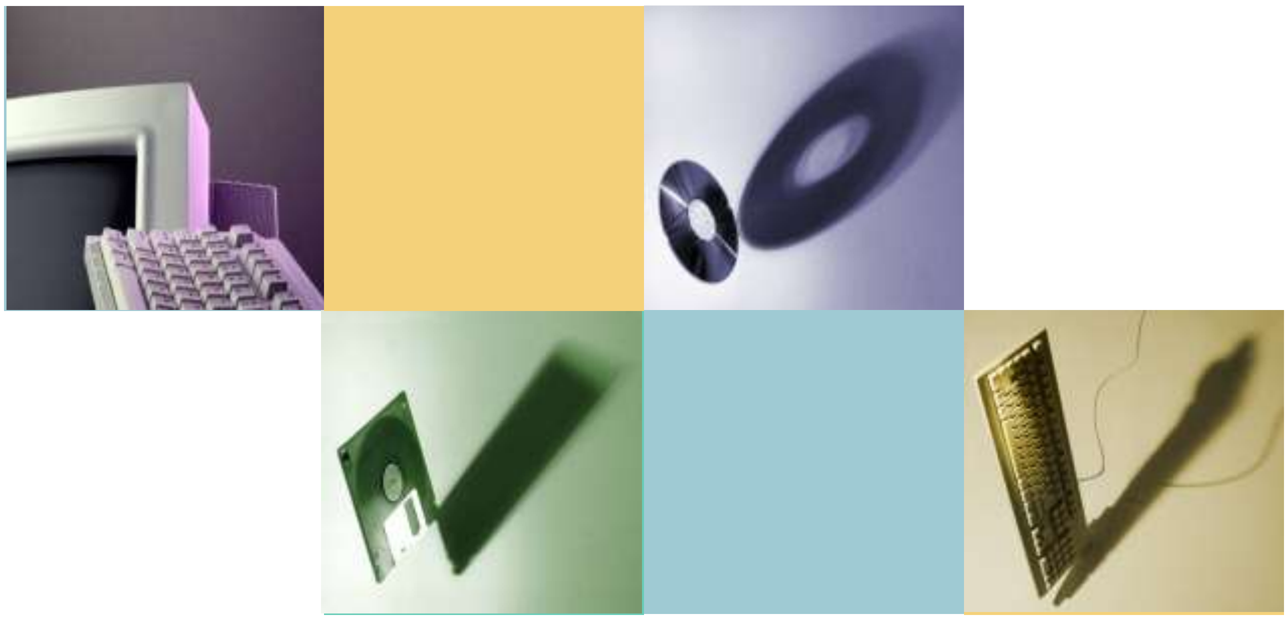
Unidad 1 - Lección 1.1



Introducción a Límites

Actividades 1.1

- **Referencia del texto**: Sección 11.2: Límites; Ejemplos del 1 al 6; problemas impares 1 – 41; página 459 (4ta. Ed Página 466): .
- **Asignación 1.1:** Página 459 (4ta. Ed Página 466): problemas 20, 34, 38 Use GRAPH para graficar las función del problema 34.
- **Referencias del Web**:
  - Michael Kelleys Calculus-Help.com –
    - What is a limit
    - When Does a Limit Exists
    - How do you find a Limit?
  - Visual Calculus - Introduction to Limits
  - Paul Online Notes – Calculus - The Limit

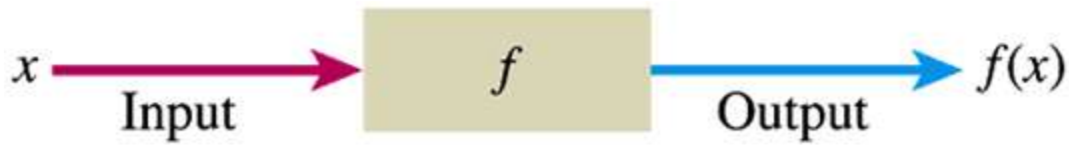
Objetivos

Al finalizar esta lección podrás:

- Determinar gráficamente si existe el límite de una función en un punto.
- Calcular el límite de una función usando su gráfica.
- Calcular el límite de una función usando las propiedades de límites
- Calcular el límite de una función usando las propiedades de límites.
- Calcular el límite a un cero común del numerador y denominador de una función racional.

¿Qué es un límite?

- Considere una función f



- Cuando tomamos valores de x cercanos a un valor "***a***", … , ¿qué pasa con los valores correspondientes de f(x)?

$$\lim_{x \to a} f(x) = ?$$

Definición (intuitiva) del Límite

- El **límite de una función f en x** es igual a un valor L mientras x se acerca a un valor a, si y sólo si los valores correspondientes de la función en x se acercan al valor de L.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

El límite de f mientras que x toma valores ***menores*** *o "por la* ***izquierda****" existe y es L*

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

El límite de f mientras que x toma valores ***mayores*** *o "por la* ***derecha****" existe y es L*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Ejemplo 1

- Considere la función H siguiente:

$$H(x) = \begin{cases} 2x+2 & for \quad x<1 \\ 2x-4 & for \quad x \geq 1 \end{cases}$$

- Determine cada uno de los siguientes límites, si existen. De lo contrario, indíquelo.

  a) $\lim\limits_{x \to 1} H(x)$

  b) $\lim\limits_{x \to -3} H(x)$

Solución de Ejemplo 1 (a) $\lim_{x\to 1} H(x)$

- Primero aproxime 1 por la izquierda $\lim_{x\to 1^-} H(x)$
- Tome valores de x cada vez más cerca a 1.

$x \to 1^-$	0	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999
$H(x)$	2	3	3.6	3.8	3.98	3.998

$$\lim_{x\to 1^-} H(x) = 4.$$

- Ahora, aproxime 1 por la derecha $\lim_{x\to 1^+} H(x)$

$x \to 1^+$	2	1.8	1.1	1.01	1.001	1.0001
$H(x)$	0	–0.4	–1.8	–1.98	–1.998	–1.9998

$$\lim_{x\to 1^+} H(x) = -2.$$



Solución del Ejemplo 1(a) $\lim_{x \to 1} H(x)$

- Como

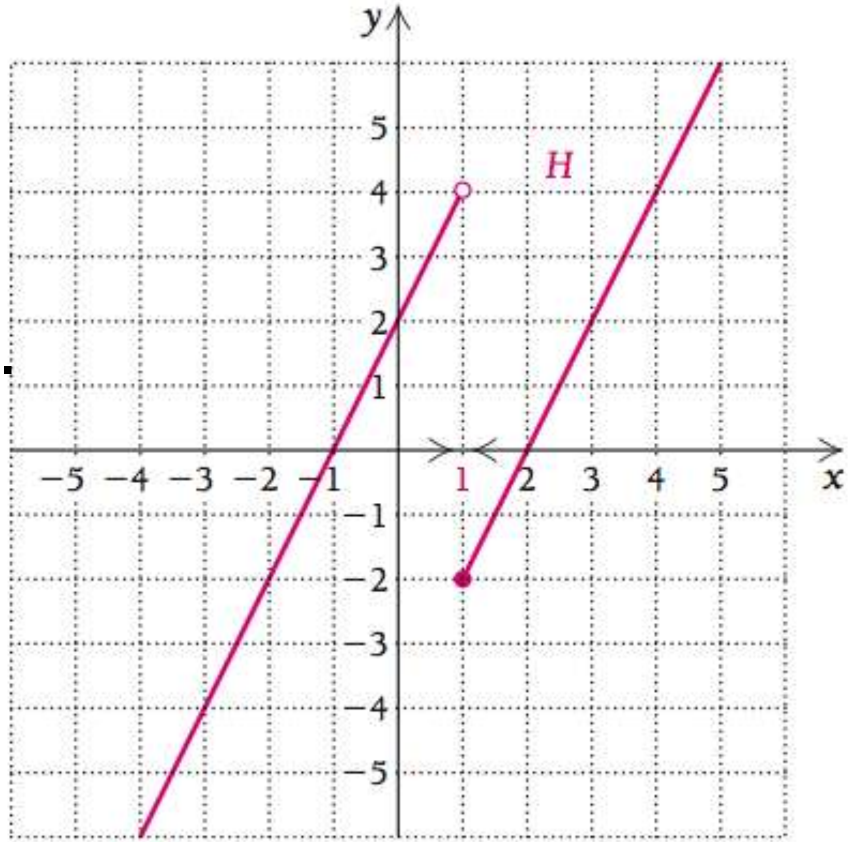
$$\lim_{x \to 1^-} H(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) = -2$$

- El $\lim_{x \to 1} H(x)$ no existe.

- Grafique

$$H(x) = \begin{cases} 2x+2 & for \quad x < 1 \\ 2x-4 & for \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Solución de Ejemplo 1 (b) $\lim_{x \to -3^-} H(x)$

- Primero aproxime a -3 por la izquierda $\lim_{x \to -3^-} H(x)$

$x \to -3^-$	-4	-3.5	-3.1	-3.01	-3.001
$H(x)$	-6	-5	-4.2	-4.02	-4.002

$$\lim_{x \to -3^-} H(x) = -4$$

- Luego, aproxime a -3 por la derecha $\lim_{x \to -3^+} H(x)$

$x \to -3^+$	-2	-2.5	-2.9	-2.99	-2.999
$H(x)$	-2	-3	-3.8	-3.98	-3.998

$$\lim_{x \to -3^+} H(x) = -4$$

Solución del Ejemplo 1(b) $\lim_{x \to -3^-} H(x)$

- Como

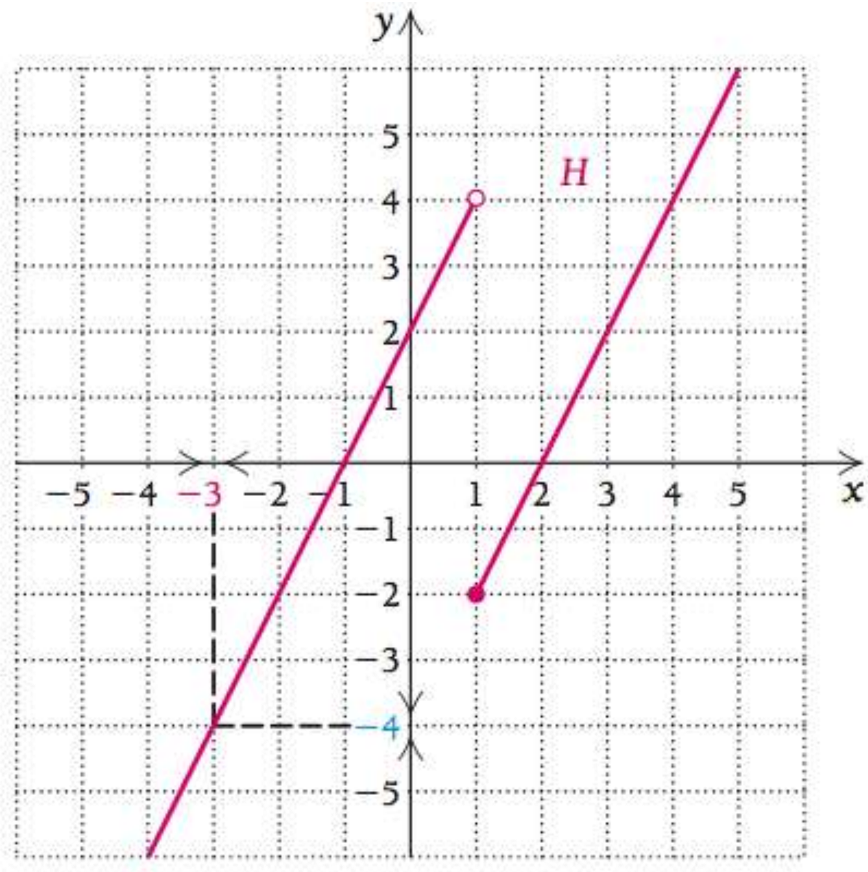
$$\lim_{x \to -3^-} H(x) = -4$$

$$\lim_{x \to -3^+} H(x) = -4$$

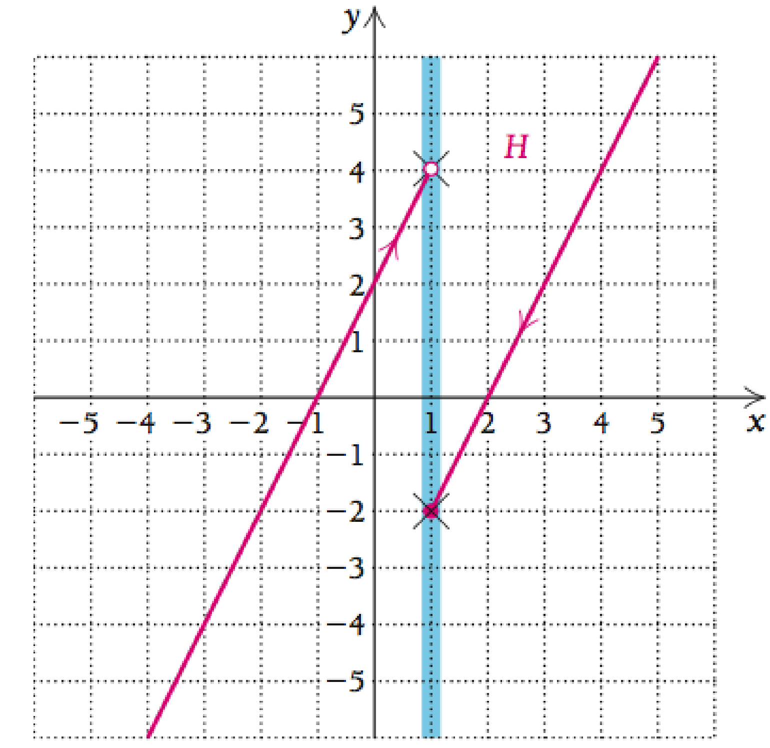
- El $\lim_{x \to -3} H(x) = -4$

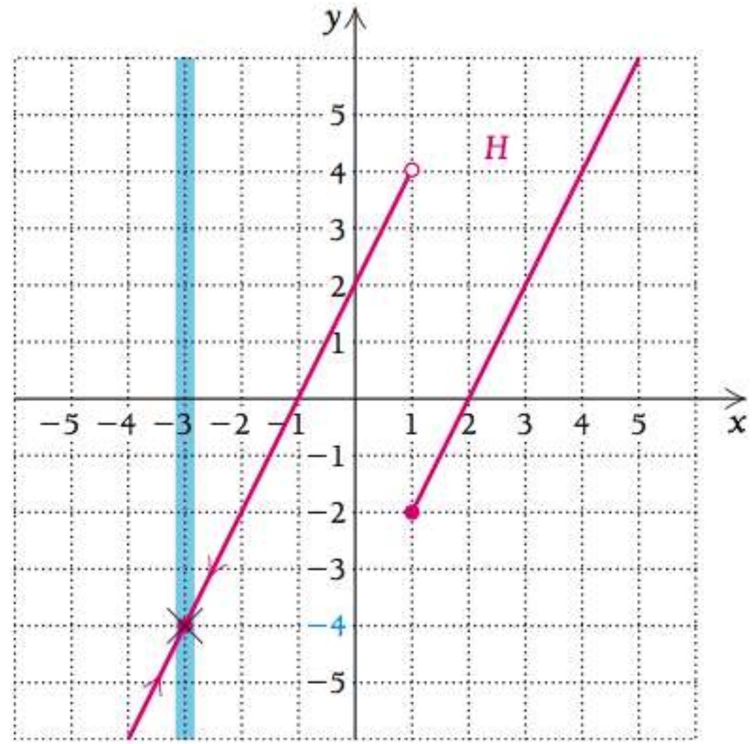
- Vea grafica

$$H(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{for} \quad x < 1 \\ 2x - 4 & \text{for} \quad x \geq 1 \end{cases}$$



Método gráfico para determinar si existe Límite





$\lim_{x\to 1} H(x)$ **no existe**

$\lim_{x\to -3} H(x)$ **= - 4**

Ejemplo 2

- Considere la función *f* siguiente: $f(x)=\dfrac{1}{x-2}+3$

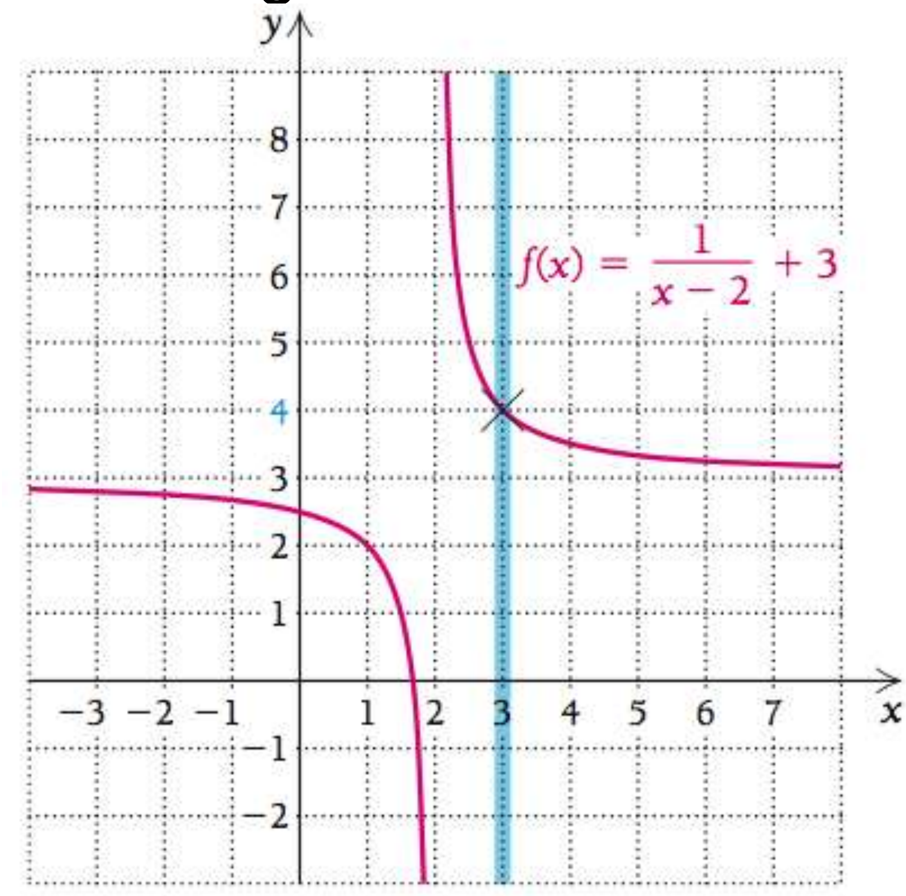
- Determine si cada uno de los siguientes límites existe. De lo contrario, indíquelo.

  a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$

  b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

Solución gráfica del Ejemplo 2 (a) $\lim_{x\to 3} f(x)$

- De la grafica la función se observa …



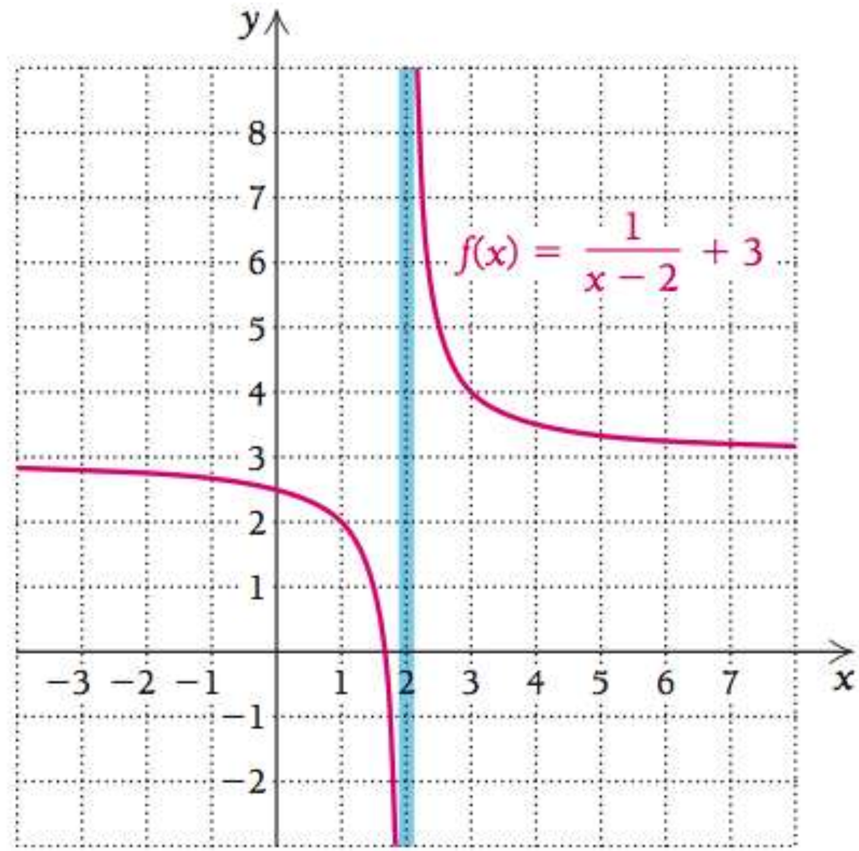
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 4$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4.$$

Solución numérica del Ejemplo 2(b) $\lim_{x\to 2} f(x)$

- De la grafica la función se observa …



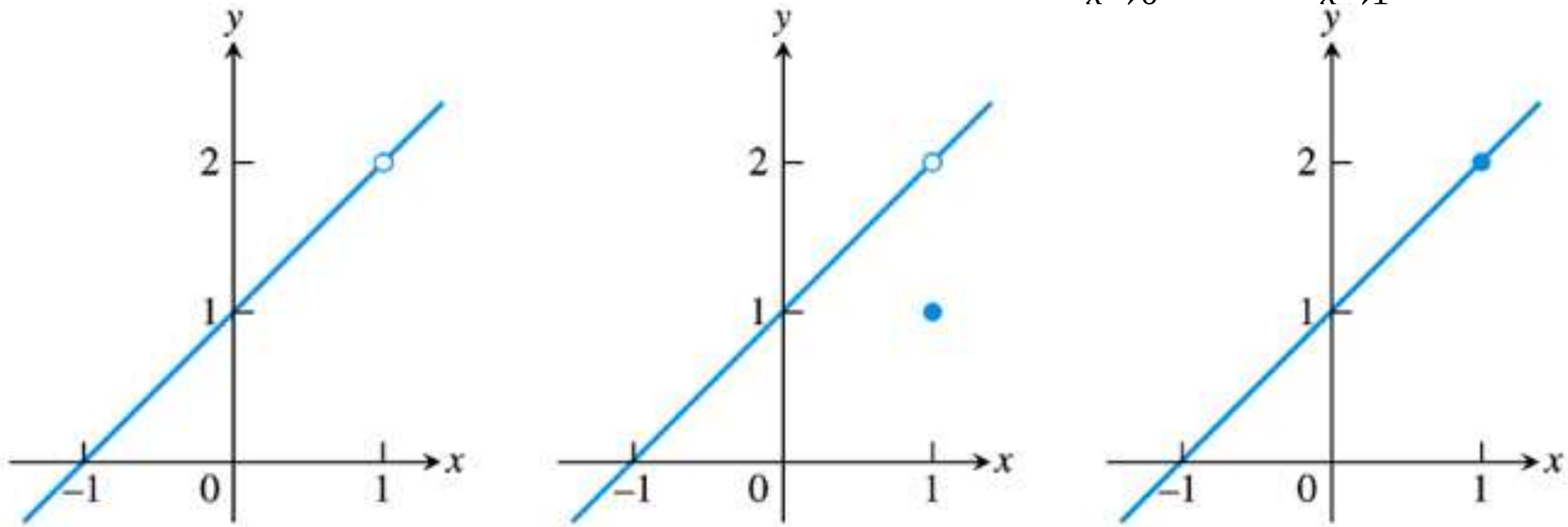
$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to 2} f(x) \text{ no existe}$$

Ejemplo 3

- Para cada una determine $f(0),\ f(1), \lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to 1} f(x)$



(a) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$

(b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

(c) $h(x) = x + 1$

$f(0)=1 \quad f(1)=\text{no existe}$

$\lim_{x\to 0} f(x)=1$

$\lim_{x\to 1} f(x)=2$

$g(0)=1 \quad g(1)=1$

$\lim_{x\to 0} g(x)=1$

$\lim_{x\to 1} g(x)=2$

$h(0)=1 \qquad h(1)=2$

$\lim_{x\to 0} h(x)=1$

$\lim_{x\to 1} h(x)=2$

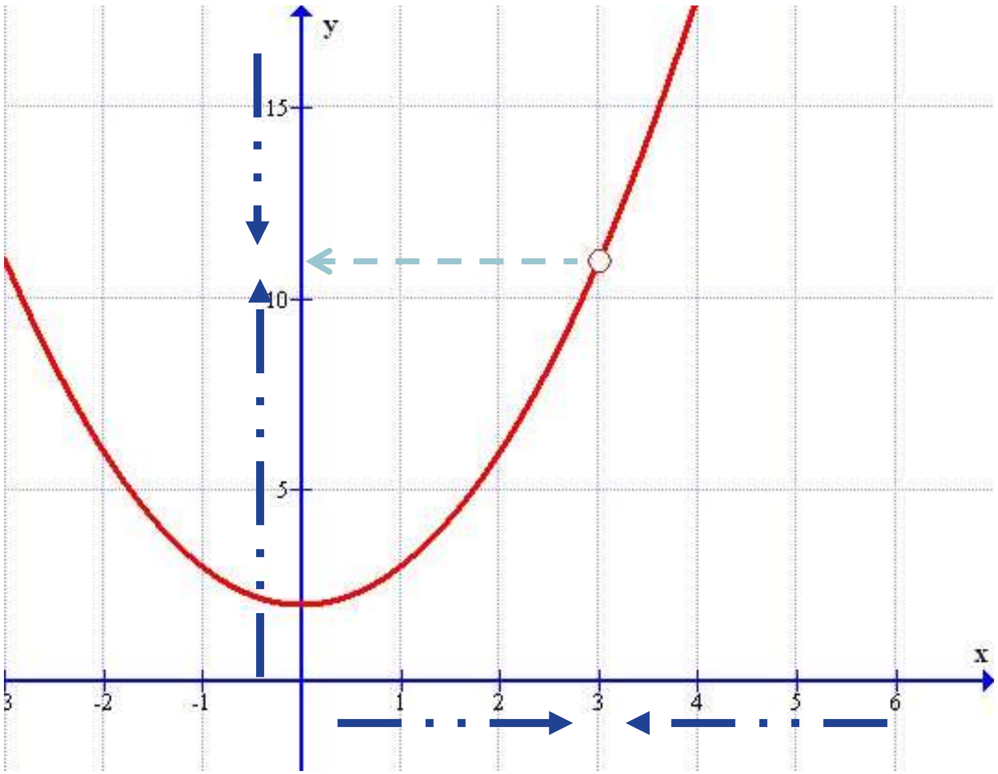
Ejemplo 4

- Utilice el método gráfico para aproximar:

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x - 3}$$

- Solución:
- Observe que 3 no pertenece al dominio.
- ¿Será

$$\lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x - 6}{x - 3} = 11?$$



Para graficar con GRAPH, entre paréntesis alrededor del numerador y denominador:

f(x) = **(x^3-3x^2+2x-6)/(x-3)**

Propiedades de Límites

- Sea a, c números reales, n un número natural y *f*(*x*), g(x) dos funciones. Entonces:

$$\lim_{x \to c} ax^n = ac^n$$

$$\lim_{x \to c}\left(f(x) \pm g(x)\right) = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{x \to c}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to c} f(x) \cdot \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{x \to c} P(x) = P(c)$$

$$\lim_{x \to c}\left(f(x)\right)^n = \left(\lim_{x \to c} f(x)\right)^n$$

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

Ejemplo 5

Encuentre

$$\lim_{x\to 3}\left[3x^4 - x^3 - 5x + 10\right] = 3(3)^4 - 3^3 - 5(3) + 10 \;=211$$

$$\lim_{x\to -2}(2x+1)^5 = \left(\lim_{x\to -2}(2x+1)\right)^5 = \left(2(-2)+1\right)^5 = -243$$

$$\lim_{x\to 2}\sqrt[4]{3x^4+5x^2+13} \qquad = \sqrt[4]{\lim_{x\to 2}\left(3x^4+5x^2+13\right)}$$

$$= \sqrt[4]{81}$$

$$= 3$$

Límite del cociente de funciones

- Para cualquier funciones *f*(*x*) , g(x)

$$\lim_{x \to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)}$$

- Siempre y cuando $\lim\limits_{x \to c} g(x) \neq 0$

Ejemplo 6

Calcule:

a. $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x+4}=\frac{\lim_{x\to 2}\left(x^2+3x-1\right)}{\lim_{x\to 2}\left(x+4\right)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

b. $$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}=\frac{\lim_{x\to -3}x^2+x-6}{\lim_{x\to -3}x^2+7x+12}?$$

¡NO! …. Por que el … $\lim_{x\to -3}x^2+7x+12=0$

Cuando esto ocurra, trate de simplificar la expresión algebraicamente.

Si logra una expresión equivalente, ésta definirá una función distinta pero con los mismos *límites* que la función original.

Solución del Ejemplo 6

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12} = \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+4)}$$

$$= \lim_{x\to -3}\frac{x-2}{x+4}$$

$$= \frac{\lim_{x\to -3}(x-2)}{\lim_{x\to -3}(x+4)}$$

$$= \frac{-5}{1} = -5$$

Ejercicios #2

- Determine:

1. $$\lim_{u \to -2} \sqrt{u^4 + 3u + 6}$$

2. $$\lim_{x \to 4} \frac{x^2 - 4x}{x^2 - 3x - 4}$$

Solución de Ejercicios #2

- Determine:

1. $$\lim_{u\to -2}\sqrt{u^4+3u+6} = \sqrt{\lim_{u\to -2}(u^4+3u+6)}$$
$$=\sqrt{(-2)^4+3(-2)+6}$$
$$=\sqrt{16-6+6}=4$$

2. $$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x}{x+1}=\frac{4}{4+1}=\frac{4}{5}$$

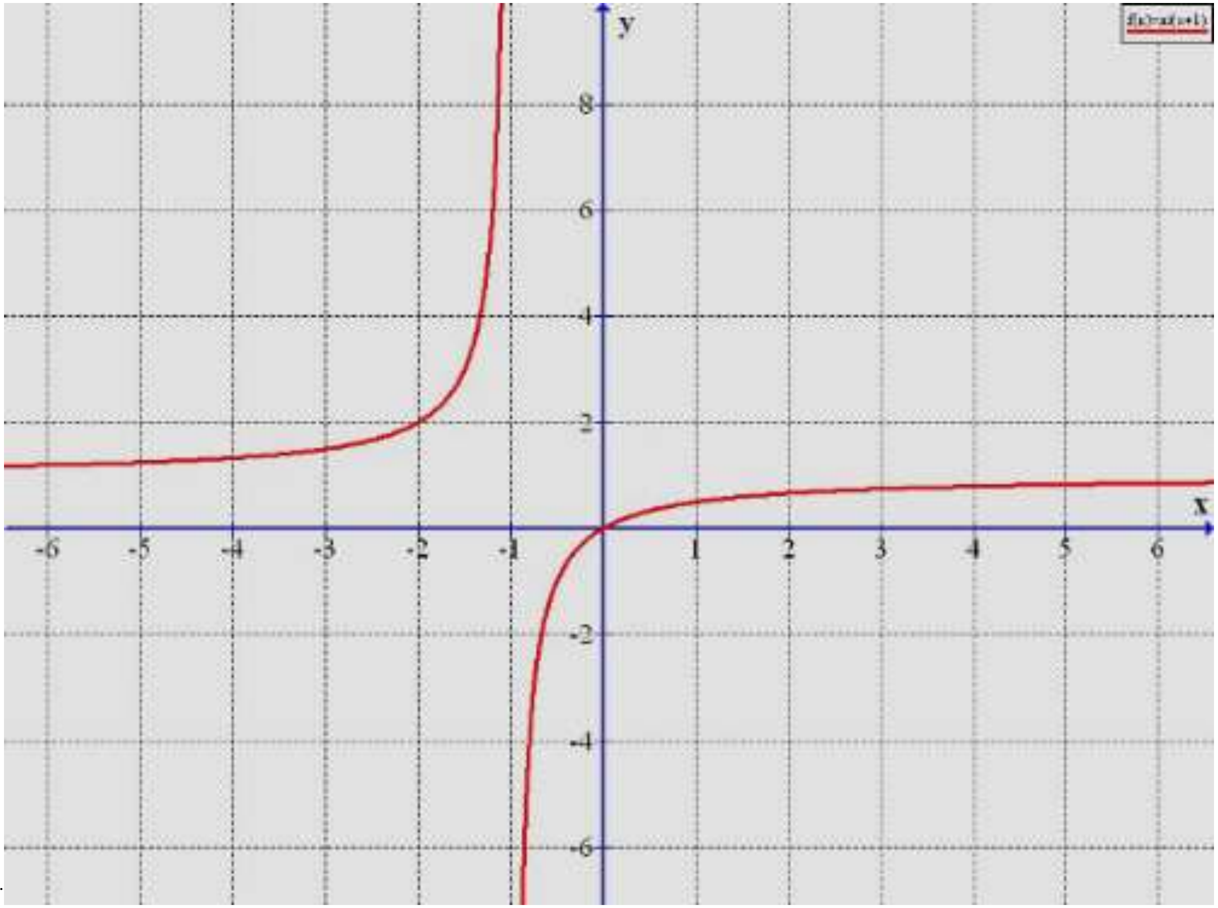
Ejemplo 7

Calcule $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}=\lim_{x\to -1}\frac{x(x-4)}{(x-4)(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x}{x+1}$$

Cuando esto ocurre, analice la gráfica de la función alrededor del valor de interés para ver si exite o no.

¡No existe!

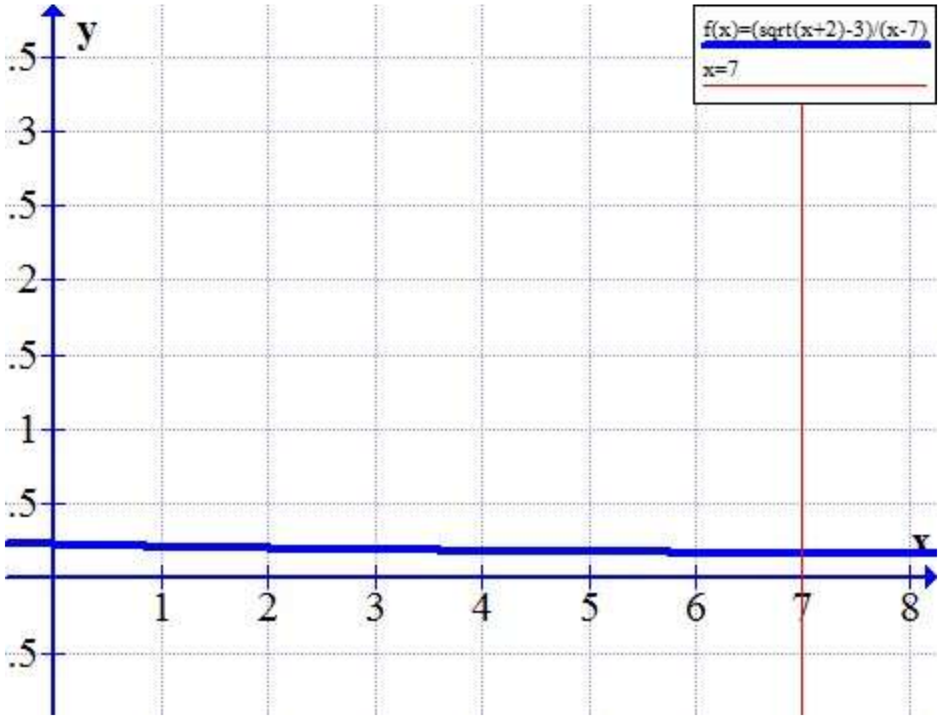
Si ve que no existe, indíquelo así. De lo contrario, para necesitará otras estrategias para calcularlo.



Ejemplo 8

Calcule $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$

$$= \lim_{x\to 7}\left(\frac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}\cdot\frac{\sqrt{x+2}+3}{\sqrt{x+2}+3}\right)$$



$$= \lim_{x\to 7}\left(\frac{(x+2)-9}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 7}\left(\frac{x-7}{(x-7)(\sqrt{x+2}+3)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 7}\left(\frac{1}{\sqrt{x+2}+3}\right)$$

$$= \frac{1}{6}$$

Observe que esta función no se pudo simplificar algebraicamente. Pero, se pudo manipular algebraicamente de manera que se elimine el factor (x-7) del denominador.