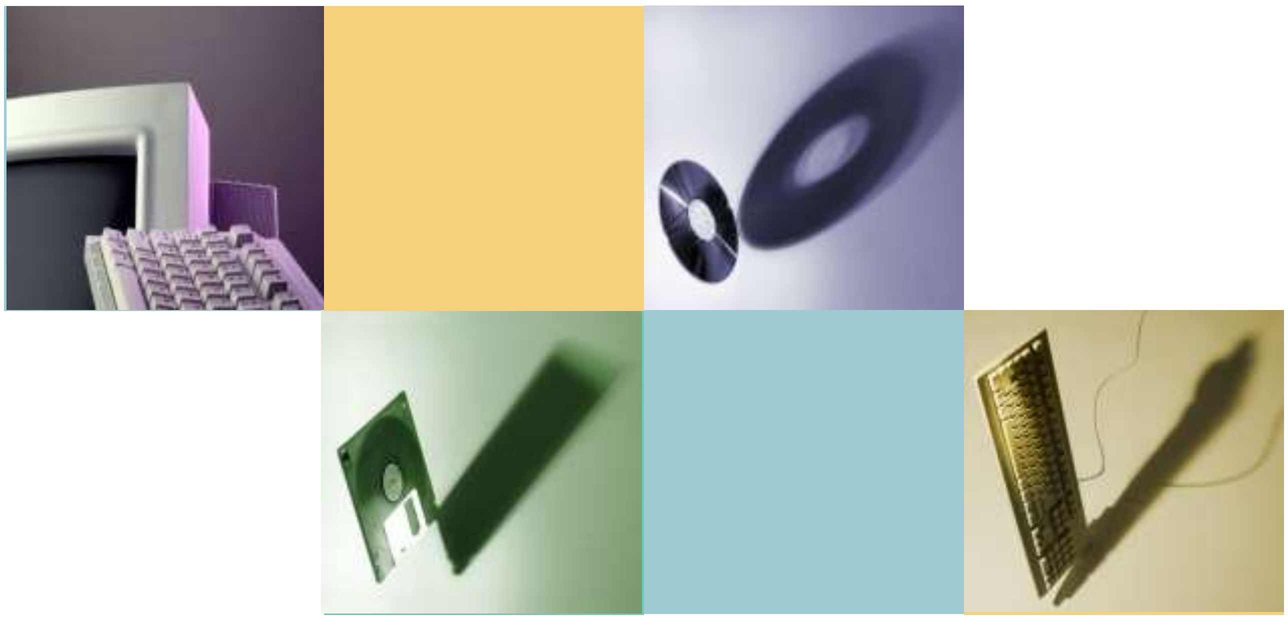
MATE3012 – Lección 3.1



La Inversa de una Matriz y Ecuaciones Matriciales

Actividad 3.1

- **Texto:** Capítulo 9 - Sección 9.1 – La inversa de una matriz.
- **Ejercicios de Práctica**: Páginas 361, 362; problemas impares 1 al 23.
- **Asignación 3.1**: Página 362, problemas 14 y 24
- **Referencias del Web:**
- **Referencias:**
- Cálculos con matrices: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html

Matriz identidad

- La matriz identidad t es la matriz n x n para la cual cada elemento de la diagonal principal es 1 y para la cual los otros elementos son 0

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 1

- Multiplique

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Inversa de una Matriz

- Sea A una matriz cuadrada n x n. Si existe una matriz B de dimensión n x n, tal que:

$$AB = I_n \qquad AB = I_n$$

- … donde I_n es la matriz identidad n x n
- Entonces decimos que B es la **matriz inversa** de A y se representa por:

$$\mathbf{A^{-1}}$$

- Por tanto:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

Ejemplo 2

- Compruebe B es la matriz inversa de A.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

- Solución:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- De modo que:

$$B = A^{-1}$$

Determinando la matriz inversa

- Calcule la matriz inversa de $\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix}$

- Paso 1 – Construya matriz n x 2n añadiendo la matriz identidad I_n a la derecha de la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Determinando la matriz inversa …

- Paso 2 – Use las operaciones elementales por filas para reducir la matriz original.

$$R_2 \to -2R_1 + R_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -3 & 6 & 15 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_3 \to 3R_1 + R_3 \qquad R_1 \to 2R_2 + R_1 \qquad R_3 \to \tfrac{1}{3}R_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Determinando la matriz inversa …

$R_3 \to \frac{1}{3} R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

$R_2 \to -2R_3 + R_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{array}\right]$$

Por tanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & \frac{-2}{3} \\ 1 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Una matriz singular

- Una matriz que no tiene inversa se llama **singular**.
- Por ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

[Pivot and Gauss-Jordan Tool](#)

Row Operation	x1	x2	x3	x4	x5	
	1	0	1	2/ 7	3/ 7	0
	0	1	3	-1/ 7	2/ 7	0
	0	0	0	-1/ 7	-5/ 7	1

Ecuaciones Matriciales

- Considere el sistema

$$\begin{cases} x - 2y - 4z = 7 \\ 2x - 3y - 6z = 5 \\ -3x + 6y + 15z = 0 \end{cases}$$

- Es equivalente a la ecuación matricial:

Matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 2 & -3 & -6 \\ -3 & 6 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$AX = B$$

Resolución de Ecuaciones Matriciales

- Observe que:

En forma resumida ….

$$AX = B$$

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}(B)$$

$$\left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B$$

$$IX = A^{-1}B$$

$$X = A^{-1}B$$

$$AX = B$$

$$X = A^{-1}B$$

Ejemplo 3

- Resuelva el sistema $\begin{cases} 2x - 5y = 15 \\ 3x - 6y = 36 \end{cases}$
- Solución:
- Paso 1 – Exprese el sistema como una ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 3 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

- Paso 2: Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -5 & 1 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & \frac{5}{3} \\ 0 & 1 & -1 & \frac{2}{3} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$



Solución del Ejemplo 3 …

- Paso 3: Calcule la matriz variable.

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 15 \\ 36 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 9 \end{bmatrix}$$

Solución: $x = 30$, $y = 9$ o $(30, 9)$

Ejemplo 4

- Resuelva:
- Solución:

$$\begin{cases} 3x = 1 - 2y \\ -3 - y + 2x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$$

- Paso 1 – Exprese el sistema como una ecuación matricial.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- Paso 2: Calcule la matriz inversa de la matriz de coeficientes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 1 & 0 \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

Solución del Ejemplo 3 …

- Paso 3: Calcule la matriz variable.

$$X = A^{-1}B$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

Solución: $x = 1, y = \frac{1}{7}$ o $(1, \frac{1}{7})$

Actividad 3.1

- **Texto:** Capítulo 9 - Sección 9.1 – La inversa de una matriz.
- **Ejercicios de Práctica**: Páginas 361, 362; problemas impares 1 al 23.
- **Asignación 3.1**: Página 362, problemas 14 y 24
- **Referencias del Web:**
- **Referencias:**
- Cálculos con matrices: http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd99/ed99-0289-02/ed99-0289-02.html