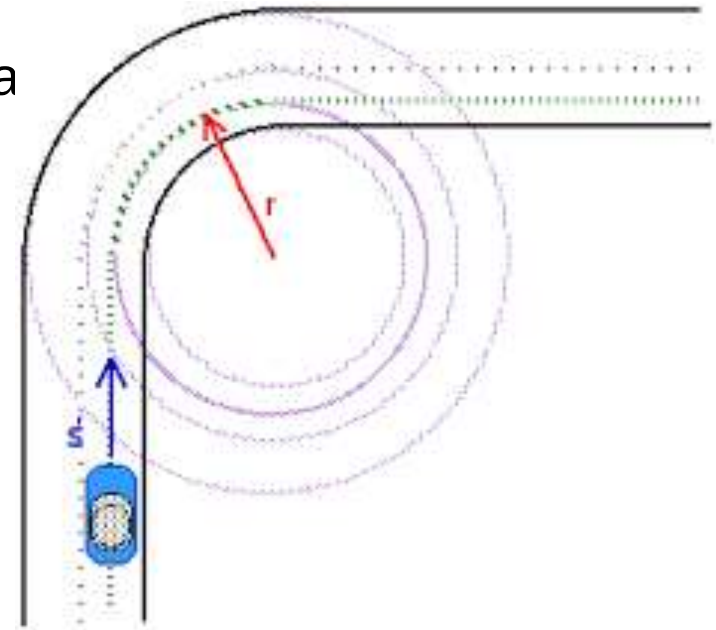
$$w = \left(\frac{16}{3}\right) \cdot \frac{(7)(4)}{(3)^2}$$

$$w = \frac{448}{27} \approx 16.59259259$$

$$\approx 16.59$$

Ejemplo 5

- Un automóvil se mueve por una curva que forma un arco circular. La fuerza F necesaria para evitar que el vehículo se deslice es conjuntamente proporcional con su peso w y el cuadrado de su velocidad s, e inversamente proporcional con el radio r de la curva.



a) Escriba una ecuación que exprese esta relación.

- F es la fuerza es directamente proporcional al peso w y el cuadrado de la velocidad s.
- F inversamente proporcional al radio r de la curva

$$F = k\frac{ws^2}{r}$$

Solución del Ejemplo 5b

b) Un automóvil que pesa 1600 lb. viajó por una curva a 60 MPH sin deslizarse. Si otro automóvil que pesa 2500 lbs uso la misma fuerza que el primero para viajar por la curva sin deslizarse, ¿cuán rápido viajaba?

Se sabe que el automóvil que viajó a 60 mph pesa $1600\ lb$

$$w = 1600$$
$$s = 60$$

El otro automóvil cuya velocidad se desea determinar pesa $2500\ lb$

$$w = 2500\ lb$$
$$s = ?$$

La fuerza F que evita que ambos se deslicen **es igual** y está dado por:

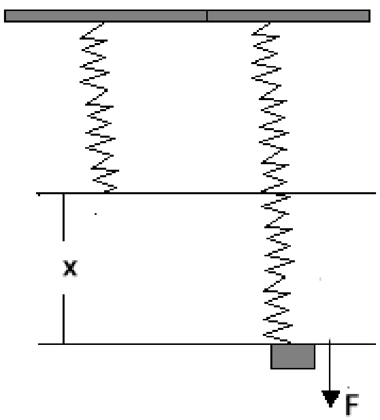
$$F = k\frac{ws^2}{r} = \cancel{k}\frac{(1600)(60)^2}{\cancel{r}} = \cancel{k}\frac{(2500)(s)^2}{\cancel{r}} \Rightarrow (1600)(60)^2 = (2500)s^2$$

$$(1600)(60)^2 = (2500)s^2$$
$$2304 = s^2$$
$$s = 48 \text{ mph}$$

Ejercicios de clase

1. Escriba una oración que exprese ***W*** conjuntamente proporcional a ***m*** y ***n*** e inversamente proporcional al cuadrado de ***t***.
2. $\boldsymbol{H}$ es directamente proporcional a $\boldsymbol{s}$ e inversamente proporcional al cuadrado de $\boldsymbol{t}$. Exprese el enunciado como una ecuación y determine el(los) valor(es) de t cuando $H = 20$, $s = 5$ y la constante de proporcionalidad es 4.

3. La ley de Hooke establece que la fuerza necesaria para mantener un resorte estirado x unidades más allá de su longitud natural es directamente proporcional a x. En este caso la constante de proporcionalidad se denomina constante del resorte. Exprese la Ley de Hooke a través de una ecuación.



Soluciones

1. $$W = k\frac{mn}{t^2}$$

2. $$H = k\frac{s}{t^2} \Longrightarrow 20 = 4\frac{5}{t^2}$$

$$t^2 = 1$$

$$t = \pm 1$$

3. $$F = kx$$

Ejercicios del Texto p1

Ejer. 1–16: Exprese el enunciado como una fórmula que contenga las variables dadas y una constante de proporcionalidad k, y luego determine el valor de k a partir de las condiciones dadas.

1 u es directamente proporcional a v. Si $v = 30$, entonces $u = 12$.

2 s varía directamente con t. Si $t = 10$, entonces $s = 18$.

3 V varía directamente con el cubo de r. Si $r = 3$, entonces $V = 36\pi$.

4 S es directamente proporcional al cuadrado de x. Si $x = 2$, entonces $S = 24$.

5 r varía directamente con s e inversamente con t. Si $s = -2$ y $t = 4$, entonces $r = 7$.

6 w varía directamente con z e inversamente con la raíz cuadrada de u. Si $z = 2$ y $u = 9$, entonces $w = 6$.

7 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 5$ y $z = 3$, entonces $y = 25$.

8 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional al cuadrado de z. Si $x = 4$ y $z = 3$, entonces $y = 16$.

9 z es directamente proporcional al producto del cuadrado de x y al cubo de y. Si $x = 7$ y $y = -2$, entonces $z = 16$.

10 z es directamente proporcional al producto de x y y a la raíz cúbica de y. Si $x = 2$ y $y = 8$, entonces $z = 12$.

11 z es directamente proporcional al producto de x y y e inversamente proporcional a la raíz cúbica de w. Si $x = 6$, $y = 4$ y $w = 27$, entonces $z = 16$.

12 r es directamente proporcional al producto de s y v e inversamente proporcional al cubo de p. Si $s = 2$, $v = 3$ y $p = 5$, entonces $r = 40$.

13 q es inversamente proporcional a la suma de x y y. Si $x = 0.5$ y $y = 0.7$, entonces $q = 1.4$.

14 y es directamente proporcional a x e inversamente proporcional a la suma de r y s. Si $x = 3$, $r = 5$ y $s = 7$, entonces $y = 2$.

15 y es directamente proporcional a la raíz cuadrada de x e inversamente proporcional al cubo de z. Si $x = 9$ y $z = 2$, entonces $y = 5$.

16 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z. Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.

Ejercicios del Texto p2

16 y es directamente proporcional al cuadrado de x e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de z. Si $x = 5$ y $z = 16$, entonces $y = 10$.

17 **Presión de un líquido** La presión P que actúa en un punto en un líquido es directamente proporcional a la distancia d desde la superficie del líquido al punto.

(a) Exprese P como función de d por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

(b) En cierto tanque de petróleo, la presión a una profundidad de 2 pies es 118 lb/ft^2. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Encuentre la presión a una profundidad de 5 pies para el tanque de petróleo del inciso (b).

(d) Trace una gráfica de la relación entre P y d para $d \geq 0$.

18 **Ley de Hooke** La ley de Hooke expresa que la fuerza F necesaria para estirar un resorte x unidades más que su longitud natural es directamente proporcional a x.

(a) Exprese F como función de x por medio de una fórmula que contenga una constante de proporcionalidad k.

19 **Resistencia eléctrica** La resistencia eléctrica R de un alambre varía directamente con su longitud l e inversamente con el cuadrado de su diámetro d.

(a) Exprese R en términos de l, d y una constante de variación k.

(b) Un alambre de 100 pies de largo y 0.01 pulgadas de diámetro tiene una resistencia de 25 ohms. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Trace una gráfica de la relación entre R y d para $l = 100$ and $d > 0$.

(d) Encuentre la resistencia de un alambre hecho del mismo material que tiene un diámetro de 0.015 pulgadas y mide 50 pies de largo.

20 **Intensidad de iluminación** La intensidad de iluminación I de una fuente de luz varía inversamente con el cuadrado de la distancia d desde la fuente.

(a) Exprese I en términos de d y una constante de variación k.

(b) Un reflector tiene una intensidad de 1,000,000 candelas de potencia a una distancia de 50 pies. Encuentre el valor de k del inciso (a).

(c) Trace una gráfica de la relación entre I y d para $d > 0$.

(d) Aproxime la intensidad del reflector del inciso (b) a una distancia de 1 milla.