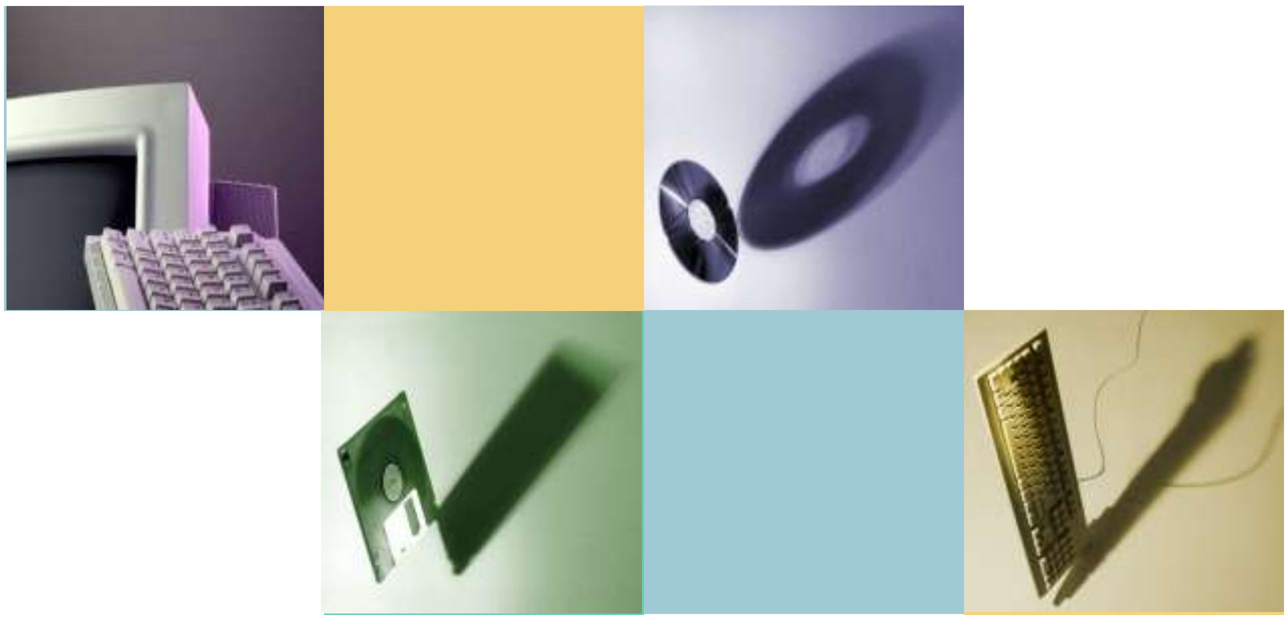
MATE3012 – Lección 3.2



Resolviendo problemas verbales con Matrices

Actividad 3.2

- **Asignación 3.2**: Página 333, problema 42; página 342, problema 22; página 348, problema 21
- **Referencias del Web:**
- **Referencias:**
- Prof. Evelyn Dávila - Aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones y Matrices
- Esteban Hernández – Aplicaciones de *matrices* - Titulo V

Representación de Problemas por matrices

- Una compañías produce dos productos P1 y P2. En un día se producen 2 y 5 respectivamente.

$$\begin{array}{cc} P1 & P2 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- Se produce tres productos P1, P2 y P3. En un día se producen 2, 9 y 5 respectivamente.

$$\begin{array}{ccc} P1 & P2 & P3 \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

- Se produce tres productos P1, P2 y P3 de dos tamaños T1 y T2. En un día se producen 2, 9 y 5 del tamaño T1 y 8, 7 y 10 del segundo.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} P1 & P2 & P3 \end{array} \\ \begin{array}{c} T1 \\ T2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 9 & 5 \\ 8 & 7 & 10 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Tres vendedores, Pérez, Román y Torres, venden dos modelos de autos: básico o deportivo.
  - Si respectivamente venden en un mes un total de 3, 4 y 2 modelos básicos y 1, 2 y ninguno. Entonces …

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Pérez} & \text{Román} & \text{Torres} \end{array} \\ \begin{array}{c} \text{Básico} \\ \text{Deportivo} \end{array} & \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$



Representación por productos de matrices

- La producción de un objeto requiere 3 horas de ensamblaje y 1 horas de terminación. Si los empleados de ensamblaje cobra $9 la hora y los de terminación cobran $6 la hora

$$\begin{array}{cc} \text{Ensamblaje} & \text{Terminación} \\ \multicolumn{2}{c}{\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}} \end{array} \qquad \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Costo por hora de ensamblaje} \\ \text{Costo por hora por terminación} \end{array} \end{array}$$

- Observe que el costo total de producir el objeto se puede expresar por el producto:

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (3)(9) + (1)(6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 33 \end{bmatrix}$$

- El costo total para producir el objeto será $33.

Ejemplo 1

- La construcción de una casa requiere 2 unidades de concreto, 3 unidades de madera y 4 unidades piedra. Si el costo por unidades de concreto es $75, por madera $40 y por piedra $ 25, use el producto de matrices para calcular el costo total por construir una casa.

$$\begin{array}{ccc} \text{Concreto} & \text{Madera} & \text{Piedra} \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{cl} \begin{bmatrix} 75 \\ 40 \\ 25 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \text{Costo por unidad de concreto} \\ \text{Costo por unidad de madera} \\ \text{Costo por unidad de piedra} \end{array} \end{array}$$

- El costo total por construir una casa se expresa por el producto:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} 75 \\ 40 \\ 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (2)(75) + (3)(40) + (4)(25) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 370 \end{bmatrix}$$

- El costo total para producir el objeto será $370.

Problemas Verbales

Pasos a seguir:

- Paso 1 – Identifique la(s) variable(s)
- Paso 2 – Establezca la ecuación o el sistema
- Paso 3 – Resuelva la ecuación o el sistema
- Paso 4 – Exprese solución

Ejemplo 1

- El costo de producir x unidades de un producto está dado por $C = 3x + 500$. Si los artículos se venden a \$5 cada uno, ¿cuántos deberán producirse a fin de lograr una utilidad (ganancia) semanal igual a \$300 más el 10% de los costos de producción?
- Solución:
- Paso 1 – Identifique variables:
  - x = número de unidades del producto
  - g = ganancia (utilidad) semanal
- Paso 2 – Establezca sistema
  - La ganancia (utilidad) es la diferencia de la ventas menos los costos de producción.

Ejemplo 1 …

Ganancia $=$ Venta a \$5 $-$ Costo

$$g = 5x - (3x + 500)$$

$$g = 2x - 500$$

Ganancia $=$ $300 +$ 10% del Costo

$$g = 300 + .10(3x + 500)$$

$$g = 350 + 0.3x$$

- Por tanto, el sistema es:

$$\begin{aligned} 2x - g &= 500 \\ 0.3x - g &= -350 \end{aligned}$$

- Paso 3 – Resuelva sistema

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 500 \\ 0.3 & -1 & -350 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 500 \\ 0 & 1 & 500 \end{bmatrix} \qquad x = 500, y = 500$$

- Paso 4 – Exprese solución
- Debe producirse 500 unidades del producto.

…… *Esto logrará una ganancia de \$500*



Ejemplo 2

- (pág. 348, problema 19) Una pequeña compañía constructora ofrece tres tipos de casas. El primer tipo de casa requiere 3 unidades de concreto, 2 unidades de madera para cancelería y 5 unidades de madera para estructuras. Los tipos segundo y tercero requieren 2, 3, 5 y 4, 2, 6 unidades respectivamente, de concreto, madera para cancelería y madera para estructuras. Si cada mes la compañía dispone de 150 unidades de concreto, 100 unidades de madera para cancelería y 250 unidades de madera para estructuras, calcule el número de diferentes tipos de casas que la compañía podría construir al mes si usa todos los materiales que dispone.
- Solución:
- Paso 1 – Identificar variables
  - Sea x el número de casas del primer tipo
  - Sea y el número de casas del segundo tipo
  - Sea z el número de casas del tercer tipo

Ejemplo 2 …

- Paso 2 – Establece sistema
  - Identifique las cantidades de los diferentes ingredientes que contribuyen cada casa.
  - Estas cantidades deben ser igual al total de la cantidad disponible de ese ingrediente.

	Casa 1		Casa 2		Casa 3	Total
Concreto	$3x$	$+$	$2y$	$+$	$4z$	$= 150$
Madera cancelería	$2x$	$+$	$3y$	$+$	$2z$	$= 100$
Madera estructuras	$5x$	$+$	$5y$	$+$	$6z$	$= 250$

- Paso 3 - Resuelva Sistema

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 & 150 \\ 2 & 3 & 2 & 100 \\ 5 & 5 & 6 & 250 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 8/5 & 50 \\ 0 & 1 & -2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x + \frac{8}{5} z = 50$$

$$y - \frac{2}{5} z = 0$$

Soluciones:

$$\boldsymbol{x} = -\frac{8}{5} z + 50$$

$$\boldsymbol{y} = \frac{2}{5} z$$

$$\boldsymbol{z} = cualquiera$$



Ejemplo 2 …

- Paso 4 – Expresa la solución
  - Observe que las soluciones representan casas y por tanto deben ser cantidades enteras positivas.
  - Para lograr cantidades enteras z debe ser 0 o múltiplos de 5 menor o igual que 30.

Si $z = 0$ $\quad \boldsymbol{x} = -\frac{8}{5}z + 50 = 50 \quad \mathbf{y} = \frac{2}{5}z = 0$

Si $z = 5$ $\quad \boldsymbol{x} = -\frac{8}{5}z + 50 = 42 \quad \mathbf{y} = \frac{2}{5}z = 2$

Si $z = 10$ $\quad \boldsymbol{x} = -\frac{8}{5}z + 50 = 66 \quad \mathbf{y} = \frac{2}{5}z = 4$

$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$

Si $z = 30$ $\quad \boldsymbol{x} = -\frac{8}{5}z + 50 = 2 \quad \mathbf{y} = \frac{2}{5}z = 12$

Ejemplo 3

- Una compañía ofrece tres tipos de aviones para una excursión: Nave 100, Nave 200, Nave 300. Cada avión tiene tres tipos de asientos: turista, económico, y primera clase. El número de asientos en cada se muestra abajo. También se muestra el número de reservaciones que puede aceptar. ¿Cuántos aviones de cada tipo debe la compañía volar para llenar todos sus asientos?

$$\begin{array}{l c} & \begin{array}{ccc} \text{N100} & \text{N200} & \text{N300} \end{array} \\ \begin{array}{l} \text{Turista} \\ \text{Económico} \\ \text{Primera} \end{array} & \begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} \end{array} \qquad \begin{array}{l c} & \text{Número de reservaciones} \\ \begin{array}{l} \text{Turista} \\ \text{Económico} \\ \text{Primera} \end{array} & \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Solución:
- Paso 1 - Identifique variables
  - Sean *N1*, *N2* y *N3* el número necesario de aviones de cada tipo
- Paso 2 - Establezca sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 50N1 + 75N2 + 40N3 &= 305 \\ 30N1 + 45N2 + 25N3 &= 185 \\ 32N1 + 50N2 + 30N3 &= 206 \end{aligned}$$

Total de reservaciones de cada tipo

Ejemplo 3 …

- Paso 3: Resuelva Sistema
  - Establezca ecuación matricial

$$\begin{bmatrix} 50 & 75 & 40 \\ 30 & 45 & 25 \\ 32 & 50 & 30 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix}$$

  - Resuelva Ecuación Matricial
    1. Encontrar matriz inversa de la matriz de coeficientes

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 50 & 75 & 40 & 1 & 0 & 0 \\ 30 & 45 & 25 & 0 & 1 & 0 \\ 32 & 50 & 30 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2.5 & -0.75 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2.2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 & -0.6 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

    2. Multiplicar ambos lados por matriz inversa de la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} N1 \\ N2 \\ N3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2.5 & -0.75 \\ 1 & -2.2 & 0.5 \\ -0.6 & 1 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 305 \\ 185 \\ 206 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- Paso 4 – Exprese solución
  - Se necesitan 3 aviones N1, 1 avión N2 y 2 aviones N3

Ejemplo 4

- Dos metales, cobre y hierro se pueden extraerse de dos tipos de minerales, P y Q. Cien libras de mineral P producen 3 onzas cobre y 5 onzas de hierro y cien libras de mineral Q producen 4 onzas de cobre y 2.5 hierro. ¿Cuántas libras de minerales P y Q se requerirán para producir 72 onzas de cobre y 95 onzas de hierro?
- Solución
- Paso 1 – Identifique Variables:
  - p = # libras del mineral P, q = # libras del mineral Q
- Paso 2 – Establezca sistema de ecuaciones
- Si 100 libras del mineral P producen 3 onzas de cobre y 5 onzas de hierro, entonces, 1 libra del metal P producen 0.03 onzas de cobre y 0.05 onzas de hierro.
- Similarmente, 1 libra del metal Q produce 0.04 onzas del metal X y 0.025 onzas del metal Y. De manera que:

Total de oz de X

Total de oz de Y

$$\mathbf{0.03}\boldsymbol{p} + \mathbf{0.05}\boldsymbol{q} = \mathbf{72}$$
$$\mathbf{0.04}\boldsymbol{p} + \mathbf{0.025}\boldsymbol{q} = \mathbf{95}$$

Ej 4 – Paso 3 (Ecuaciones Matriciales)

- Paso 3 – Resuelva Sistema por Ecuaciones Matriciales:
  - Establezca ecuación matricial:

$$\begin{bmatrix} .03 & .05 \\ .04 & .025 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72 \\ 95 \end{bmatrix}$$

  - Resuelva Ecuación Matricial
    - Encuentre matriz inversa de la matriz de coeficientes

$$\left[\begin{array}{cc|cc} .03 & .05 & 1 & 0 \\ .04 & .025 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -20 & 40 \\ 0 & 1 & 32 & -24 \end{array}\right]$$

    - Multiplicar ambos lados por matriz inversa de la matriz de coeficientes

$$\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 40 \\ 32 & -24 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 72 \\ 95 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2360 \\ 24 \end{bmatrix}$$

- Paso 4 – Exprese solución
  - Se necesitarán 2,360 libras del mineral de P y 24 libras del mineral Q

Ej 4 – Paso 3 (Gauss-Jordan)

- Paso 3 – Resuelva Sistema usando las operaciones elementales por filas (método de Gauss-Jordan):
  - Establezca matriz aumentada: $\begin{bmatrix} .03 & .05 & | & 72 \\ .04 & .025 & | & 95 \end{bmatrix}$
  - Aplique el método de Gauss-Jordan
    - Use operaciones elementales por filas

$$\begin{bmatrix} .03 & .05 & | & 72 \\ .04 & .025 & | & 95 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 2360 \\ 0 & 1 & | & 24 \end{bmatrix}$$

    - Por tanto, $p = 2360, q = 24$

- Paso 4 – Exprese solución
  - Se necesitarán 2,360 libras del mineral de P y 24 libras del mineral Q

Ejemplo 5

- Identifique las variables y el sistema que representa el siguiente problema:
  "*Una empresa elabora tres productos, A, B y C, los cuales deben procesarse por tres máquinas I, II y III. Una unidad de A requiere 3, 1,8 horas de procedimientos en las máquinas; mientas que una unidad de B requiere 2, 3, 3 y una unidad de C necesita 2, 4 y 2 horas de procesamiento en las máquinas. Se dispone de las máquinas I, II y III por 800, 1200 y 1300 horas, respectivamente. ¿Cuántas unidades de cada producto pueden elaborarse usando todo el tiempo disponible porlas máquinas* "
- Solución:

Variables:
x = El número de unidades del producto A que se pueden elaborar por la **máquina I**
y = El número de unidades del producto A que se pueden elaborar por la **máquina** II
z = El número de unidades del producto A que se pueden elaborar por la **máquina III**

Sistema:

$$\begin{aligned} 3x + 2y + 2z &= 800 \\ x + 3y + 4z &= 1200 \\ 8x + 3y + 2z &= 1300 \end{aligned}$$

Actividad 3.2

- **Asignación 3.2**: Página 333, problema 42; página 342, problema 22; página 348, problema 21
- **Referencias del Web:**
- **Referencias:**
- Prof. Evelyn Dávila - Aplicaciones de Sistemas de Ecuaciones y Matrices
- Esteban Hernández – Aplicaciones de *matrices* - Titulo V