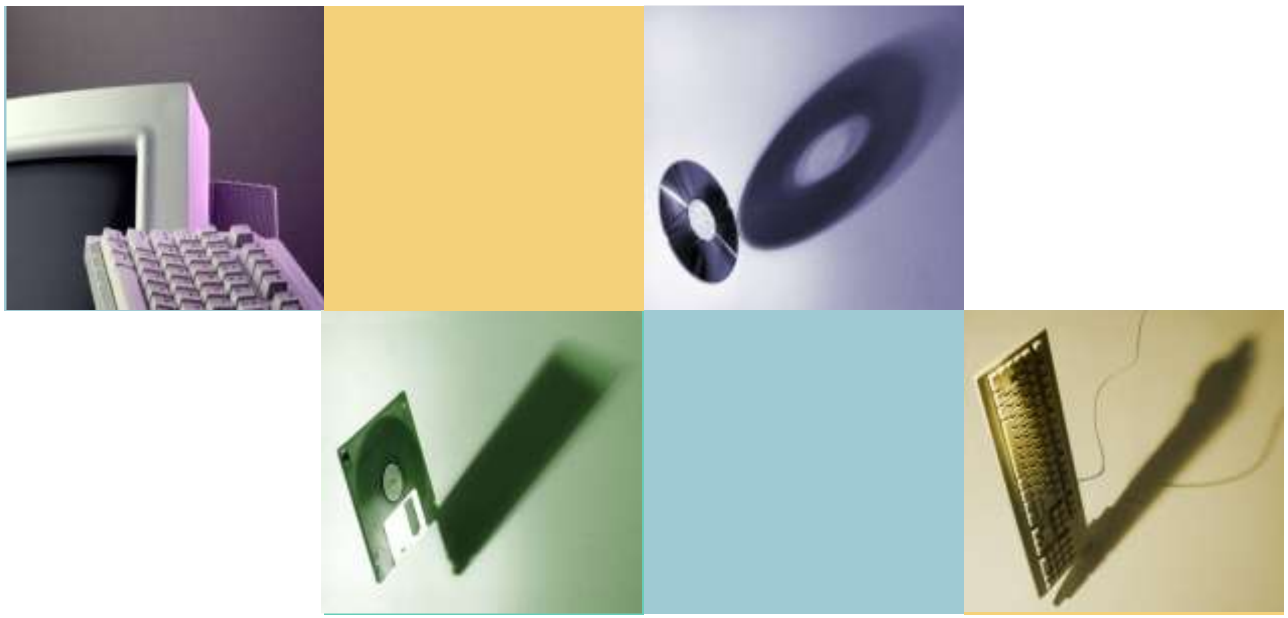
MATE3012 – Lección 3.3



Determinantes y la Regla de Cramer

Actividad 3.3

- **Texto:** Capítulo 9 - Sección 9.4 – Determinantes.
- **Ejercicios de Práctica**: Páginas 387, 388; problemas impares 1 al 49.
- **Asignación 3.3**: Página 387, problemas 14, 20 y 36
- **Referencias del Web:**
- **Referencias:**:
  - Julio Profe - Sistema de 3x3 resuelto por Regla de Cramer (You tube – Hace uso de la Regla de Sarrus para calcular determinantes de sistemas 3x 3)
  - Khan Academy: Finding the Determinant of a 2x2 matrix; Finding the determinant of a 3 x 3 nethod 2;

El Determinante de una Matriz 2×2

- Asociado con toda matriz cuadrada hay un número real llamado su **determinante** que se abrevia como det *A* ó por el símbolo Δ.
- El determinando de una matriz cuadrada 2 x 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

- se define como

$$\mathbf{det}\ \boldsymbol{A} = \boldsymbol{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}\ .$$

Ejemplo 1

- Encuentre el determinante de A, si

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= -3(8) - 6(4)$$

$$= -48$$

- Calcule $\det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$

$$= 1(-5) - 2(3)$$

$$= -11$$

- Calcule $\det \begin{bmatrix} 3x & x \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$= 3x(2) - 1(x)$$

$$= 5x$$

El Determinante de una Matriz 3 × 3

- Si $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})$$

- Donde cada cantidad dentro del parentesis representa el determinante de la matriz 2 × 2 (llamado el **menor** y representado por $\boldsymbol{M_{ij}}$) que es parte de la matriz 3 × 3 matrix que permanece cuando se suprime la fila $\boldsymbol{i}$ columna $\boldsymbol{j}$ que contiene el elemento a_{ij}.
- Su **cofactor** es igual a: $\boldsymbol{A_{ij}} = (-1)^{i+j} \cdot \boldsymbol{M_{ij}}$ **.**
- (Teorema) El determinante de una matriz puede encontrarse multiplicando los elementos en cualquier renglón (o columna) por sus cofactores, y sumando los productos correspondientes a todos los elementos en el renglón (o columna considerada)



Ejemplo 2

- Evalue el determinante de la matriz siguiente desarrollando por la segunda columna.

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

- **Solución**
- Encuentre los menores en la segunda columna:

$$M_{12} = \det \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = -1(2) - (-1)(-3) = -5$$

$$M_{22} = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 2(2) - (-1)(-2) = 2$$

$$M_{32} = \det \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2(-3) - (-1)(-2) = -8$$

- Encuentre los cofactores:

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = (-1)^{3} \cdot (-5) = 5$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = (-1)^{4} \cdot (2) = 2$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot M_{32} = (-1)^{5} \cdot (-8) = 8$$

- Calcule el determinante:

$$\begin{aligned} \det A &= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} \\ &= -3(5) + (-4)(2) + (0)(8) = -23 \end{aligned}$$



Ejemplo 3

- Encuentre el determinante de la matriz: $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

- **Solución**
- Paso 1 - Encuentre los menores desarrollmado la primera columna:

$$M_{11} = 1(1) - (2)(-1) = 3$$

$$M_{21} = -1(1) - (2)(2) = -5$$

$$M_{31} = -1(-1) - (1)(2) = -1$$

- Paso 2 - Encuentre los cofactores:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot M_{11} = 3$$

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \cdot M_{21} = -(-5) = 5$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot M_{31} = -1$$

- Calcule el determinante:

$$\det A = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$$

$$= 3(3) + 2(5) + 1(-1)$$

$$= 18$$

Ejemplo 4

- Encuentre el cofactor del elemento a_{34}

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Solución:

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \cdot M_{34} \quad = 34$$

$$= (-1) \cdot det \begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 \\ 7 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Desarrollando en la tercera columna ya tiene más valores de 0 …

$$= (-1) \cdot [\ \ 7(7(2) - (-3)(2) \qquad + 0(4(2) - (-3)(0)) \ - 0\big(4(2) - 7(0)\big) \ ]$$

$$= (-1) \cdot [\ \ 7(20) \qquad + 0 \ \ - 0$$

$$= \mathbf{-140}$$

Ejemplo 5

- Encuentre el determinante de la matriz:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 7 & -1 \\ 7 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & -2 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- **Solución**
- Paso 1 - Encuentre los menores desarrollando en la columna que más ceros contiene. En este caso use la columna 3:

$$a_{13}A_{13} = 7\cdot(-1)^{1+3}\cdot M_{13} = 7det\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 7[7\{-2(0)-(2)(-2)\} - 0\{2(0)-(2)(1)\} + -3\{2(-2)-(-2)(1)\}] = \mathbf{238}$$

$$a_{23}A_{23} = 0\cdot(-1)^{2+3}\cdot M_{13} = \mathbf{0}$$

$$a_{33}A_{33} = 4\cdot(-1)^{3+3}\cdot M_{13} = 4\,det\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 7 & 2 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 4[0\{7(0)-(-3)(1)\} - 2\{4(0)-(-3)(-1)\} + 2\{4(1)-(7)(-1)\}] = \mathbf{112}$$

$$a_{43}A_{43} = 0\cdot(-1)^{4+3}\cdot M_{13} = \mathbf{0}$$

$$\det A = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} + a_{43}A_{43} = \mathbf{350}$$

La Regla de Cramer para sistemas 2 × 2

En un sistema de dos variables:

$$\begin{array}{rcrcl} a_1 x & + & b_1 y & = & c_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & = & c_2\ , \end{array}$$

Su solución está dada por:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D},$$

donde:

$$D_x = \det\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}, \quad D_y = \det\begin{bmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{bmatrix}, \quad \text{and } D = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Si $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ pero $D = 0$ el sistema **NO tiene solución**:

Si $D_x = 0$, $D_y = 0$ y $D = 0$ el sistema tiene un **número infinito de soluciones**

Ejemplo 6

Use la Regla de Cramer para resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 5x &+ 7y &= -1 \\ 6x &+ 8y &= 1 \end{aligned}$$

Solución:

Por Cramer, $x = \frac{D_x}{D}$, $y = \frac{D_y}{D}$.

$$D = \det \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} = 5(8) - 6(7) = -2$$

$$D_x = \det \begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & 8 \end{bmatrix} = (-1)(8) - (1)(7) = -15$$

$$D_y = \det \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = (5)(1) - (6)(-1) = 11$$

Por tanto,

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-15}{-2} = \frac{15}{2}$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{11}{-2} = -\frac{11}{2}$$

La Regla de Cramer para sistemas 3 × 3

En un sistema de dos variables:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 x & + & b_1 y & + & c_1 z & = & d_1 \\ a_2 x & + & b_2 y & + & c_2 z & = & d_2 \\ a_3 x & + & b_3 y & + & c_3 z & = & d_3 \,, \end{array}$$

Su solución está dada por: $x = \frac{D_x}{D}, \quad y = \frac{D_y}{D}, \quad \text{and} \quad z = \frac{D_z}{D},$

donde:

$$D_x = \det\begin{bmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}, \qquad D_y = \det\begin{bmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{bmatrix},$$

$$D_z = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{bmatrix}, \quad \text{and} \quad D = \det\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \neq 0.$$

Si $D_x \neq 0$, $D_y \neq 0$ pero $D = 0$ el sistema **NO tiene solución**:

Si $D_x = 0$, $D_y = 0$ y $D = 0$ el sistema tiene un **número infinito de soluciones**



Actividad 3.3

- **Texto:** Capítulo 9 - Sección 9.4 – Determinantes.
- **Ejercicios de Práctica**: Páginas 387, 388; problemas impares 1 al 49.
- **Asignación 3.3**: Página 387, problemas 14, 20 y 36
- **Referencias del Web:**
- **Referencias:**:
  - Julio Profe - Sistema de 3x3 resuelto por Regla de Cramer (You tube – Hace uso de la Regla de Sarrus para calcular determinantes de sistemas 3x 3)
  - Khan Academy: Finding the Determinant of a 2x2 matrix; Finding the determinant of a 3 x 3 nethod 2;