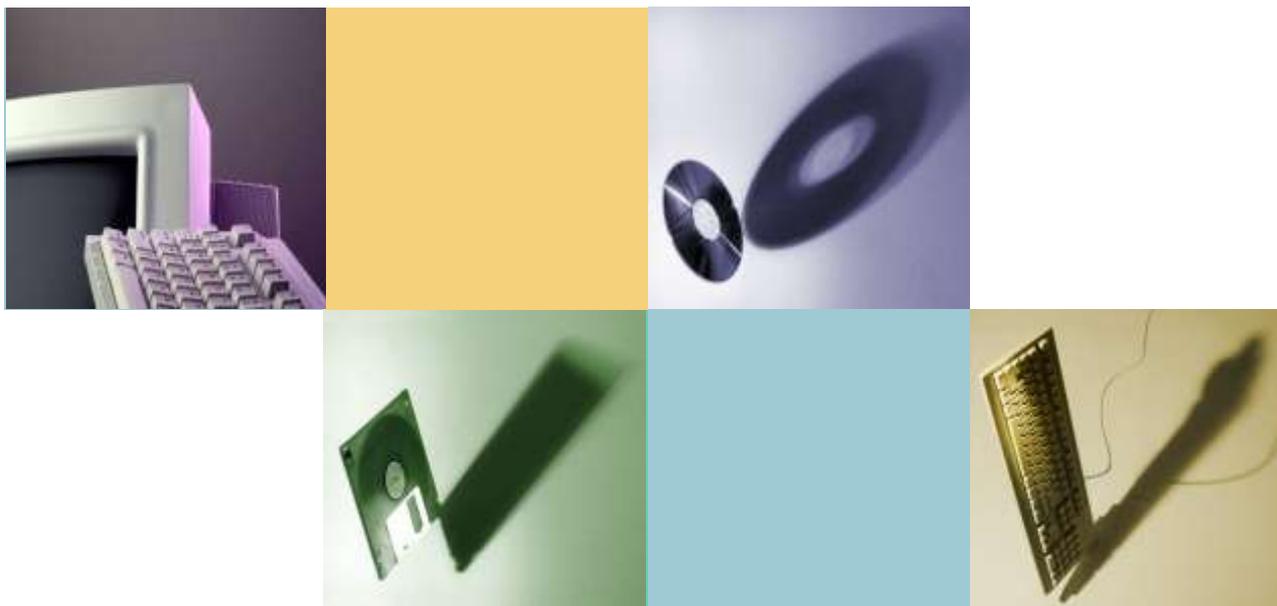


MATE3012 – Lección 2.1



Álgebra de Matrices

Actividades 2.1

- **Texto:** Capítulo 8 - Sección 8.1 y Matrices y 8.2 – Multiplicación de Matrices.
- **Ejercicios de Práctica:** Páginas 321, 322; problemas impares 1 al 230; Páginas 331, 332; problemas impares 1 al 33.
- **Asignación 2.1:** Página 321 y 322, problemas 12, 20, 26, 27; Páginas 331, 332, problemas 18, 20 y 41
- **Referencias del Web:**
 - Youtube: [Operaciones con matrices](#); [Producto de Matrices Ejemplo 1](#); [Producto de Matrices Ejemplo 2](#).
 - Thales.cica: [Matrices, Determinantes y Cálculo con matrices – Índice](#)
 - AulaFácil.com – [Matrices y Determnantes](#)



Matrices (Matrix)

- Dimensión de una matriz con **m** filas y **n** columnas es: **m x n**.

- Matrices **m x 1** y **1 x n** se llaman **vector columnas** y **vector filas** respectivamente.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

- Matrices tal que $m = n$ son matrices cuadradas.



Igualdad de Matrices

Si dos matrices son iguales, cada elemento correspondientes son iguales.
Esto es, si

$$\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} a &= 5 & b &= -1 \\ c &= -3 & d &= 7 \\ e &= 0 & f &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2x \\ -2 & y \\ 0 & 3z - 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -2 & -9 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} 2x &= 6 & y &= -9 & 3z - 1 &= 1 \\ x &= 3 & & & 3z &= 2 \\ & & & & z &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$



Representación de Problemas por matrices

- Una compañía produce dos productos P1 y P2. En un día se producen 2 y 5 respectivamente.

$$\begin{matrix} & P1 & P2 \\ \left[\begin{array}{cc} 2 & 5 \end{array} \right] \end{matrix}$$

- Se produce tres productos P1, P2 y P3. En un día se producen 2, 9 y 5 respectivamente.

$$\begin{matrix} & P1 & P2 & P3 \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 9 & 5 \end{array} \right] \end{matrix}$$

- Se produce tres productos P1, P2 y P3 de dos tamaños T1 y T2. En un día se producen 2, 9 y 5 del tamaño T1 y 8, 7 y 10 del segundo.

$$\begin{matrix} & & P1 & P2 & P3 \\ T1 & \left[\begin{array}{ccc} 2 & 9 & 5 \end{array} \right] \\ T2 & \left[\begin{array}{ccc} 8 & 7 & 10 \end{array} \right] \end{matrix}$$

- Tres vendedores, Pérez, Román y Torres, venden dos modelos de autos: básico o deportivo.

- Si respectivamente venden en un mes un total de 3, 4 y 2 modelos básicos y 1, 2 y ninguno. Entonces ...

$$\begin{matrix} & & Pérez & Román & Torres \\ Básico & \left[\begin{array}{ccc} 3 & 4 & 2 \end{array} \right] \\ Deportivo & \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \end{matrix}$$



Adición y Sustracción de Matrices

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -3 & 7 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 12 & -4 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}. \text{ Encuentre : (a) } A + B \quad \text{(b) } A - B$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 5 + 3 & -1 + (-2) \\ -3 + 12 & 7 + (-4) \\ 0 + 6 & 8 + 9 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} 5 - 3 & -1 - (-2) \\ -3 - 12 & 7 - (-4) \\ 0 - 6 & 8 - 9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 9 & 3 \\ 6 & 17 \end{bmatrix} \quad = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -15 & 11 \\ -6 & -1 \end{bmatrix}$$

Para sumar dos matrices estas deben tener el mismo número de filas y columnas



Multiplicación escalar

- Sea k un número constante (escalar) y A una matriz de dimensión $m \times n$. Entonces, el producto escalar kA es la matriz:

$$kA = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1j} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2j} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{ij} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mj} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$



Ejemplo 1

- Calcule $-2A + 3B$ dado que:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}$$

- Solución

$$-2 \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 6 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -6 & -15 \\ 3 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 0 & -15 \\ 3 & 16 \end{bmatrix}$$



Ejemplo 2

- Tres vendedores, Báez, Matos y Ruiz, venden dos modelos de autos: básico o deportivo. Si las matrices a la derecha muestran la ventas del mes de agosto y del mes de septiembre,
- ¿Cuál será las ventas totales de cada modelo por vendedor en los dos meses?
 - ¿Cuál es la diferencia en las ventas de cada modelo por vendedor en los dos meses?
 - Si ambos vendedores reciben una comisión de 5% de sus ventas, calcule la comisión de cada vendedor por modelo vendido en el mes de septiembre.
 - ¿Cuál fue la comisión de Matos en septiembre por el modelo deportivo?

Ventas de agosto		
Básico	Deportivo	
54,000	85,000	Báez
115,000	0	Matos
104,000	63,000	Ruiz

$$A = \begin{bmatrix} 54,000 & 85,000 \\ 115,000 & 0 \\ 104,000 & 63,000 \end{bmatrix}$$

Ventas de septiembre		
Básico	Deportivo	
114,000	285,000	Báez
194,000	312,000	Matos
145,000	78,000	Ruiz

$$B = \begin{bmatrix} 114,000 & 285,000 \\ 194,000 & 312,000 \\ 145,000 & 78,000 \end{bmatrix}$$


Solución del Ejemplo 2 – (a)

a) ¿Cuál será las ventas totales de cada modelo por vendedor en los dos meses?

Ventas de agosto			Ventas de septiembre				
Básico	Deportivo		Básico	Deportivo			
[54,000	85,000]	[114,000	285,000]		
[115,000	0]	[194,000	312,000]	=	
[104,000	63,000]	[145,000	78,000]		
						Ventas de agosto y septiembre	
			Básico	Deportivo			
			[168,000	370,000]		
			[309,000	312,000]		
			[249,000	141,000]		



Solución del Ejemplo 2 – (b)

b) ¿Cuál es la diferencia en las ventas de cada modelo por vendedor en los dos meses?

Ventas de septiembre			Ventas de agosto				
Básico	Deportivo		Básico	Deportivo			
[114 ,000	285,000]	[54 ,000	85,000]	=	
[194,000	312,000]	[115,000	0]	=	
[145,000	78,000]	[104,000	63,000]	=	
							Aumento en ventas
							Básico Deportivo
						[60 ,000	200,000
						[79,000	312,000
						[41,000	15,000



Solución del Ejemplo 2 – (c) y (d)

- c) Si ambos vendedores reciben una comisión de 5% de sus ventas, calcule la comisión de cada vendedor por cada modelo vendido en el mes de septiembre.

Ventas de septiembre		Comisión en ventas		
Básico	Deportivo	Básico	Deportivo	
114,000	285,000	5,700	14,250	Báez
194,000	312,000	9,700	15,600	Matos
145,000	78,000	7,250	3,900	Ruiz

$$0.05 \begin{bmatrix} 114,000 & 285,000 \\ 194,000 & 312,000 \\ 145,000 & 78,000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5,700 & 14,250 \\ 9,700 & 15,600 \\ 7,250 & 3,900 \end{bmatrix}$$

- d) ¿Cuál fue la comisión de Matos en septiembre por el modelo deportivo?

\$15,600



Multiplicación de un vector fila por vector columna

Sea el vector fila $R = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n]$ y el vector columna

$C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$. El producto RC está definido por la matriz 1×1 :

$$RC = [r_1 \quad r_2 \quad \cdots \quad r_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [r_1 c_1 + r_2 c_2 + \cdots + r_n c_n]$$

Recuerde:

1. El vector fila tiene que tener el **mismo número n de columnas que filas** tiene el vector columna
2. El vector producto es **un vector 1×1**



Ejemplo 3

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2 \times 2 + 1 \times -3 + 1 \times -1 + -1 \times 0] \\ = [4 - 3 - 1 + 0] = [0]$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [-2 + -2 + 1] = [-3]$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = [3 - 2 + 0 + -2] = [-1]$$



Representación por productos de matrices

- La producción de un objeto requiere 3 horas de ensamblaje y 1 hora de terminación. Si los empleados de ensamblaje cobra \$9 la hora y los de terminación cobran \$6 la hora

Ensamblaje Terminación

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{Costo por hora de ensamblaje} \\ \text{Costo por hora por terminación} \end{array}$$

- Observe que el costo total de producir el objeto se puede expresar por el producto:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = [(3)(9) + (1)(6)] = [33]$$

- El costo total para producir el objeto será \$33.



Ejemplo 4

- La construcción de una casa requiere 2 unidades de concreto, 3 unidades de madera y 4 unidades piedra. Si el costo por unidades de concreto es \$75, por madera \$40 y por piedra \$ 25, use el producto de matrices para calcular el costo total por construir una casa.

$$\begin{array}{ccc} \text{Concreto} & \text{Madera} & \text{Piedra} \\ \left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 75 \\ 40 \\ 25 \end{array} \right] & \begin{array}{l} \text{Costo por unidad de concreto} \\ \text{Costo por unidad de madera} \\ \text{Costo por unidad de piedra} \end{array} \end{array}$$

- El costo total por construir una casa se expresa por el producto:

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 3 & 4 \end{array} \right] \bullet \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} 75 \\ 40 \\ 25 \end{array} \right] \\ = \left[(2)(75) + (3)(40) + (4)(25) \right] \\ = \left[370 \right] \end{array}$$

- El costo total para producir el objeto será \$370.



Multiplicación de matrices

- Sea A una matriz $m \times r$, B una matriz $r \times n$. La matriz producto AB está definida como la matriz $m \times n$ cuyos elementos en la fila i , columna j es el producto del vector fila i de A por el vector columna j de B

- Ejemplo: Encuentre el producto de AB :
$$A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix}$$

- Tres (3) Pasos recomendados para multiplicar:

1. Verifique que se pueda realizar producto –

- Número de Columnas de A es **2**
- Número de Filas de B es **2**.



2. Determine dimensión de la matriz producto.

- Número de filas de A es 3
- Número de columnas de B es 3
- Dimensión de matriz producto es $m \times n$: **3 x 3**



Ejemplo 5

- 3. Realice la operación:

$$\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -4 & -6 \\ 3 & 8 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 1 \cdot 3 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ -2 \cdot 1 + 0 \cdot 3 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ 3 \cdot 1 + 5 \cdot 3 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ -2 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \\ 18 & \underline{\quad} & \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & 7 \cdot -4 + 1 \cdot 8 & \underline{\quad} \\ -2 & -2 \cdot -4 + 0 \cdot 8 & \underline{\quad} \\ 18 & 3 \cdot -4 + 5 \cdot 8 & \underline{\quad} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & \underline{\quad} \\ -2 & 8 & \underline{\quad} \\ 18 & 28 & \underline{\quad} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -20 & 7 \cdot -6 + 1 \cdot 5 \\ -2 & 8 & -2 \cdot -6 + 0 \cdot 5 \\ 18 & 28 & 3 \cdot -6 + 5 \cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -20 & -37 \\ -2 & 8 & 12 \\ 18 & 28 & 7 \end{bmatrix}$$



Ejercicios de clase

- Encuentre el producto de AB:

$$1. \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -3 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -9 & -1 \\ 5 & 15 & 5 \\ -4 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$2. \begin{bmatrix} -1 & 1 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -2 & -11 & -2 \\ 0 & 0 & -13 & 12 \end{bmatrix}$$



Actividades 2.1

- **Texto:** Capítulo 8 - Sección 8.1 y Matrices y 8.2 – Multiplicación de Matrices.
- **Ejercicios de Práctica:** Páginas 321, 322; problemas impares 1 al 230; Páginas 331, 332; problemas impares 1 al 33.
- **Asignación 2.1:** Página 321 y 322, problemas 12, 20, 26, 27; Páginas 331, 332, problemas 18, 20 y 41
- **Referencias del Web:**
 - Youtube: [Operaciones con matrices](#); [Producto de Matrices Ejemplo 1](#); [Producto de Matrices Ejemplo 2](#).
 - Thales.cica: [Matrices, Determinantes y Cálculo con matrices – Índice](#)
 - AulaFácil.com – [Matrices y Determnantes](#)

