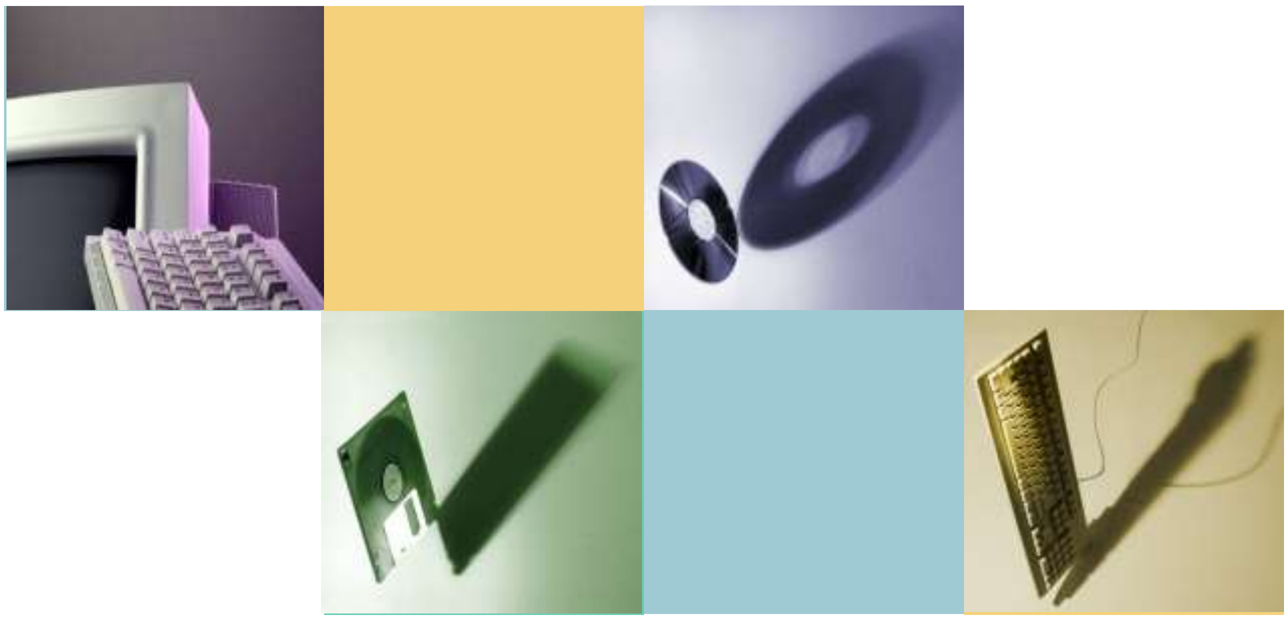
MATE3012 – Lección 2.2



Solución de Sistemas Lineales por Matrices

Actividades 2.2

- **Texto:** Capítulo 8 - Sección 8.3 – Solución de Sistemas Lineales por Reducción de Renglones.
- **Ejercicios de Práctica**: Páginas 341, 342; problemas impares 1 al 17.
- **Asignación 2.2**: Página 342, problemas 8 y 18
- **Referencias del Web:**
  - Resolviendo de Sistemas por Gauss-Jordan (You tube)
  - Using Matrices to Solve Systems of Equations; Part A: Setting Up a System & Doing Row Operations
  - Eliminación Gaussiana
  - Matrices: http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/T6_Matrices.htm

Sistemas de Ecuaciones Lineales

- Un sistema de ecuaciones lineales en *2* variables es un conjunto de ecuaciones lineales que tienen *2* variables.

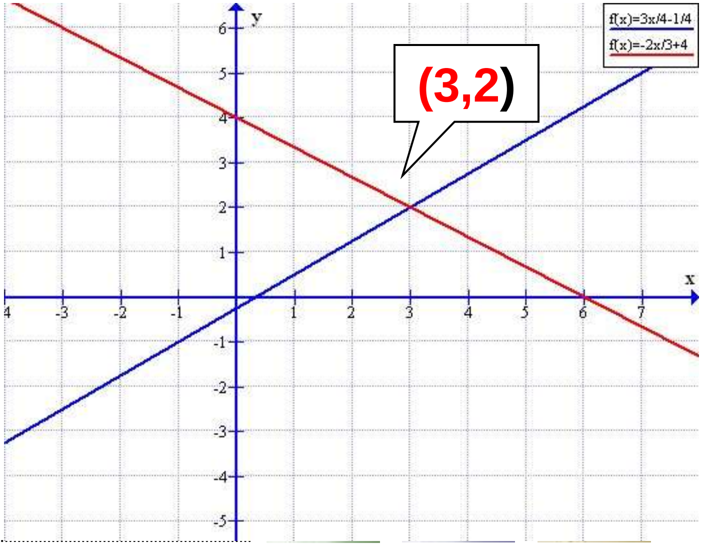
$$3x - 4y = 1$$
$$2x + 3y = 12$$

(3,2) es la solución por que ….

$$3(3) - 4(2) = 1$$
$$2(3) + 3(2) = 12$$

- La solución de un sistema de ecuaciones lineales en *2* variables es el par ordenado que satisface cada una sus ecuaciones.

- La solución de un sistema de dos ecuaciones en dos variables es el punto de intersección de sus gráficas.



Método de Sustitución

- Resuelva los sistemas:

$$x + y = -2$$

$$y = x + 2$$

$$x + (x + 2) = -2$$

$$2x + 2 = -2$$

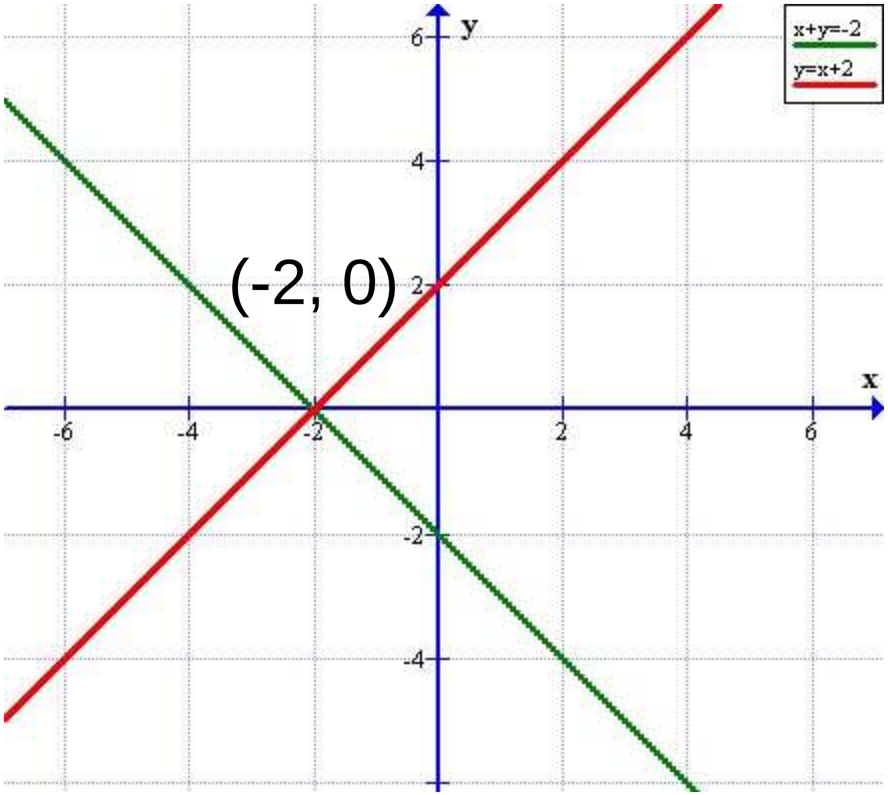
$$2x = -2 - 2$$

$$2x = -4$$

$$x = -2$$

$$y = (-2) + 2 \quad = 0$$

Solución: (-2, 0)



Nota: Use este método cuando sea fácil despejar por una de las variables.

Ejemplo 1

- Resuelva los sistemas:

$$y = 3x + 7$$

$$y = 2 - 2x$$

$$\Downarrow$$

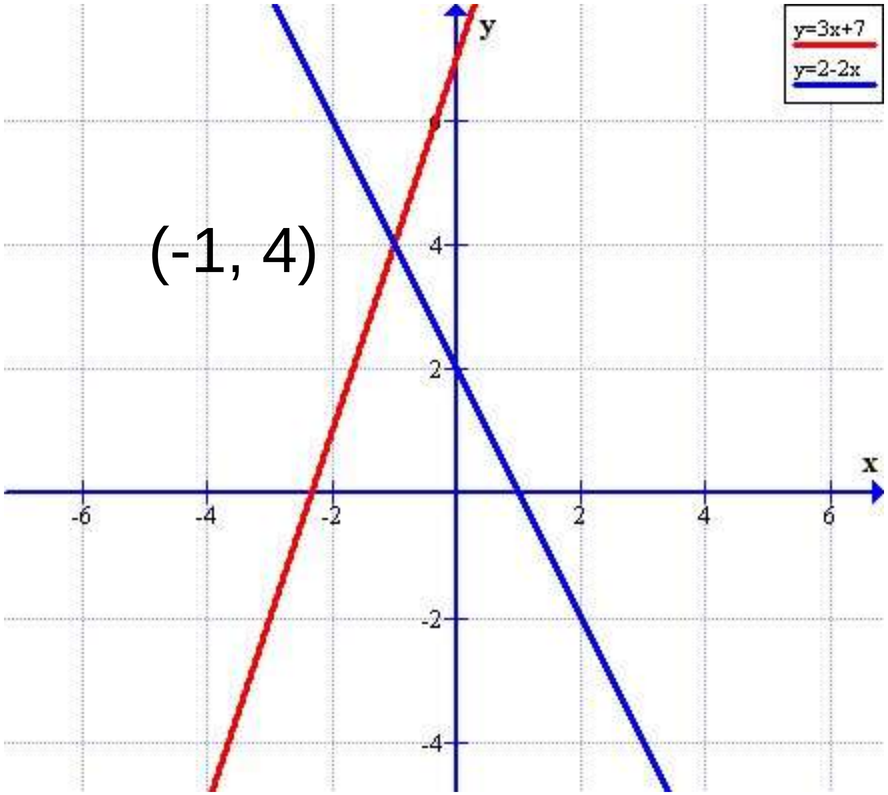
$$3x + 7 = 2 - 2x$$

$$3x + 2x = 2 - 7$$

$$5x = -5$$

$$x = -1$$

$$y = 3(-1) + 7 \quad = 4$$



Solución: (-1, 4)

Análisis de la Oferta y Demanda (Supply and Demand)

- La **oferta** (*supply*)de un artículo es la cantidad de un artículo que los productores están dispuesto cobrar a un precio p.

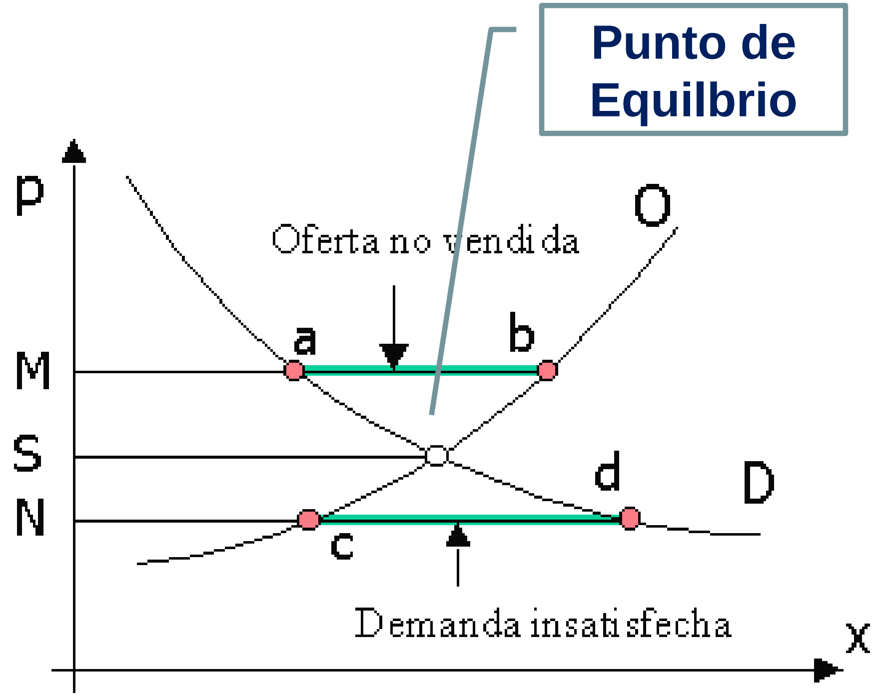
- La **demanda** (*demand*) de un artículo es la cantidad de un artículo que los consumidores están dispuesto pagar a un precio p.

- Cuando el precio de un artículo sube, la oferta aumenta pero la demanda baja.

- Cuando el precio del artículo disminuye, la demanda aumenta, pero la oferta baja.

Ecuaciones de Oferta y Demanda

- Las ecuaciones de oferta y demanda muestran la cantidad (x) de unidades de un artículo que se ofrecerán o demandarán a un precio (p).
- Típicamente la oferta crece mientras que la demanda decrece.
- La primera coordenada del punto de equilibrio es la **demanda** u **oferta de equilibrio**. Esta es la cantidad que se demandará y se ofrecerá en el precio de equilibrio.
- La segunda coordenada del punto de equilibrio es el **precio de equilibro** o el precio en el que la misma cantidad que se demanda se ofrecerá.



Oferta y Demanda

Ejemplo 2

- Encuentre la demanda y precio de equilibrio si a oferta y la demanda para un artículo en dólares está dada por:

Oferta

$$p = \frac{3}{2}x$$

Demanda

$$p = 81 - \frac{3}{4}x$$

- Solución: Resuelva el sistema:

$$\begin{cases} p = \frac{3}{2}x \\ p = 81 - \frac{3}{4}x \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}x = 81 - \frac{3}{4}x$$

$$4\left[\frac{3}{2}x\right] = 4\left[81 - \frac{3}{4}x\right]$$

$$6x = 324 - 3x$$

$$6x + 3x = 324$$

$$9x = 324$$

$$x = \frac{324}{9}$$

$$x = 36$$

Para hallar **p**, sustituya x = 36 en cualquiera de las dos ecuaciones originales:

$$p = \frac{3}{2}x$$

$$p = \frac{3}{2}(36) = 54$$

El punto de equilibrio es (36, 54)

Método de Eliminación

- Resuelva: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + 4y = 14 \end{cases}$

Multiplicar una ecuación por una constante

$$\begin{cases} 4(2x - 3y) = 4(1) \\ 3(5x + 4y) = 3(14) \end{cases} \longrightarrow$$

Sumar ambos lados de dos ecuaciones

$$\begin{cases} 8x - 12y = 4 \\ 15x + 12y = 42 \end{cases} \longrightarrow$$

$$23x = 46$$

$$x = 2$$

Sustituir el valor de x encontrado en cualquiera de las ecuaciones originales o versiones equivalentes $\longrightarrow$

$$2x - 3y = 1$$

$$2(2) - 3\text{y} = 1$$

$$-3y = 1 - 4$$

$$y = 1$$

Solución $x = 2,\ y = 1$

Solución de Sistemas con tres o más variables

- Una solución de sistemas de tres o más variables es una solución común de cada una de sus ecuaciones
- Ejemplo: (1, -5, -4) NO es solución de $\left\{\begin{array}{l} x - y + z = 0 \\ x + y + z = -8 \\ x + y - z = 2 \end{array}\right\}$
- Por que …

$$\left\{\begin{array}{l} (1) - (-5) + (-4) \text{¿} = \text{?}\, 0 \\ (1) + (-5) + (-4) \text{¿} = \text{?} -8 \\ (1) + (-5) - (-4) \text{¿} = \text{?}\, 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \textit{No} \\ \textit{Si} \\ \textit{No} \end{array}$$

- Sin embargo, (1, -4, -5) si lo es.

$$\left\{\begin{array}{l} (1) - (-4) + (-5) \text{¿} = \text{?}\, 0 \\ (1) + (-4) + (-5) \text{¿} = \text{?} -8 \\ (1) + (-4) - (-5) \text{¿} = \text{?}\, 2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \textit{Si} \\ \textit{Si} \\ \textit{Si} \end{array}$$



Ejemplo 3

- Identifique la solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{l} 4x + 3y + z = -25 \\ 4x - 5y - z = -3 \\ 2x + y + 4z = -22 \end{array}\right\}$$

a) {(-4, -3, -2)}

b) {(-4, -2, -3)}

c) {(-3, -2, -4)}

d) { }

Solución es b) {(-4, -2, -3)}

Representación de un sistema por una matriz aumentada

$$\begin{cases} x-3y+2z=17 \\ -2x+y=-19 \\ 3x-2y+z=12 \end{cases}$$

La matriz aumentada que lo representa es:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ -2 & 1 & 0 & -19 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -5y+z=1 \\ 7x+y-z=-1 \\ x+2z=1 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 & 1 \\ 7 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x+z=9 \\ -y+z=1 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 4

- ¿Cuál sistema es representado por la matriz …?

$$\begin{bmatrix} -2 & -5 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 2 & 6 \\ 6 & 0 & -9 & 5 \end{bmatrix}$$

a) $$\left\{\begin{matrix} -2x - 5y + z = -2 \\ -2x - 2y + 2z = 6 \\ 6y + y - 9z = 5 \end{matrix}\right\}$$

b) $$\left\{\begin{matrix} -2x - 5y = -2 \\ -2x - 2y + 2z = 6 \\ 6y - 9z = 5 \end{matrix}\right\}$$

c) $$\left\{\begin{matrix} -2x - 5y = -2 \\ -2x - 2y + 2z = 6 \\ 6x - 9z = 5 \end{matrix}\right\}$$

Solución es c)



Operaciones elementales por filas

- Son reglas para obtener matrices equivalentes:
  - **Intercambiar** dos filas del sistema

$$R_3 \leftrightarrow R_2$$

Intercambia fila 3 y fila 2

  - **Multiplicar** (dividir) una fila por una constante distinto de 0.

$$R_3 \rightarrow -5R_3$$

Multiplica -5 a la fila 3

  - **Reemplazar** una fila por la suma (diferencia) de esa fila y cualquier otra del sistema.

$$R_3 \rightarrow -7R_2 + R_3$$

Multiplica -7 por fila 2 y se le suma a fila 3

Estrategia General para Resolver sistemas con matrices

- Pasos a seguir:

Paso 1: Convertir sistema a una matriz aumentada

Paso 2: Usar las operaciones elementales por filas para convertir la matriz aumentada a una matriz de la **forma reducida**

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 17 \\ -2x + y - 3z = -19 \\ 3x - 2y + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ -2 & 1 & -3 & -19 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

Paso 3: Convertir la matriz aumentada reducida a un sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = 5 \end{cases}$$

El Método de Gauss-Jordan



Ejemplo 5

- Resuelva: $\begin{cases} x - 3y + 2z = 17 \\ -2x + y - 3z = -19 \\ 3x - 2y + z = 12 \end{cases}$

- Solución:
  - Primero exprese como una matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ -2 & 1 & -3 & -19 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to 2R_1 + R_2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 1 & 15 \\ 3 & -2 & 1 & 12 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to -3R_1 + R_3} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & -5 & 1 & 15 \\ 0 & 7 & -5 & -39 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{5}R_2}$$

Ejemplo 5 …

$$R_3 \to -7R_2 + R_3 \qquad\qquad R_3 \to -\frac{5}{18} R_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -3 \\ 0 & 7 & -5 & -39 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{18}{5} & -18 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 17 \\ y - \dfrac{1}{5} z = -3 \\ z = 5 \end{cases}$$

Reemplace $z = 5$ en (2):

$$y - \frac{1}{5}(5) = -3$$
$$y - 1 = -3$$
$$y = -2$$

Reemplace $y = -2$, $z = 5$ en (1):

$$x - 3(-2) + 2(5) = 17$$
$$x + 6 + 10 = 17$$
$$x = 1$$

Solución: $x = 1$, $y = -2$, $z = 5$

Estrategia para reducir matrices 3x4

Paso 1: Convertir $a_{11} = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Paso 2: Convertir $a_{21} = 0$ y $a_{31} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Paso 3: Convertir $a_{22} = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Paso 4: Convertir $a_{12} = 0$ y $a_{32} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}$$

Paso 5: Convertir $a_{33} = 1$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & 1 & a_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Paso 6: Convertir $a_{13} = 0$ y $a_{23} = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 1 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = a_{14} \\ y = a_{24} \\ z = a_{34} \end{cases}$$

Ejemplo 6

- Identifique la operación por fila que se lleva a cabo para ir de la primera matriz a la segunda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

a) $R_3 \rightarrow -1R_3$

b) $R_3 \rightarrow -1R_2 + R_1$

c) $R_3 \rightarrow R_3 + R_2$

d) $R_3 \rightarrow R_3 - R_2$

Solución es a)

Ejemplo 7

- Identifique la operación por fila que se lleva a cabo para ir de la primera matriz a la segunda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 12 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

a) $R_2 \rightarrow -1R_2$

b) $R_2 \rightarrow -1R_2 + R_1$

c) $R_2 \rightarrow -1R_1 + R_2$

d) $R_2 \rightarrow -1R_1 - 1R_2$

Solución es c)

Ejemplo 8

- Use matrices para resolver: $\begin{cases} x+5y=10 \\ x+3y=2 \end{cases}$

$$R_2 \to -1R_1 + R_2 \qquad R_2 \to -\frac{1}{2}R_2 \qquad R_1 \to -5R_2 + R_1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & -2 & -8 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad \begin{aligned} x &= -10 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Solución: **(-10, 4)**

Ejemplo 9

- Use el método de Gauss-Jordan para resolver: $\begin{cases} 3x+5y=3 \\ 5x+7y=1 \end{cases}$

$$\left|\begin{matrix} 3 & 5 & 3 \\ 5 & 7 & 1 \end{matrix}\right| \quad R_1 \to \frac{1}{3}R_1 \quad \left|\begin{matrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 5 & 7 & 1 \end{matrix}\right| \quad R_2 \to -5R_1 + R_2 \quad \left|\begin{matrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -\frac{4}{3} & -4 \end{matrix}\right| \quad R_2 \to -\frac{3}{4}R_2$$

$$\left|\begin{matrix} 1 & \frac{5}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}\right| \quad R_1 \to -\frac{5}{3}R_2 + R_1 \quad \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{matrix}\right|$$

$$x = -4$$
$$y = 3$$

Solución: **(-4, 3)**

Ejemplo 10

- Resuelva por el método de Gauss-Jordan
- Si el sistema se traduce a una matriz aumentada y se reduce a forma triangular, se obtiene:

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 17 \\ -2x + y - 3z = -19 \\ 3x - 2y + z = 12 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & 17 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to 3R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \tfrac{7}{5} & 8 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_1 \to -\tfrac{7}{5} R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\tfrac{1}{5} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to \tfrac{1}{5} R_3 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$x = 1, y = -2, z = 5$

Solución: **(1, 2, 5)**



Problemas Verbales con Sistemas

Pasos a seguir:

- Paso 1 – Identifique las variables
- Paso 2 – Establezca el sistema
- Paso 3 – Resuelva el sistema
- Paso 4 – Exprese solución

Ejemplo:

- El costo de producir x unidades de un producto está dado por $C = 3x + 500$. Si los artículos se venden a $5 cada uno, ¿cuántos deberán producirse a fin de lograr una utilidad (ganancia) semanal igual a $300 más el 10% de los costos de producción?
- Paso 1 – Identifique variables:
  - x = número de unidades del producto
  - g = ganancia (utilidad) semanal

Ejemplo …

- Paso 2 – Establezca sistema
  - La ganancia (utilidad) es la diferencia de la ventas menos los costos de producción. De manera que al producir y vender x artículos:

Ganancia = Venta a \$5 − Costo

$$g = 5x - (3x + 500)$$

$$g = 2x - 500$$

Ganancia = 300 + 10% del Costo

$$g = 300 + .10(3x + 500)$$

$$g = 350 + 0.3x$$

- Por tanto, el sistema es:

$$\begin{aligned} 2x - g &= 500 \\ 0.3x - g &= -350 \end{aligned}$$

- Paso 3 – Resuelva sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 500 \\ 0.3 & -1 & -350 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 500 \end{bmatrix} \qquad x = 500, y = 500$$

- Paso 4 – Exprese solución
- Debe producirse 500 unidades del producto.

…… Esto logrará una ganancia de \$500



Actividades 2.2

- **Texto:** Capítulo 8 - Sección 8.3 – Solución de Sistemas Lineales por Reducción de Renglones.
- **Ejercicios de Práctica**: Páginas 341, 342; problemas impares 1 al 17.
- **Asignación 2.2**: Página 342, problemas 8 y 18
- **Referencias del Web:**
  - Resolviendo de Sistemas por Gauss-Jordan (You tube)
  - Using Matrices to Solve Systems of Equations; Part A: Setting Up a System & Doing Row Operations
  - Eliminación Gaussiana
  - Matrices: http://personal5.iddeo.es/ztt/Tem/T6_Matrices.htm