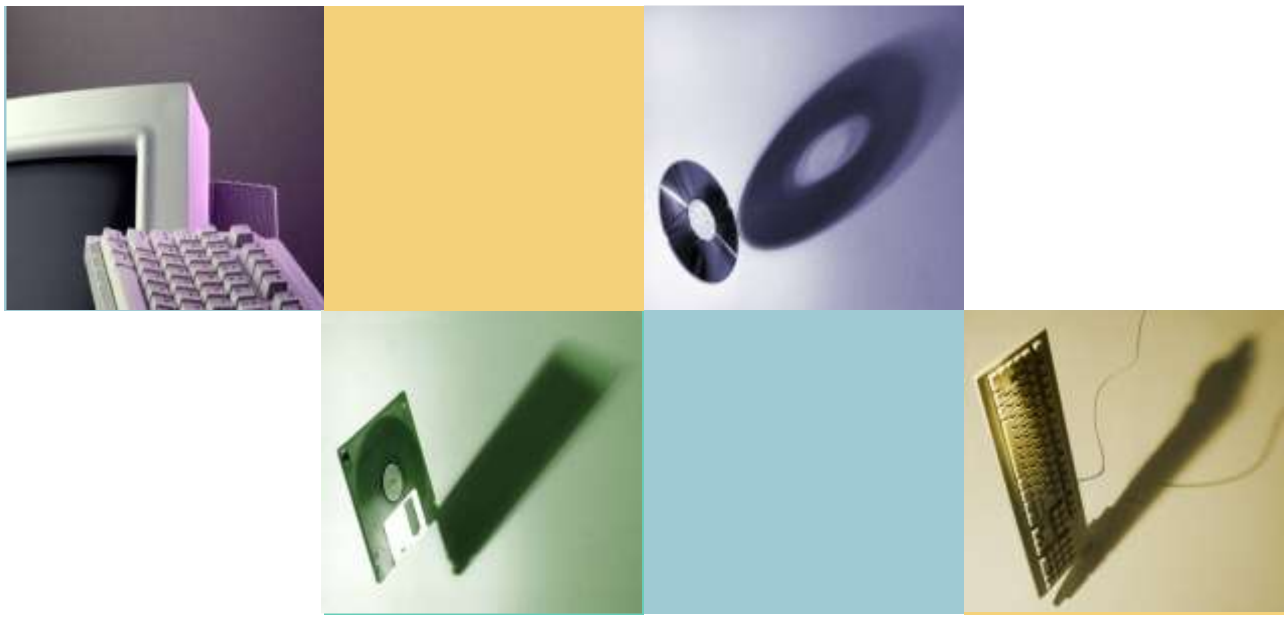
Unidad 1 – Lección 1.2



La Derivada

Actividades 1.2

- Referencia: Section 11.3: Página 465 – 466 (4ta. Ed Páginas 472-473): Ejercicios impares del 1 - 31.
- Asignación 1.2 – Página 465 (4ta. Ed Página 472): , Resuelva problema 10 y grafique la función derivada; Página 466 (4ta. Ed Página 473): Resuelva el problema 26, grafique la función y la gráfica de la recta tangente cuya ecuación se le pide encontrar.
- Referencia en el Web:
  - Calculus-Help Com - The Difference Quotient
  - Visual Calculus – Definition of the Derivative. Practice Drills.

Objetivos

Al finalizar esta lección podrás:

- Usar la definición de derivada para calcular la derivada de una función en un valor.
- Encontrar la pendiente de la tangente a una curva por un punto.
- Encontrar la ecuación de la tangente a una curva por un punto.
- Calcular la razón de cambio promedio de una función
- Calcular la razón de cambio instantáneo de una función
- Interpretar la derivada de una función como la pendiente de la tangente de una curva en un punto y como una razón de cambio instantáneo.
- Identificar la gráfica de la función derivada de una función.
- Identificar puntos en la gráfica de una función en donde no existe la derivada.

Definición

- La derivada de una función en un número denotada por f'(a), es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- si este límite existe. En ese caso, se dice que la función es diferenciable en ***a***

Ejemplo 1

- Encuentre la derivada de la función *f* en el valor 2, donde:
- Solución:

$$f(x) = x^2 - 1$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)^2 - 1] - [(2)^2 - 1]}{h}$$

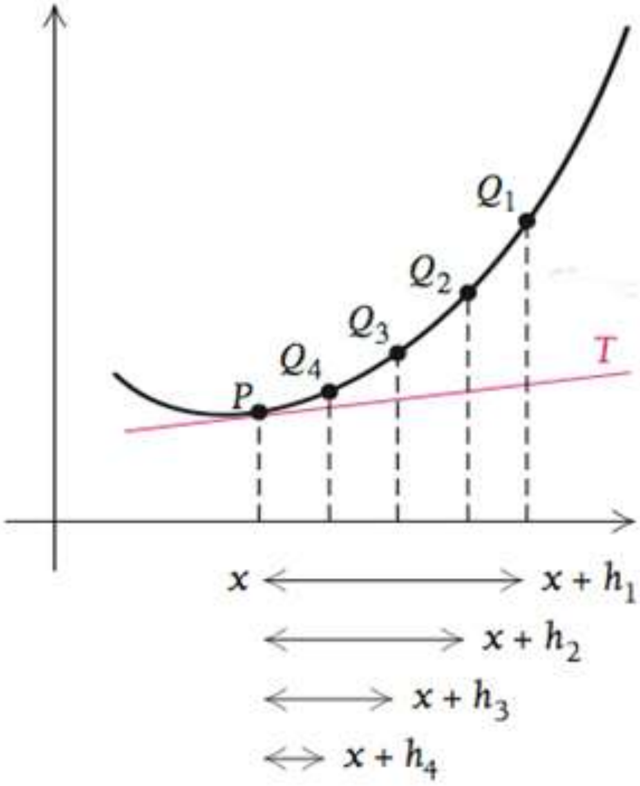
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2^2 + 4h + h^2 - 1] - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

Interpretación Geométrica de la Derivada

- La derivada en x es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto $P(x, f(x))$:
- Considere las rectas que se forman al unir P y los puntos Q_1, Q_2, Q_3, Q_4.

Observe que las pendientes de cada recta se pueden expresar por:

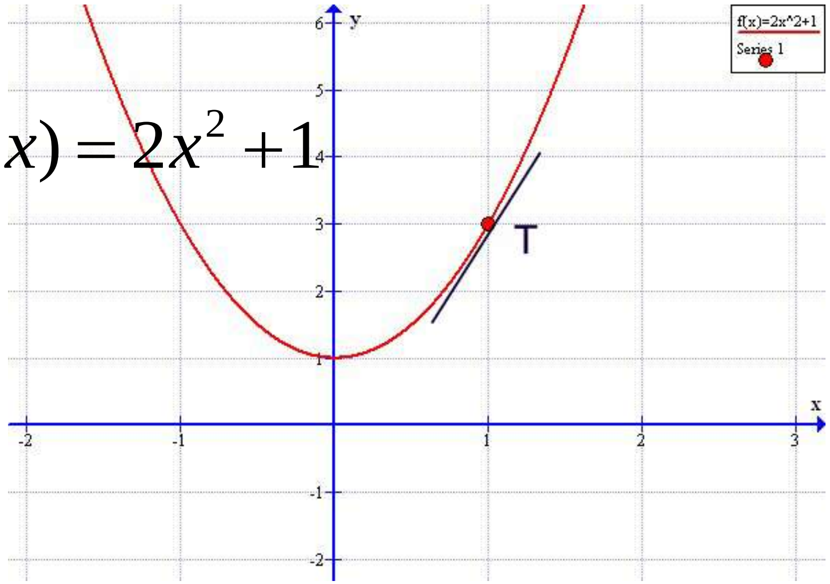


$$m_n = \frac{f(x+h_n) - f(x)}{(x+h_n) - x} = \frac{f(x+h_n) - f(x)}{h_n}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ejemplo 2

- Encuentre la ecuación de la tangente por la gráfica de $f(x) = 2x^2 + 1$ por el punto (1,3).
- Solución:



Calcule la derivada de f en 1

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(1+h)^2 + 1] - [2(1)^2 + 1]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[2h^2 + 4h + 3] - [3]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2h(h+2)}{h} = \lim_{h\to 0} 2(h+2) = 4$$

Use forma pendiente-punto para calcular la ecuación de la recta tangente:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 4(x - 1)$$

$$\boldsymbol{y = 4x + 1}$$

Razones de cambio

- Si f(x) es una función, la **razón de cambio promedio** de f entre los valores a y b se define como:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

- Razón de cambio promedio:
  - Cambio promedio en la distancia cubierta (d) y el tiempo que toma un objeto viajar de un punto a otro. (velocidad promedio)
  - Cambio en el costo total (C) de las mercancías disponibles para la venta y el número de unidades disponibles para la venta (costo promedio)
  - Cambio en la ganancia o “profit” (P) y cantidad de artículos vendidos (ganancia promedio)

Ejemplo 3:

- Encuentre la razón de cambio promedio de la siguiente función entre los valores -2 a 3.

- Solución: $f(x) = x^2 + 4x + 5$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$$

$$= \frac{26 - 1}{5} = 5$$

Interpretación de la Derivada como razón de cambio

- La **razón de cambio instantánea** de un función f cuando x = a, está dado por:

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- La razón de cambio instantáneo de un función cuando $x = a$ es la derivada de la función en a. Esto es, $f'(a)$.

Razones de cambio instantáneo

- Si f(x) es una función, la **razón de cambio instantáneo** de f en un valor a se define como la primera derivada de la función en a:

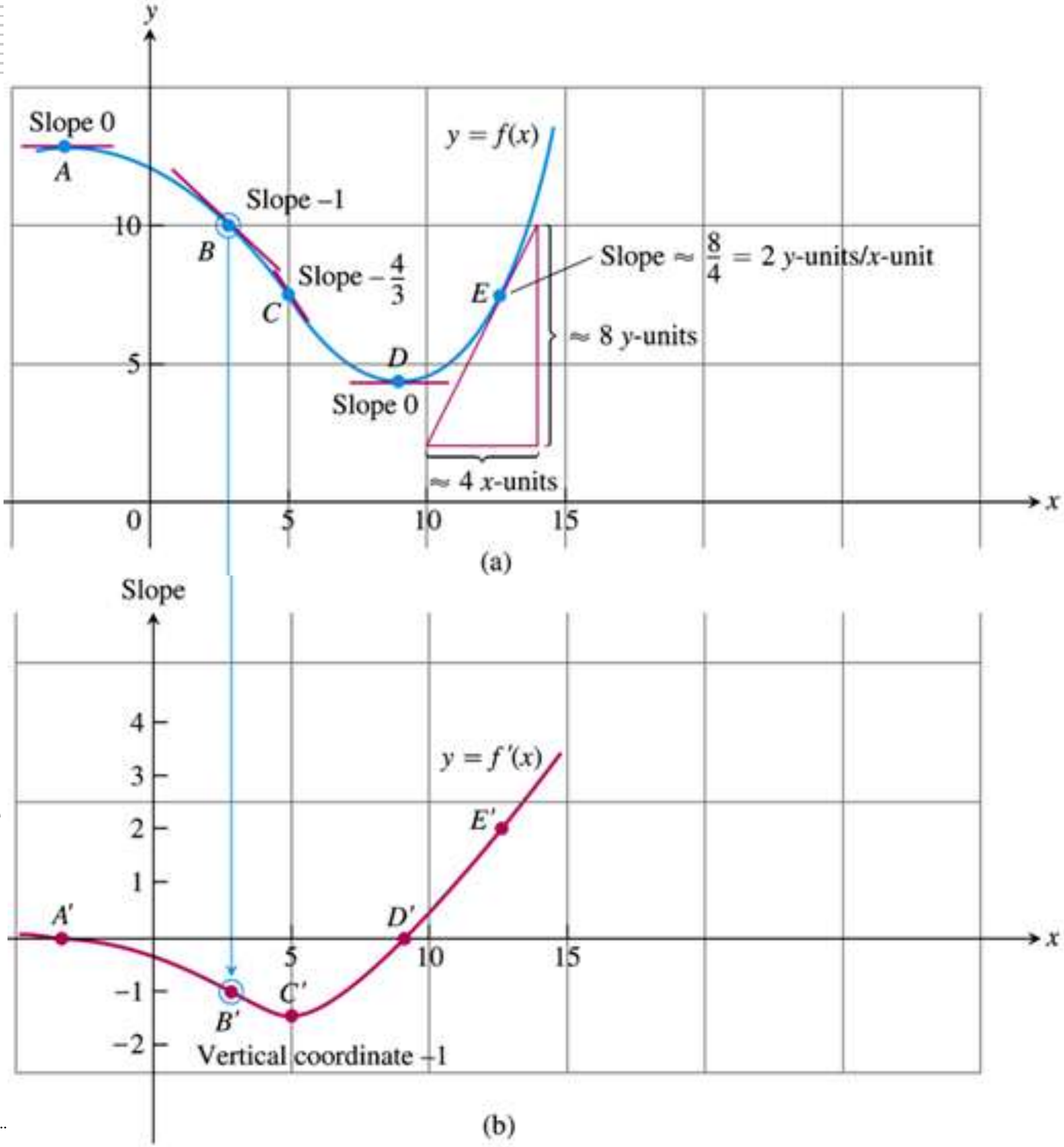
$$f'(a)$$

- Ejemplos:
  - Velocidad de un objeto en un momento particular.
  - Tasa de crecimiento del volumen de ventas de una marca de gasolina por el cambio en el precio por litro.
  - Tasa de crecimiento en el costo (C) por incrementar en la cantidad de artículos fabricados – COSTO MARGINAL.
  - Tasa de crecimiento en el ingreso (R) por incrementar el número de artículos vendidos – Ingreso Marginal (Marginal revenue)
  - Tasa de crecimiento en las ganancias por incrementar el número de artículos vendidos – Ganancia Marginal o Utilidad Marginal (Marginal Profit)

La Derivada como función

Si f'(x) > 0 en un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.

Si f'(x) < 0 en un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.



Ejemplo 5

Encuentre la función derivada $f'(x)$, para la función $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h}$$

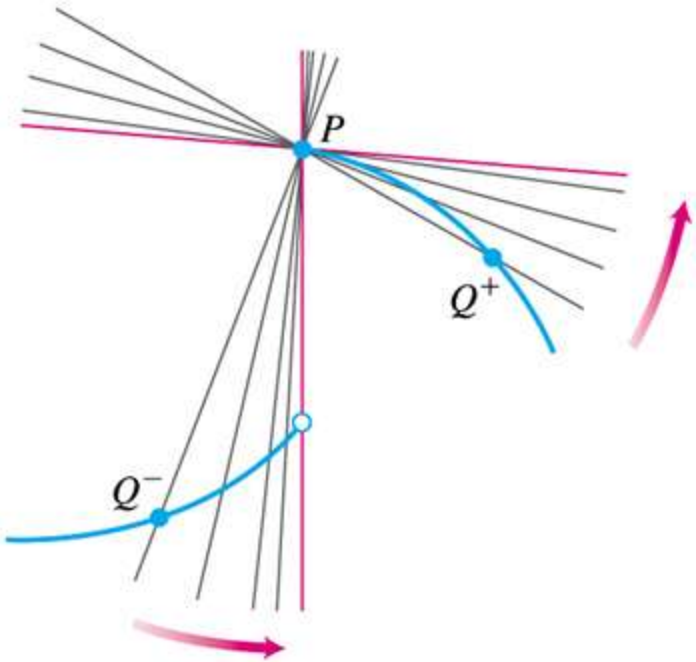
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x)^3}{h}$$

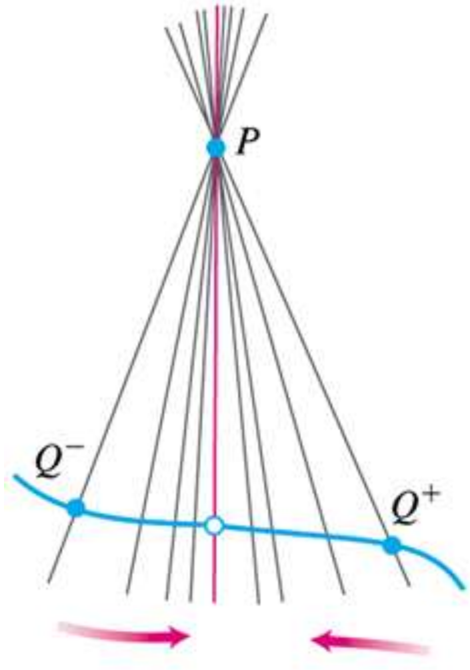
$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \quad = 3x^2$$

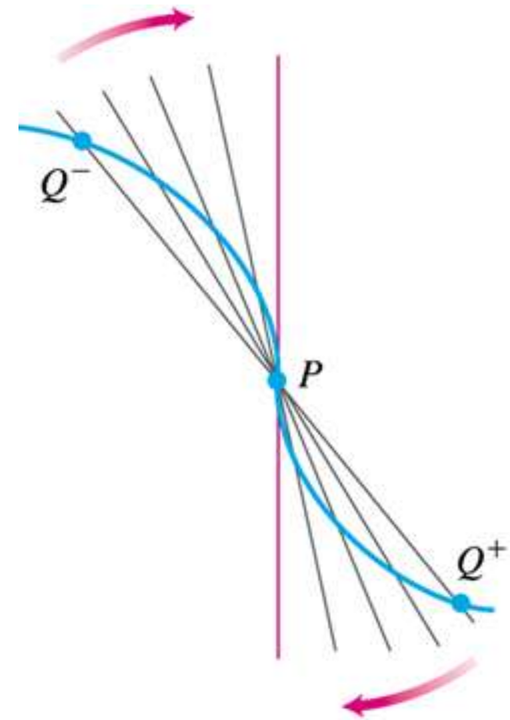
$$f'(x) = 3x^2$$

¿Cuándo deja una función ser diferenciable?

- Gráfica tiene:
  - Discontinuidad en P.
  - Continua en P con tangente vertical.



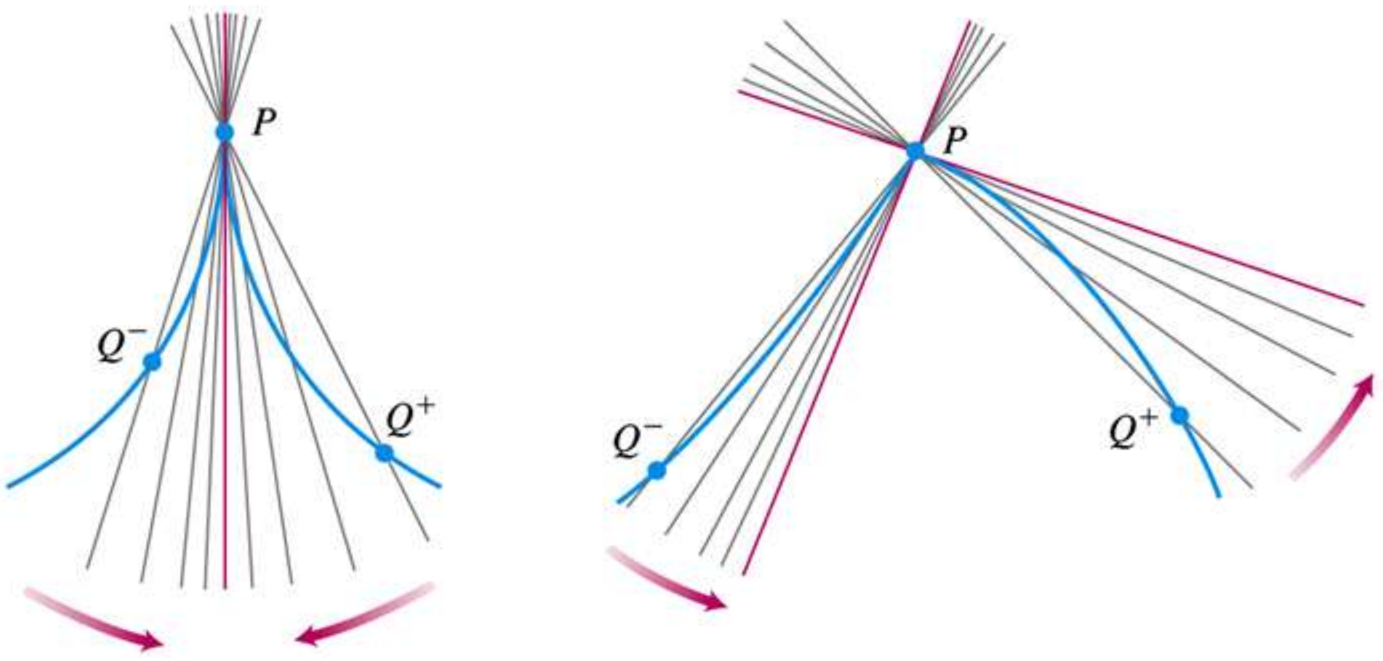




Observe: Función es continua en P. Pero no es diferenciable en P

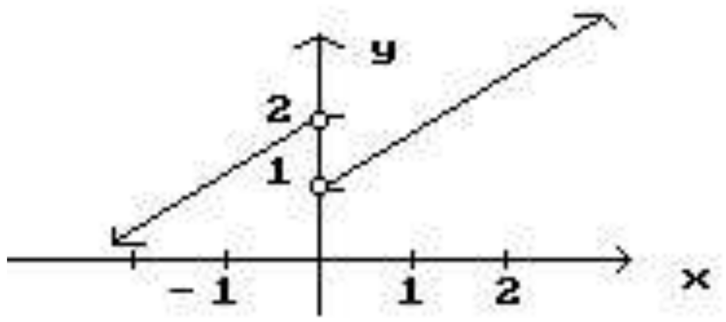
¿Cuándo deja una función ser diferenciable?

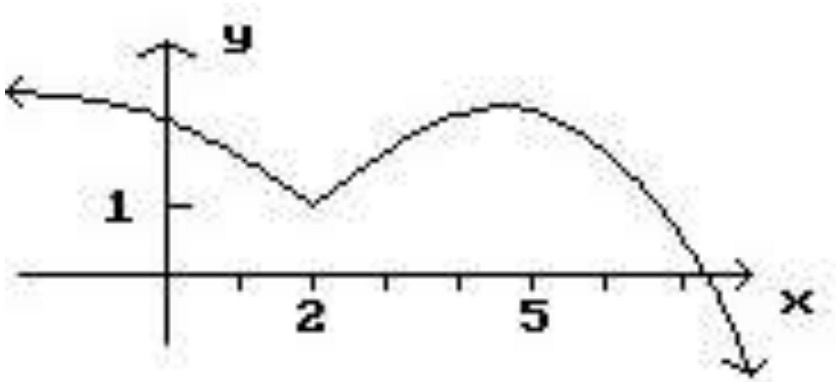
- Gráfica termine en una esquina o pico.



Ejemplo 6

- ¿Dónde no está definido la derivada?





Cuando x = 0

Cuando x = 2