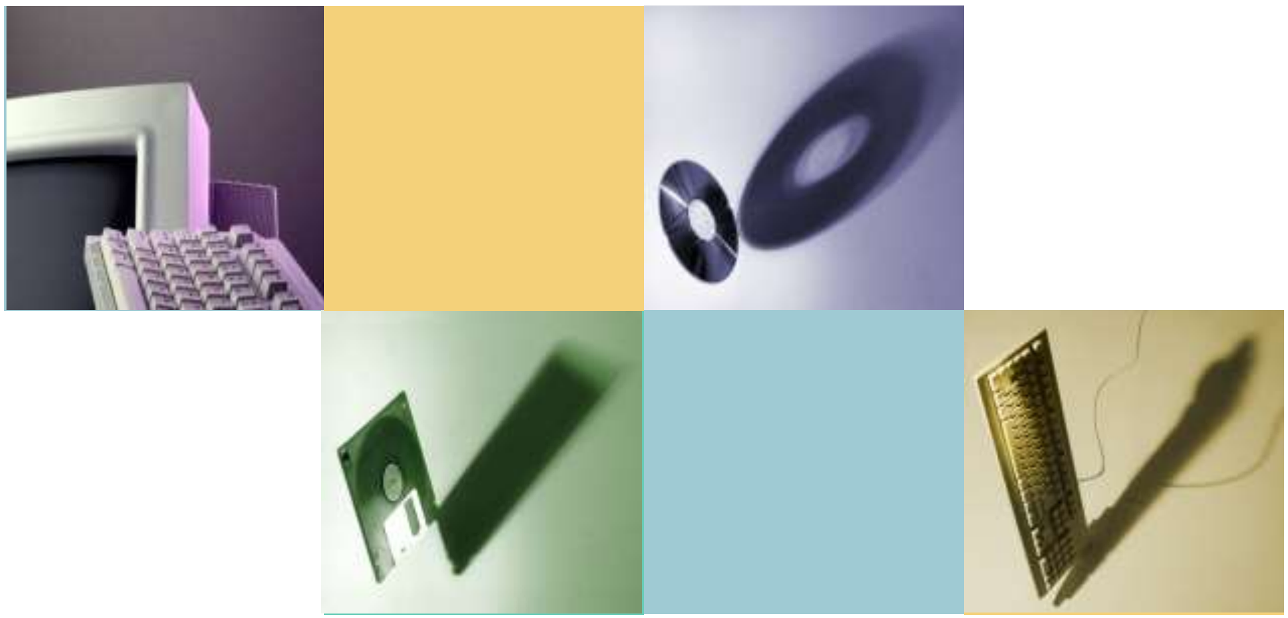
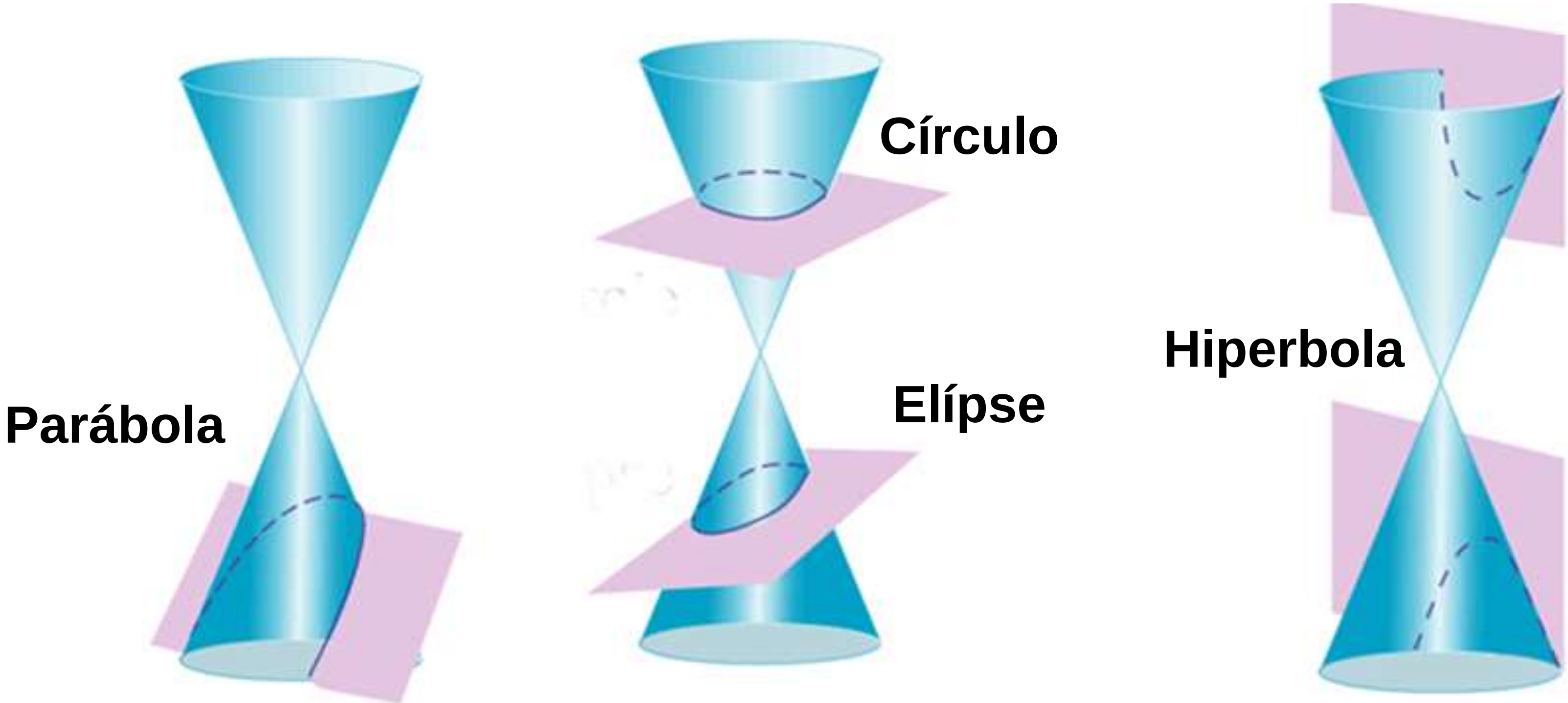
Lección 5.1



Parábolas

Actividades 5.1

- Referencia del Texto:
  - Secćión 11.1 – Parábolas; Ejercicios de Práctica: 1 – 30
- Referencias del Web:
  - Math2me
    - Concepto de parábola y sus elementos
    - Elementos de una parábola dada ecuación | origen
    - Elementos de una ecuación general de parábola | origen
    - Ecuación de la parábola dada directriz | origen
    - Ecuación de la parábola horizontal | origen
  - Cool Algebra by Karen – Parabola
  - Mathword.com - Parabola



CÓNICAS

Secciones que resultan al cortar un cono por un plano:

Es un conjunto de puntos que son equidistante de un punto una línea recta.

El punto se llama su *foco* y la recta su *directriz*.

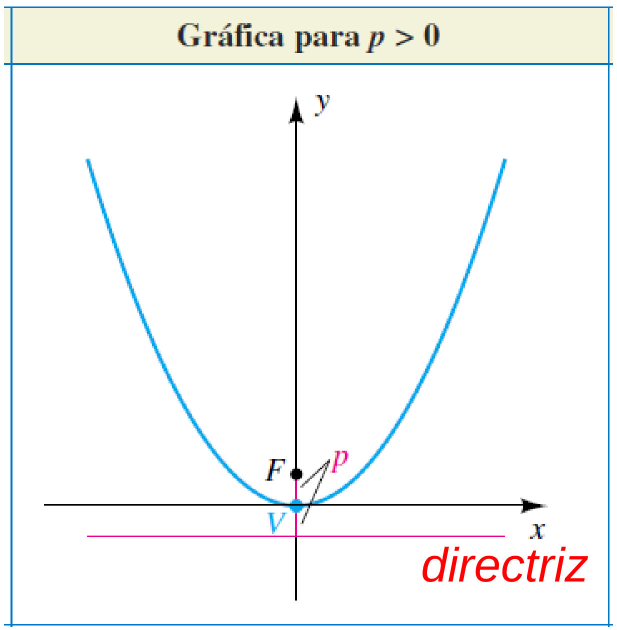
PARÁBOLA

Ecuación de la Parábola Vertical

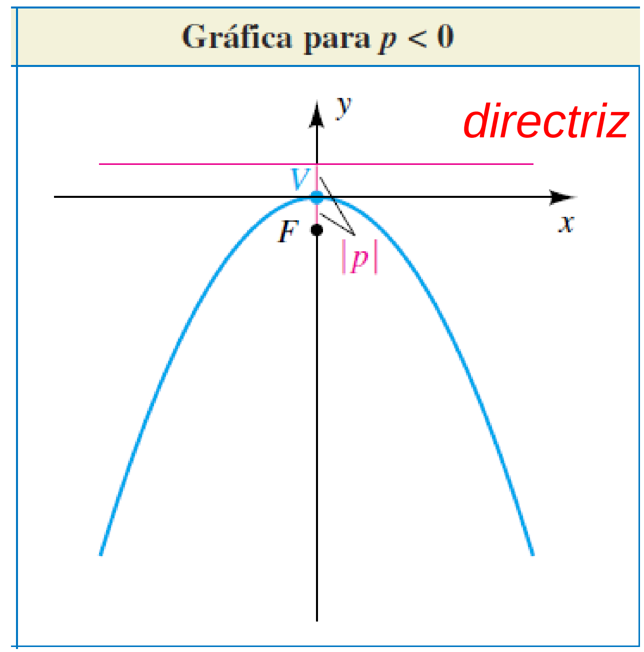
Es un conjunto de puntos que son equidistante de un punto (foco) una línea recta (directriz).

Si $(0, p)$ es el foco $y = -p$ su directriz La ecuación está dada por:

$$x^2 = 4py \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{4p}x^2$$



F - Foco



Vértice =(0,0)

Ejemplo 1

- Encuentre la ecuación de la parábola vertical con vértice $(0,0)$ y foco en $(0,-2)$.
- Solución:
- Su foco es $(0,-2)$, por consiguiente $p = -2$.

$$x^2 = 4py$$

$$x^2 = 4(-2)y$$

$$x^2 = -8y$$

Ejemplo 2

- Halle el foco y la directriz de la parábola

$$y = 9x^2$$

- Solución:

$$y = 9x^2$$

$$9x^2 = y$$

$$x^2 = \frac{1}{9}y$$

$$x^2 = \left(\frac{4}{4}\right)\left(\frac{1}{9}\right)y$$

$$x^2 = 4\left(\frac{1}{36}\right)y$$

$x^2 = 4py$

Directriz: $y = -p$

Foco: $(0, p)$

Directriz:

$$y = \frac{-1}{36}$$

Foco:

$$\left(0, \frac{-1}{36}\right)$$

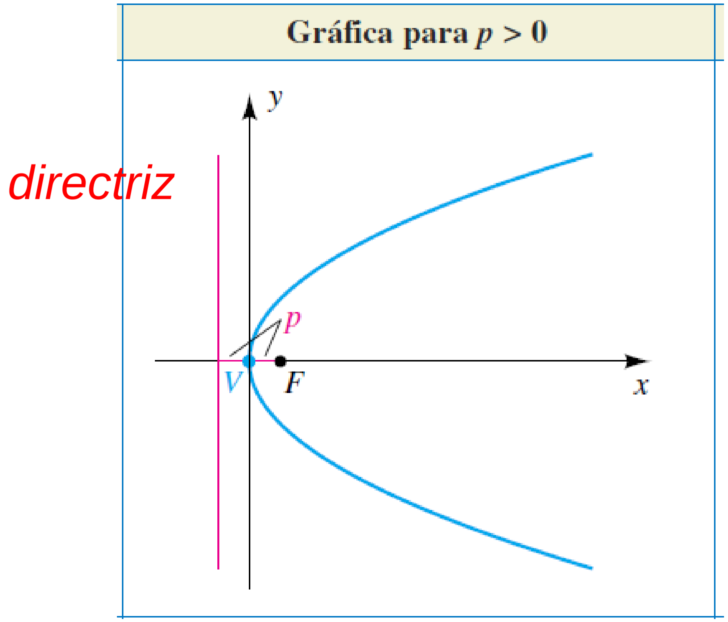


Ecuación de la Parábola Horizontal

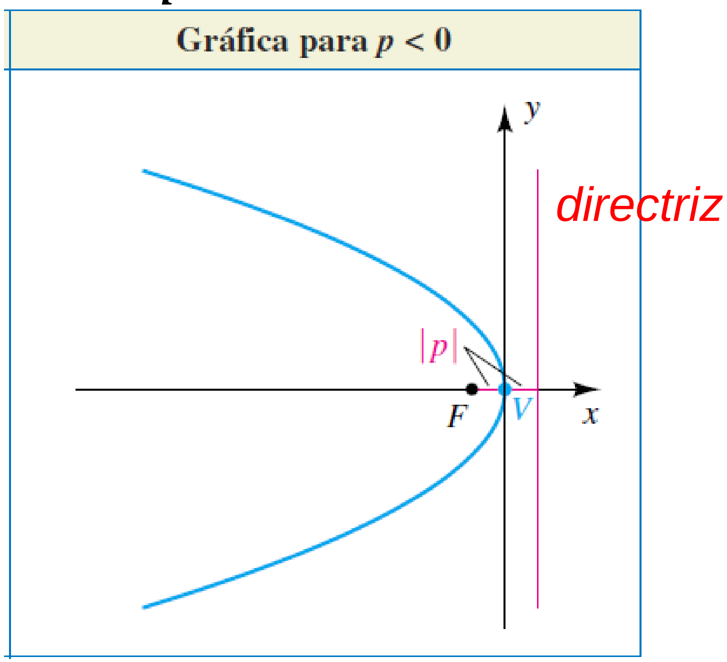
Es un conjunto de puntos que son equidistante de un punto (foco) una línea recta (directriz).

Si $(p, 0)$ es el foco $x = -p$ su directriz La ecuación está dada por:

$$y^2 = 4px \iff x = \frac{1}{4p}y^2$$



F - Foco



Vértice =(0,0)

Ejemplo 4

- Determine el foco, la directriz de la parábola cuya ecuación es:

$$y^2 = -28x$$

$y^2 = 4px$

Directriz: $x = -p$

Foco: $(p, 0)$

- Solución:

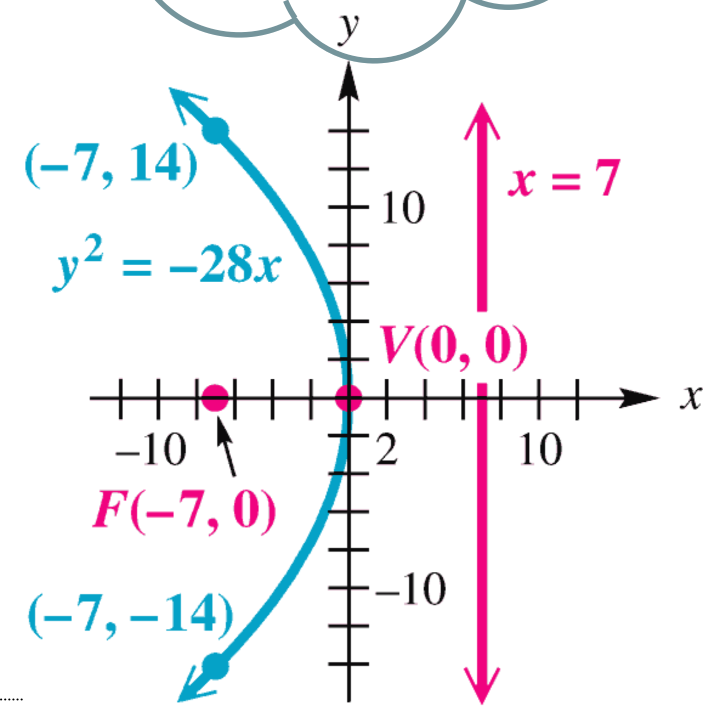
$$y^2 = \frac{4}{4}(-28)x$$

$$y^2 = 4(-7)x$$

$$p = -7$$

$$Foco = (-7,0)$$

$$\text{Directriz} \quad x = 7$$



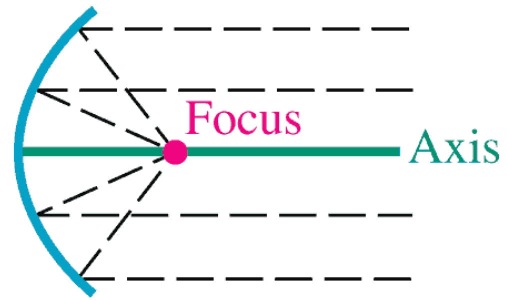
Ejemplo 5 – Problema Aplicado

- Las señales de que entran de manera paralelas al eje de un reflector parabólico se reflejan a su foco para que de esa manera capten la señal concentrada.
- Si el un radio telescopio de forma parabólica tiene un diámetro de 210 pies y profundidad de 32 pies.

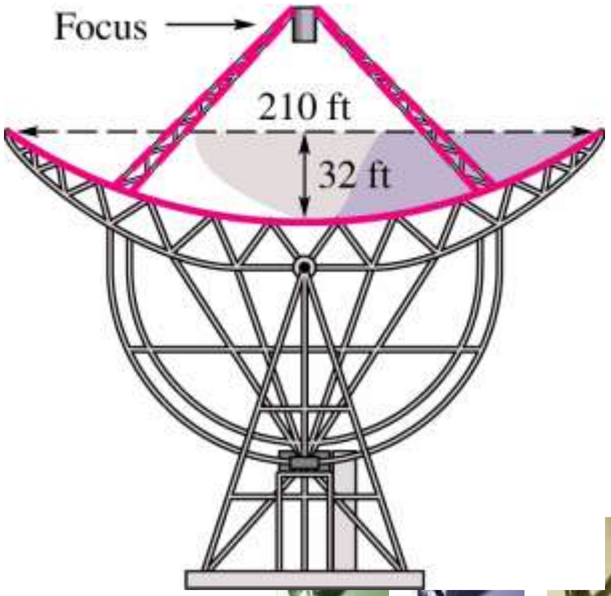
- Determine:

(a) La ecuación que describe la sección transversal del plato parabólico.

(b) Si el receptor debe ser ubicado en el foco de la parábola, ¿cuán lejos de su vertice del plato parabólico se encontrara?

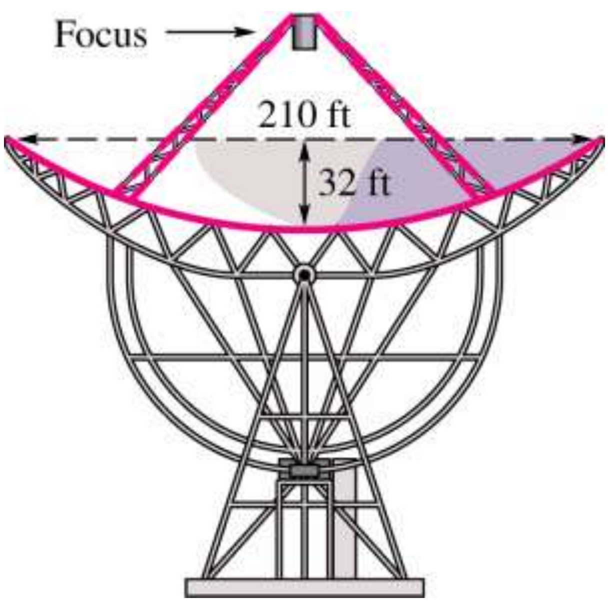


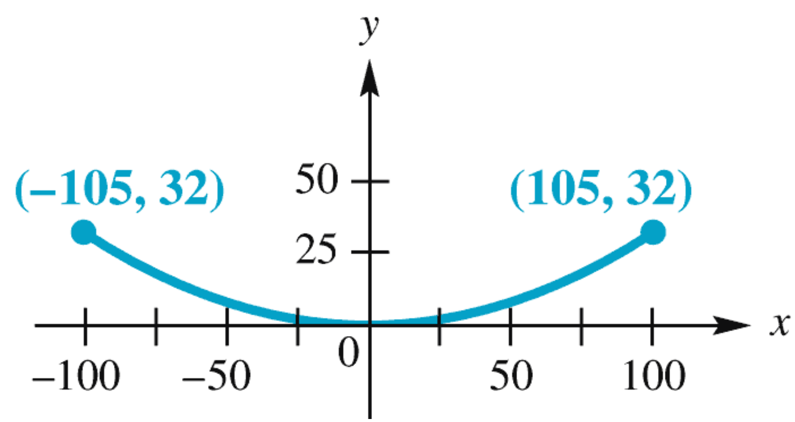
Parabolic reflector



Solución al Ejemplo 5 …

- Si la sección transversal del plato parábolico se coloca en un sistema de coordenadas cartesianas de manera que el vértice está en el punto origen, la gráfica se vería así:





$$x^2 = 4py$$

Solución Ejemplo 5 …

- Además, como (105, 32) es un punto de la ecuación

$$x^2 = 4py$$

$$(105)^2 = 4p(32)$$

$$p = \frac{(105)^2}{4(32)} = \frac{11025}{128} \approx 86.1$$

- Por la tanto, (a) la ecuación de la sección transversal será:

$$x^2 = 4\left(\frac{11025}{128}\right)y$$

- El receptor debe estar ubicado a p unidades de su vértice.

$$x^2 = \left(\frac{11025}{32}\right)y$$

- Es decir, (b) aproximadamente 86.1 pies del vértice.

Parábola vertical con vértice en (h, k)

- Si el vértice de una **parabola vertical** es (h, k) entonces su ecuación será:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Además, ésta generará una ecuación de la forma:

$$y = ax^2 + bx + c$$

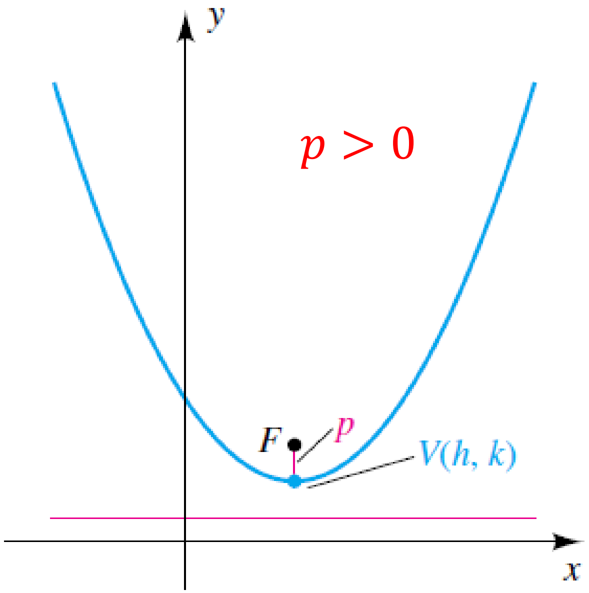
Donde

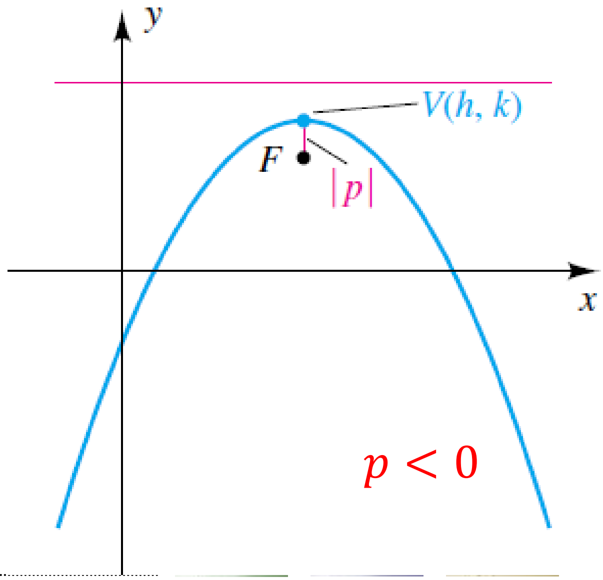
$$p = \frac{1}{4a}$$

Por lo tanto, tendrá

Foco: $F(h, k+p)$

Directriz será $y = k - p$

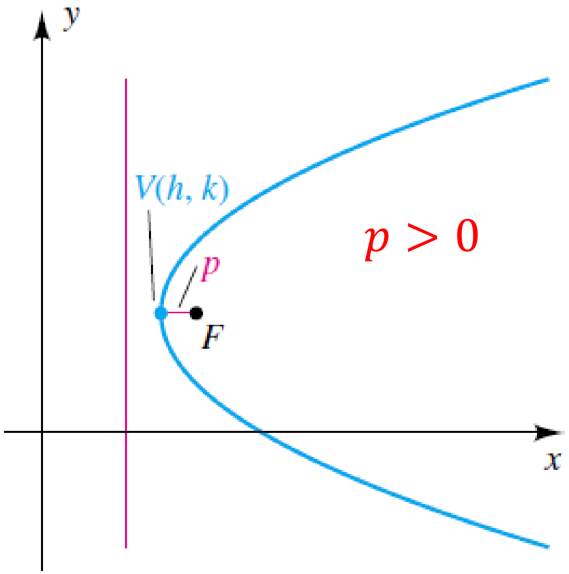




Parábola horizontal con vértice en (h, k)

- Si el vértice de una **parabola horizontal** es (h, k) entonces su ecuación será:

$$(y - h)^2 = 4p(x - k)$$

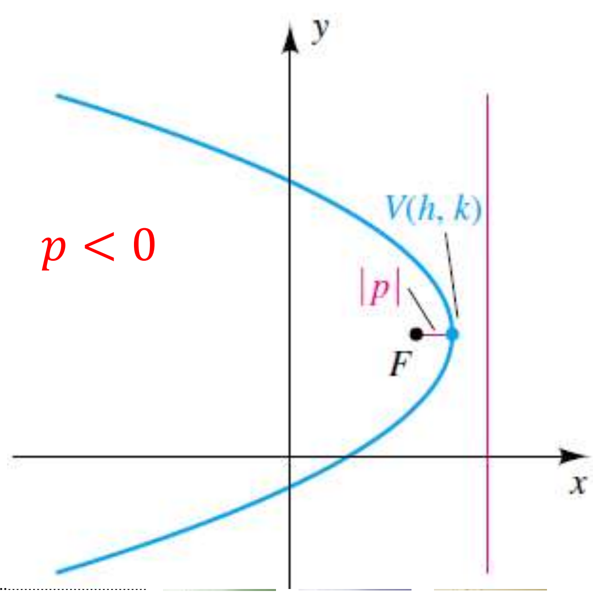


Además, ésta generará una ecuación de la forma:

$$x = ay^2 + by + c$$

Donde

$$p = \frac{1}{4a}$$



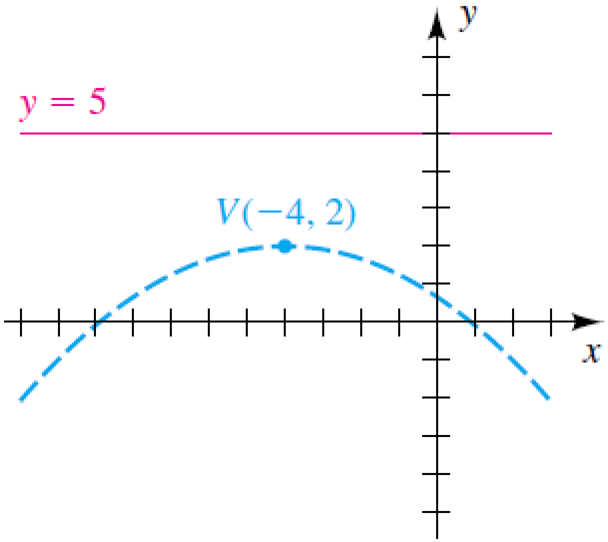
Por lo tanto, tendrá

Foco: $F(h + p, k)$

Directriz será $x = h - p$

Ejemplo 6

- Determine la ecuación de la parabola en la figura a la derecha si su vértice es $(-4{,}2)$ y directriz $y = 5$.



Solución:

Es una parábola vertical con p < 0

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

$p = -3$ porque su directriz está a 3 unidades del vértice (vea figura)

Por lo tanto,

$$(x-(-4))^2 = 4(-3)(y-(2))$$

$$(x+4))^2 = -12(y-2)$$

Ejercicios del Texto

Ejer. 1–12: Hallar el vértice, foco y directriz de la parábola. Trace su gráfica, mostrando el foco y la directriz.

1 $8y = x^2$

2 $x^2 = -3y$

3 $2y^2 = -3x$

4 $20x = y^2$

5 $(x + 2)^2 = -8(y - 1)$

6 $(x - 3)^2 = \frac{1}{2}(y + 1)$

7 $(y - 2)^2 = \frac{1}{4}(x - 3)$

8 $(y + 1)^2 = -12(x + 2)$

9 $y = x^2 - 4x + 2$

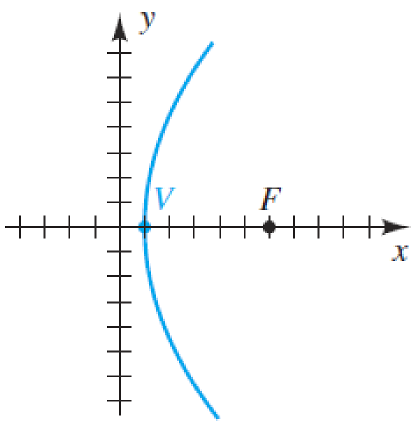
10 $x^2 + 20y = 10$

11 $y^2 + 14y + 4x + 45 = 0$

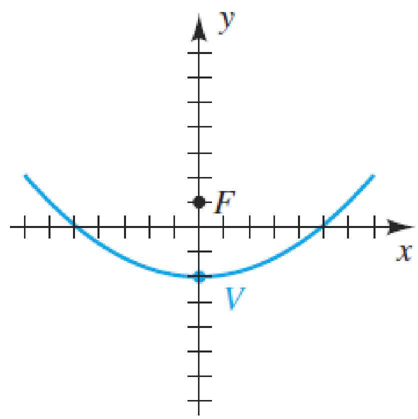
12 $y^2 - 4y - 2x - 4 = 0$

Ejer. 13–20: Hallar la ecuación para la parábola mostrada en la figura.

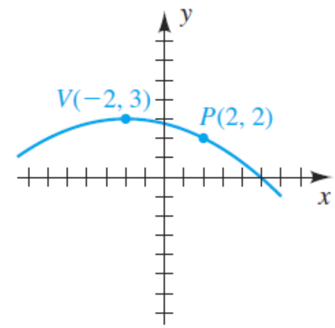
13



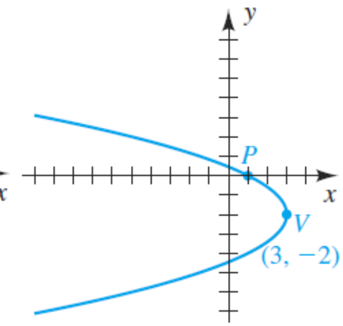
14



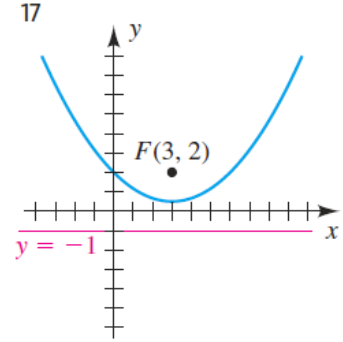
15



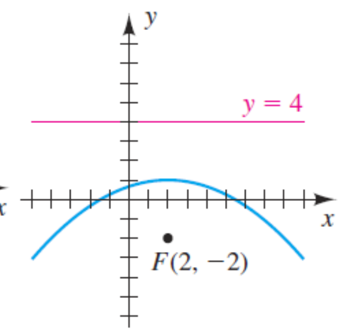
16



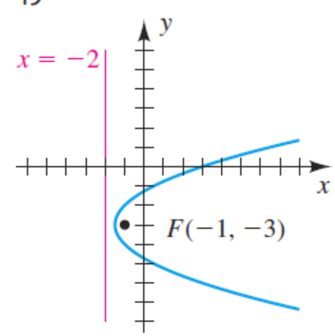
17



18



19



20