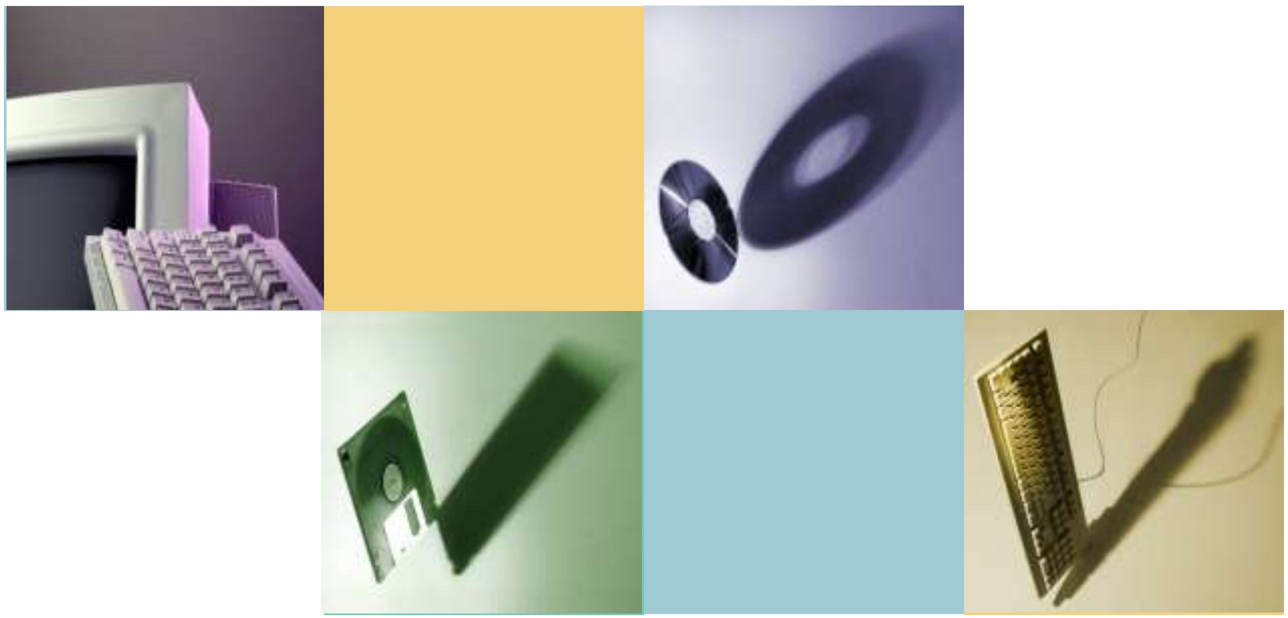
Lección 4.2



Sucesiones Infinitas y Notación de Suma

Actividades

- Referencia del Texto:
  - Sección 10.1 – Sucesiones infinitas y notación de suma; ejercicios de práctica: 1 – 14, 21-26, 37-52
  - Sección 10.2 Sucesiones Aritméticas; Ejercicios de prácticas:1- 10; 25-30
  - Sección 10.3 Sucesiones Geométricas; Ejercicios 1 -10
- Referencias en el Web
- Math2Me:
  - Obtener secuencias aritméticas
  - Sucesiones aritméticas
  - Sucesiones aritméticas | ejercicio 1
  - Sucesiones aritméticas | ejercicio 5
  - Serie aritmética
  - Series aritméticas | fórmula para sumar
  - Sucesión geométrica
  - Sucesión geométrica | problema 1

Sucesión infinita

- Una **sucesión inifinita** es una función cuyo dominio es el cojunto de enteros positivos.

$$a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n, \ldots.$$

- Ejemplos:

$$2, 4, 8, 16, 32 \ldots \Leftrightarrow 2^1, 2^2, 2^3, \ldots., 2^n, \ldots. \Leftrightarrow \{2^n\}$$

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \Leftrightarrow \frac{1}{2}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \ldots \Leftrightarrow \left\{\frac{n}{n+1}\right\}$$

$$\{2 + (0.1)^n\} \Leftrightarrow 2.1, 2.01, 2.001, 2.0001, \ldots$$

Ejemplo 1

- Determine los primeros cuatro términos y el octavo término de la sucesión $\left\{\frac{3}{5n-2}\right\}$.
- Solución:

$$\left\{\frac{3}{5n-2}\right\} \Longleftrightarrow$$

$$\frac{3}{5(1)-2} = 1$$

$$\frac{3}{5(2)-2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{5(3)-2} = \frac{3}{13}$$

$$\frac{3}{5(4)-2} = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$$

El octavo término será cuando $n = 8$

$$\frac{3}{5(8)-2} = \frac{3}{38}$$

Sucesiones definidas en forma recursiva

- Ejemplo: Determine los primeros cuatro términos y el n-ésimo término de la sucesión definida en forma recursive como sigue.

$$a_1 = 3, a_{k+1} = 2a_k, \text{ para } k \geq 1$$

- Solución:

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 2a_1 = 2 \cdot 3 = 6 \qquad \text{para } k = 1$$

$$a_3 = 2a_2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3 = 12 \qquad \text{para } k = 2$$

$$a_4 = 2a_3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 2^3 \cdot 3 = 24 \qquad \text{para } k = 3$$

El n-ésimo término $a_n = 2^{n-1} \cdot 3$

Ejemplo 2

- Determine los tres términos siguientes de la sucesión definida en forma recursive como sigue.

$$a_1 = 4, a_2 = 7, a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k, \text{ para } k \geq 1$$

- Solución:

Deseamos determinar $a_3, a_4, a_5 \;\; si \;\; a_{k+2} = 3a_{k+1} - 2a_k$

$$a_3 = 3a_2 - 2a_1 = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 4 = 13 \qquad \text{para } k = 1$$

$$a_4 = 3a_3 - 2a_2 = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 7 = 25 \qquad \text{para } k = 2$$

$$a_5 = 3a_4 - 2a_3 = 3 \cdot 25 - 2 \cdot 13 = 49 \qquad \text{para } k = 3$$

los tres términos siguientes son: $13, 25\ 49$

Ejercicios del Texto p1

Ejercicios: 1 -16: Encuentre los primeros cuatro términos y el octavo término de la sucesión:

1 $\{12 - 3n\}$

2 $\left\{\dfrac{3}{5n - 2}\right\}$

3 $\left\{\dfrac{3n - 2}{n^2 + 1}\right\}$

4 $\left\{10 + \dfrac{1}{n}\right\}$

5 $\{9\}$

6 $\{\sqrt{2}\}$

7 $\{2 + (-0.1)^n\}$

8 $\{4 + (0.1)^n\}$

9 $\left\{(-1)^{n-1}\dfrac{n + 7}{2n}\right\}$

10 $\left\{(-1)^n\dfrac{6 - 2n}{\sqrt{n + 1}}\right\}$

11 $\{1 + (-1)^{n+1}\}$

12 $\{(-1)^{n+1} + (0.1)^{n-1}\}$

13 $\left\{\dfrac{2^n}{n^2 + 2}\right\}$

14 $\{(n - 1)(n - 2)(n - 3)\}$

Ejercicios: 21 -26: Encuentre los primeros cinco términos de la sucesión:infiniita definida eb forma recursiva

21 $a_1 = 2, \quad a_{k+1} = 3a_k - 5$

22 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = 7 - 2a_k$

23 $a_1 = -3, \quad a_{k+1} = a_k^2$

24 $a_1 = 128, \quad a_{k+1} = \frac{1}{4}a_k$

25 $a_1 = 5, \quad a_{k+1} = ka_k$

26 $a_1 = 3, \quad a_{k+1} = 1/a_k$

Notación Suma

- Sea $a_1, a_2, a_3, \dots., a_n, \dots.$ una sucesión infinita. Entonces, la suma de sus primeros m términos se puede representar por:

$$\sum_{k=1}^{m} a_k \quad = a_1 + a_2 + a_3 + \ \dots + a_m$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}\sum_{x=1}^{5}(x^2-1) &= (1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1)+(5^2-1)\\ &= (0) + (3) + (8) + (15) + (24)\\ &= {\color{red}50}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k^2(k-3) &= 1^2(1-3)+2^2(2-3)+3^2(3-3)+4^2(4-3)\\ &= (-2) + (-4) + (0) + (16)\\ &= {\color{red}10}\end{aligned}$$

Propiedades de sumas

- Sean $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ y $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ sucesiones infinitas, entonces para todo entero positivo n:

$$\sum_{k=1}^{n} c = nc \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \qquad \sum_{k=1}^{n} c a_k = c\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) \text{ para todo número real } c$$

Ejemplo:

$$\sum_{i=1}^{10} (2i - 5) = \sum_{i=1}^{10} (2i) - \sum_{i=1}^{10} (5)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{10} (i) - 5(10)$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) - 50$$

$$= 110 - 50 = 60$$

Ejercicios del Texto p2

Ejer. 37–52: Encuentre la suma.

37 $\sum_{k=1}^{5} (2k - 7)$

38 $\sum_{k=1}^{6} (10 - 3k)$

39 $\sum_{k=1}^{4} (k^2 - 5)$

40 $\sum_{k=1}^{10} [1 + (-1)^k]$

41 $\sum_{k=0}^{5} k(k - 2)$

42 $\sum_{k=0}^{4} (k - 1)(k - 3)$

43 $\sum_{k=3}^{6} \frac{k - 5}{k - 1}$

44 $\sum_{k=1}^{6} \frac{3}{k + 1}$

45 $\sum_{k=1}^{5} (-3)^{k-1}$

46 $\sum_{k=0}^{4} 3(2^k)$

47 $\sum_{k=1}^{100} 100$

48 $\sum_{k=1}^{1000} 5$

49 $\sum_{k=253}^{571} \frac{1}{3}$

50 $\sum_{k=137}^{428} 2.1$

51 $\sum_{j=1}^{7} \frac{1}{2} k^2$

52 $\sum_{k=0}^{5} (3j + 2)$

Sucesiones Aritméticas

- Sea $a_1, a_2, a_3, \dots., a_n, \dots.$ una sucesión infinita. Entonces, es una **sucesión aritmética** si hay un número real d tal que para todo entero positivo k:

$$a_{k+1} = a_k + d$$

El número $\mathrm{d} = a_{k+1} - a_k$ se denomina la diferencia común de la sucesión.

Ejemplos:

$-3, 2, 7, 12, \dots 5n - 8$ tiene como diferencia común 5

$17, 10, 3, -4, \dots 24 - 7n$ tiene como diferencia común -7

Ejemplo 3

- Demuestre que la siguiente sucesión es una sucesuón aritmética y encuentre la diferencia común:

$$1, 4, 7, 10, \ldots, 3n - 2, \ldots$$

Solución:

Si $a_n = 3n - 2$, entonces para todo entero positive k

$$a_{k+1} - a_k = [3(k+1) - 2] - [3k - 2]$$

$$= [3k + 3 - 2] + [-3k + 2]$$

$$= 3$$

De modoque que la sucesión es aritmética y la diferencia común es 3

Fórmula para el n-ésimo término Sucesiones Aritméticas

- Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n, \ldots.$ una sucesión **aritmética** donde n, k son enteros positivos y d es la **diferencia común**. Entonces, el n-ésimo término está dado por cualquiera de las dos formulas siguientes:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

Ejemplo:

Los primeros tres términos de una sucesión aritmética son: $20,\ 16.5$ y 13. Encuentre el decimoquinto término

La diferencia común $d = a_2 - a_1 = 16.5 - 20 = -3.5$

El decimoquinto término:

$$a_{15} = (20) + \big((15) - 1\big)(-3.5)$$

$$= 20 - 49 = -29$$

Fórmula para la Suma Parcial
Sucesión Aritmética

- Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión **aritmética** donde n son enteros positivos y d la diferencia común. Entonces, la suma de los primeros n términos (n-ésima suma parcial) S_n está dada por cualquiera de las dos formulas siguientes:

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) \qquad S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$$

Ejemplo:

Encuentre la suma de todos los enteros pares del 2 al 100

Solución:

Es equivalente a determinar la suma parcial de los primeros 50 términos de la sucesión aritmética: $2, 4, 6, \ldots, 2n, \ldots$

$$a_1 = 2 \qquad a_{50} = 2 + (50-1)2 = 100$$

$$S_{50} = \frac{(50)}{2}(2 + 100) = 2{,}550$$

Ejercicios del Texto

Ejer. 1–2: Demuestre que la sucesión dada es aritmética y encuentre la diferencia común.

1 $-6, -2, 2, \ldots, 4n - 10, \ldots$

2 $53, 48, 43, \ldots, 58 - 5n, \ldots$

Ejer. 3–14: Encuentre el *n*-ésimo término, el quinto término y el décimo término de la sucesión aritmética.

3 $2, 6, 10, 14, \ldots$

4 $1, 7, 13, 19, \ldots$

5 $16, 13, 10, 7, \ldots$

6 $32, 27, 22, 17, \ldots$

7 $3, 2.7, 2.4, 2.1, \ldots$

8 $-6, -4.5, -3, -1.5, \ldots$

9 $-7, -3.9, -0.8, 2.3, \ldots$

10 $4.2, 1.5, -1.2, -3.9, \ldots$

Ejer. 25–30: Encuentre la suma S_n de la sucesión aritmética que satisfaga las condiciones dadas.

25 $a_1 = 40, \quad d = -3, \quad n = 30$

26 $a_1 = 5, \quad d = 0.1, \quad n = 40$

27 $a_1 = -9, \quad a_{10} = 15, \quad n = 10$

28 $a_1 = 5, \quad a_{20} = 9, \quad n = 20$

29 $a_7 = \frac{7}{3}, \quad d = -\frac{2}{3}, \quad n = 15$

30 $a_6 = -2, \quad d = -\frac{3}{4}, \quad n = 40$

Sucesiones Geométricas

- Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ una sucesión infinita. Entonces, es una **sucesión geométrica** si $a_1 \neq 0$ y si hay un número real $r \neq 0$ tal que para todo entero positivo k:

$$a_{k+1} = a_k r$$

El número $r = \frac{a_{k+1}}{a_k}$ se denomina la **razón común** de la sucesión.

$$(-2)^{n-1}$$

Ejemplos:

$6, -12, 24, -48, \ldots (-2)^{n-1}(6), \ldots,$ tiene como razón común -2

$9, 3, 1, \frac{1}{3}, \ldots (3)^{3-n}, \ldots,$ tiene como razón común $\frac{-1}{3}$

Fórmula para el n-ésimo término
Sucesiones Geométricas

- Sea $a_1, a_2, a_3, \ldots., a_n, \ldots.$ una sucesión **geométrica** donde n, k son enteros positivos y r es la **razón común**. Entonces, el n-ésimo término está dado por cualquiera de las dos formulas siguientes:

$$a_n = a_1 r^{n-1} \qquad\qquad a_n = a_k r^{n-k}$$

Ejemplo:

Una sucesión geométrica tiene 3 como primer término y una razón común $r = \frac{-1}{2}$. Encuentre los primeros cinco términos y el décimo término.

$$a_1 = 3 \qquad a_2 = a_1 r^{2-1} = (3)\left(\frac{-1}{2}\right)^1 = \frac{-3}{2} \qquad a_4 = \frac{-3}{8}$$

$$a_3 = a_1 r^{3-1} = (3)\left(\frac{-1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \qquad a_5 = \frac{3}{16}$$

$$a_{10} = a_1 r^{10-1} = (3)\left(\frac{-1}{2}\right)^9 = (3)\left(\frac{-1}{512}\right) = \frac{-3}{512}$$

Ejercicios del Texto p3

Ejer. 1–2: Demuestre que la sucesión dada es geométrica y encuentre la razón común.

1 $5, -\frac{5}{4}, \frac{5}{16}, \ldots, 5\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}, \ldots$

2 $\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, \frac{9}{7}, \ldots, \frac{1}{7}(3)^{n-1}, \ldots$

Ejer. 3–14: Encuentre el n-ésimo término, el quinto término y el octavo término de la sucesión geométrica.

3 $8, 4, 2, 1, \ldots$

4 $4, 1.2, 0.36, 0.108, \ldots$

5 $300, -30, 3, -0.3, \ldots$

6 $1, -\sqrt{3}, 3, -3\sqrt{3}, \ldots$

7 $5, 25, 125, 625, \ldots$

8 $2, 6, 18, 54, \ldots$

9 $4, -6, 9, -13.5, \ldots$

10 $162, -54, 18, -6, \ldots$