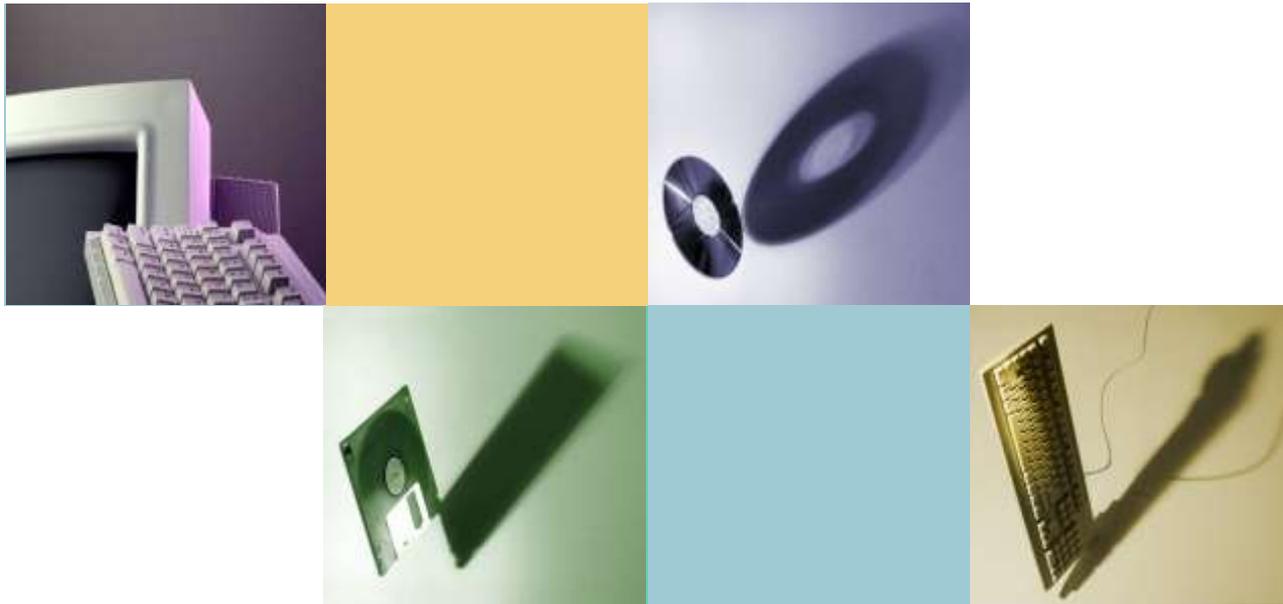


MATE3012 – Lección 12



Funciones Logarítmicas

Actividades 1.2

- **Texto:** Capítulo 6 - Sección 6.3 Logaritmos.
- **Ejercicios de Práctica:** Páginas 246, 247; problemas impares 1 al 60; Use GRAPH par las gráficas de 75 – 81.
- **Asignación 1.1:** Página 247, problema 44; problemas 63 y 64 resuelva y use GRAPH para imprimir gráficas de las funciones; Página 248, problemas 83 y 84, resuelva y use GRAPH para imprimir las graficas de la funciones para los valores de $x \geq 0$. Ajuste las escalas para que se despliegue el patrón general de la gráfica.
- **Referencias del Web:**
 - Julio Profe. Net - Ver: [Función Logarítmica](#) ; Propiedades de Logaritmos - [Ejercicio 1](#); Ecuaciones Logarítmicas – [Ejercicio 1](#); [Ejercicio 2](#)
 - Purple Math: [Solving Exponential Equations](#); [Solving Logarithmic Equations](#).
 - Paul's Online Math Notes: [Solving Exponential Equations](#); [Solving Logarithmic Equations](#)



Definición de logaritmos

- Sea $a > 0$ and $a \neq 1$. Entonces, **el logaritmo con base a de un número x ...**

$$\log_a x = y \quad \longleftrightarrow \quad a^y = x$$

Observe que x es siempre un **número positivo**

- Ejemplos:

$$\log_{10} 100 = 2 \quad \longleftrightarrow \quad 10^2 = 100$$

$$\log_4 64 = 3 \quad \longleftrightarrow \quad 4^3 = 64$$

$$\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81} = 4 \quad \longleftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$$



Ejemplo 1

- Escriba los siguientes enunciados en forma logarítmica:

1. $6^3 = 216$ \Rightarrow $\log_6 216 = 3$

2. $2^{-3} = 0.125$ \Rightarrow $\log_2 0.125 = -3$

3. $7^3 = 343$ \Rightarrow $\log_7 343 = 3$

4. $e^{0.5x} = t$ \Rightarrow $\log_e t = 0.5x$ \Rightarrow $\ln t = 0.5x$

- Escriba los siguientes enunciados en forma exponencial y determine el valor de x:

1. $\log 100 = x$ \Rightarrow $100 = 10^x$ \Rightarrow $x = 2$

2. $\log_4 x = 2$ \Rightarrow $x = 4^2$ \Rightarrow $x = 16$



Ejemplo 2

- Resuelva:

$$\log_2 32 = x$$

$$32 = 2^x$$

$$2^5 = 2^x$$

$$x = 5$$

$$\log_4 \sqrt{2} = x$$

$$\sqrt{2} = 4^x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = (2^2)^x$$

$$2^{\frac{1}{2}} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2} = 2x$$

$$x = \frac{1}{4}$$



Cálculo de logaritmos

- La mayoría de calculadoras realizan el cálculo de logaritmos de base 10 ($\log x$) o de base e ($\ln x$).

$$\log(10.5) \approx 1.021189299$$

$$\ln(0.0025) \approx -5.991464547$$

- Para calcular logaritmos de otras base usamos la siguiente igualdad:

$$\log_a M = \frac{\log M}{\log a} = \frac{\ln M}{\ln a} = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

$$\log_5 63 = \frac{\log 63}{\log 5} \approx 2.5742744344 \quad \log_8 0.0035 \approx -2.719$$

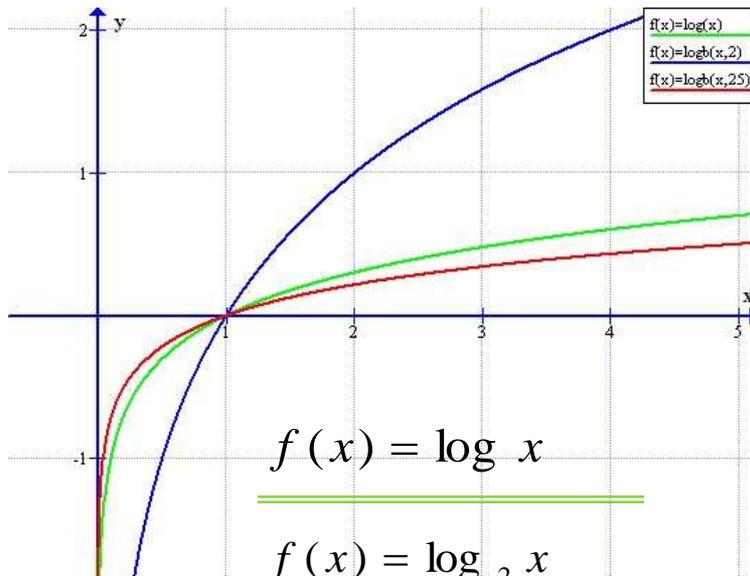
$$\log_5 63 = \frac{\ln 63}{\ln 5} \approx 2.5742744344 \quad \log_5 3.05 \approx 0.693$$



La Función Logaritmo (base > 1)

$$f(x) = \log_a x$$

- Si $a > 1$, la función logaritmo es creciente.

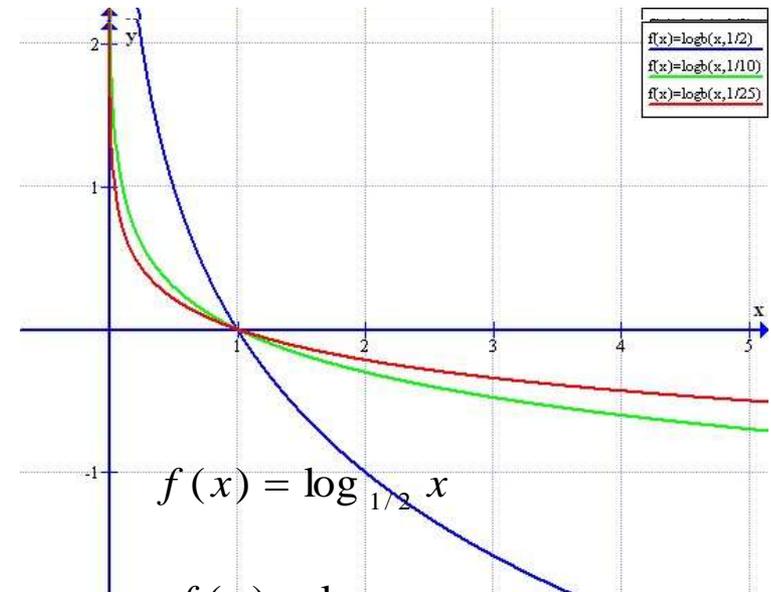


$$f(x) = \log x$$

$$f(x) = \log_2 x$$

$$f(x) = \log_{25} x$$

- Si $0 < a < 1$, la función logaritmo es decreciente.



$$f(x) = \log_{1/2} x$$

$$f(x) = \log_{1/10} x$$

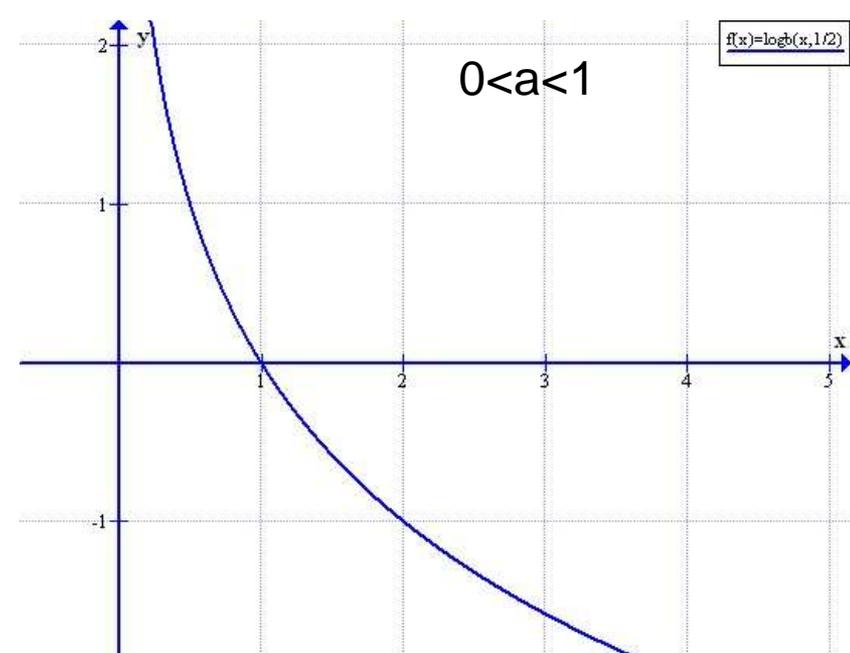
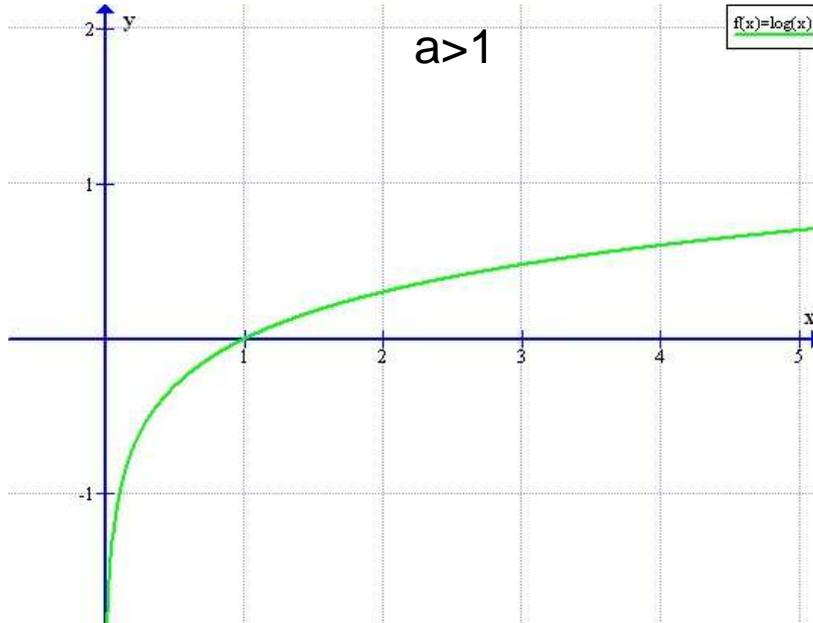
$$f(x) = \log_{1/25} x$$

En GRAPH entre **log(x)** para la función con base 10 y use el formato **logb(x, a)** para la función con base a.



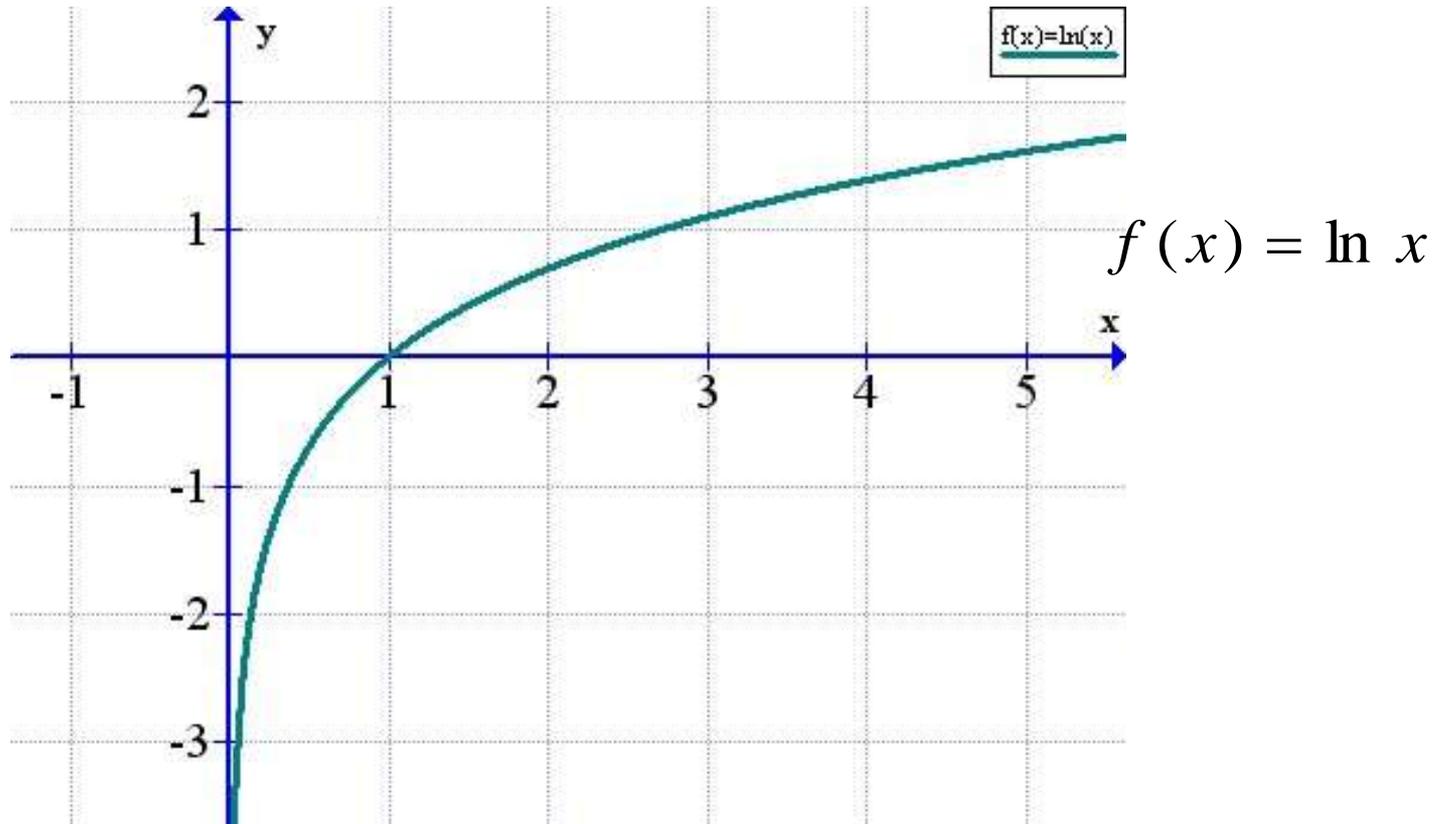
Características de las funciones con logaritmos

- Dominio = $(0, \infty)$, Rango = $(-\infty, \infty)$
- El intercepto en x ocurre en $(1, 0)$.
- No hay intercepto en y.
- El eje vertical, $x = 0$, es un asíntota vertical de su gráfica.
- Es una función uno a uno



Función Logaritmo natural

- $y = \ln x$ si y sólo si $e^y = x$



En GRAPH entre **ln(x)**
para la función con base e.

En EXCEL entre **LN(x)**
para la función logaritmo
con base e.



Ejemplo 3

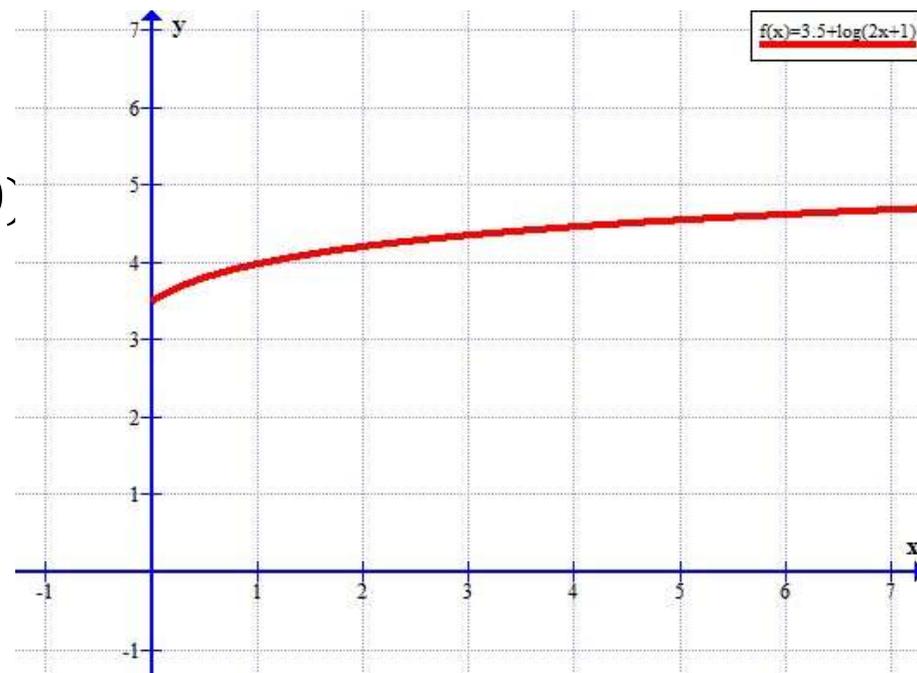
- Una compañía está ampliando sus instalaciones y la función costo está dado por: $C(x) = 3.5 + \log(2x + 1)$ donde x representa la tasa de producción. Encuentre el costo de producir: (a) 5 unidades, (b) el costo extra de aumentar la tasa de producción de 5 a 10 unidades (c) Grafique la función.

- Solución:

a)
$$C(5) = 3.5 + \log(2(5) + 1)$$
$$= 3.5 + \log 11$$
$$\approx 4.541392685 \approx \$4.54$$

b) Como $C(10) = 3.5 + \log(2(10) + 1)$
$$= 3.5 + \log 21$$
$$\approx 4.822219295$$
$$\approx \$4.82$$

El costo extra fue de \$0.28.



Propiedades de Logaritmos

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. Si $\log_a(u) = \log_a(v)$ si y sólo si $u = v$
4. $\log_a(uv) = \log_a u + \log_a v$
5. $\log_a(u/v) = \log_a u - \log_a v$
6. $\log_a(1/v) = -\log_a v$
7. $\log_a(u^n) = n \log_a(u)$



Ejemplo 4

Expande las siguientes expresiones logarítmicas

$$\begin{aligned} \text{a) } \log_3(9x) &= \log_3 9 + \log_3 x \\ &= 2 + \log_3 x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \log_2(x^3 y^5) &= \log_2 x^3 + \log_2 y^5 \\ &= 3 \log_2 x + 5 \log_2 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \ln\left(\frac{xy}{\sqrt[5]{z}}\right) &= \ln xy - \ln \sqrt[5]{z} \\ &= \ln x + \ln y - \ln z^{1/5} \\ &= \ln x + \ln y - \frac{1}{5} \ln z \end{aligned}$$



Ejemplo 5

- Combine las expresiones a un solo logaritmo:

$$\begin{aligned} & 4 \log x + \frac{1}{2} \log(x - 1) \\ &= \log x^4 + \log(x - 1)^{\frac{1}{2}} \\ &= \log \left[x^4 (x - 1)^{\frac{1}{2}} \right] \\ &= \log \left[x^4 \sqrt{x - 1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & 4 \log x - \frac{1}{3} \log(x^2 + 1) + 2 \log(x - 1) \\ &= \log x^4 - \log(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} + \log(x - 1)^2 \\ &= \log \left[\frac{x^4}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}} \right] + \log(x - 1)^2 \\ &= \log \left[\frac{x^4 (x - 1)^2}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{3}}} \right] \end{aligned}$$



Ecuaciones Exponenciales

- Resuelva:

$$4^{x-2} = 64$$

$$4^{x-2} = 4^3$$

$$x - 2 = 3$$

$$x = 5$$

$$5^{x^2-13} = 125$$

$$5^{x^2-13} = 5^3$$

$$x^2 - 13 = 3$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

$$5^{x-2} = 8$$

$$\log 5^{x-2} = \log 8$$

$$(x-2) \log 5 = \log 8$$

$$x - 2 = \frac{\log 8}{\log 5}$$

$$x = \frac{\log 8}{\log 5} + 2$$

$$\approx 3.29203$$



Ecuaciones Logarítmicas

- Resuelva:

$$\log_4(2x - 1) = \log_4(x + 5)$$

$$2x - 1 = x + 5$$

$$2x - x = 5 + 1$$

$$x = 6$$

$$\ln e^{-2x} = 8$$

$$-2x \ln e = 8$$

$$-2x = 8$$

$$x = -4$$

$$\log_4 16^x = 6$$

$$x \log_4 16 = 6$$

$$x \cdot 2 = 6$$

$$x = \frac{6}{2} = 3$$



Ejemplo 6

- Resuelva: $\ln(x + 1) - \ln(x - 1) = 1$

$$\ln \frac{x + 1}{x - 1} = 1$$

$$\frac{x + 1}{x - 1} = e$$

$$x + 1 = e(x - 1)$$

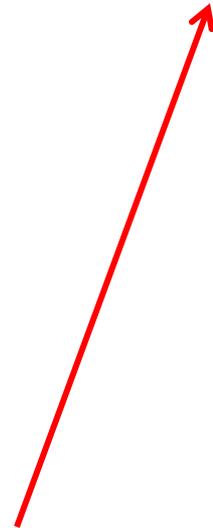
$$x + 1 = ex - e$$

$$1 + e = ex - x$$

$$1 + e = x(e - 1)$$

$$\frac{1 + e}{e - 1} = x$$

$$x = \frac{e + 1}{e - 1}$$

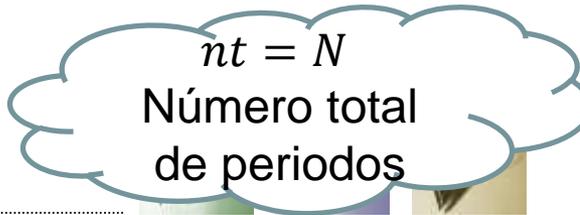


Ejemplo 7

- Aproximadamente, ¿cuánto tiempo tomará una inversión de \$5,000 alcanzar \$10,000, si invertimos esta cantidad en una cuenta que paga interés de 5% anual compuesto trimestralmente?
- Solución:
- $P = 5000$, $C = 10,000$, $r = 5\%$ compuesto trimestralmente. De manera que $n = 4$
- Según la fórmula de valor futuro para interés compuesto:

$$C = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$


$$10,000 = 5,000 \left(1 + \frac{.05}{4} \right)^{4t}$$



$nt = N$
Número total
de periodos

Ejemplo 7 ...

$$10,000 = 5,000(1 + 0.0125)^{4t}$$

$$2 = (1.0125)^{4t}$$

$$\log 2 = \log(1.0125)^{4t}$$

$$\log 2 = 4t \cdot \log(1.0125)$$

$$\frac{\log 2}{4\log(1.0125)} = t$$

$$t \approx 13.94940762$$

$$t \approx 14$$

Tomará
aproximadamente
14 años.



Actividades 1.2

- **Texto:** Capítulo 6 - Sección 6.3 Logaritmos.
- **Ejercicios de Práctica:** Páginas 246, 247; problemas impares 1 al 60; Use GRAPH par las gráficas de 75 – 81.
- **Asignación 1.1:** Página 247, problema 44; problemas 63 y 64 resuelva y use GRAPH para imprimir gráficas de las funciones; Página 248, problemas 83 y 84, resuelva y use GRAPH para imprimir las graficas de la funciones para los valores de $x \geq 0$. Ajuste las escalas para que se despliegue el patrón general de la gráfica.
- **Referencias del Web:**
 - Julio Profe. Net - Ver: [Función Logarítmica](#) ; Propiedades de Logaritmos - [Ejercicio 1](#); Ecuaciones Logarítmicas – [Ejercicio 1](#); [Ejercicio 2](#)
 - Purple Math: [Solving Exponential Equations](#); [Solving Logarithmic Equations](#).
 - Paul's Online Math Notes: [Solving Exponential Equations](#); [Solving Logarithmic Equations](#)

