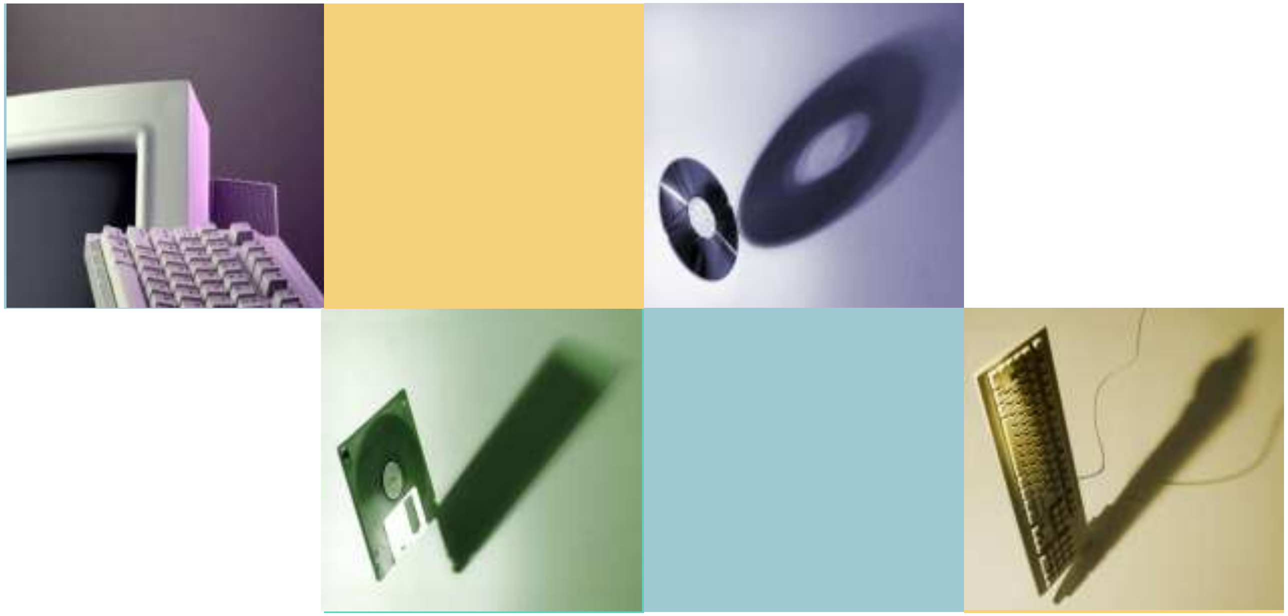
Unidad 2 – Lección 2.1



Derivadas de Polinomios

Actividades 2.1

- **Referencia:** Sección 11.4 Derivadas de funciones elevadas a una potencias; Ejemplos del 1 al 5; Página 472; problemas impares 1 – 57.
- **Asignación 2.1: Página 472: P**roblemas 18, 54 y 62. Para cada una incluya las gráficas de las funciones y sus funciones derivadas.
- Referencia en el Web:
  - Calculus Phobe – The Power Rule
  - Visual Calculus – Differentiation Formulas.

Objetivos

- Usar las reglas de diferenciación para calcular la derivada de funciónes constantes y potencias.
- Usar las reglas de diferenciación para calcular la derivada de una suma o diferencia de funciones.

Notación de la derivada

- Primera derivada:

$$f'(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx} \qquad D_x[f]$$

- Segunda derivada

$$f''(x) \qquad y'' \qquad \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \frac{d^2f}{dx^2} \qquad D_{x^2}[f]$$

Reglas de diferenciación

- Si $f(x) = k$, donde k es cualquier número real, entonces $\boldsymbol{f'(x)=0}$
  - Si f(x) = 5, entonces f’(x) = 0
  - Si f(x) = π, entonces f’(x) = 0
- Si $f(x) = x^n$ para cualquier número real diferente de 0, entonces $\boldsymbol{f'(x) = nx^{n-1}}$.
  - Si f(x) = x^8, entonces f’(x) = $8x^7$
  - Si f(x) = x^{-3}, entonces f’(x) = $-3x^{-4}$
- Si $f(x) = kg(x)$, entonces $\boldsymbol{f'(x) = kg'(x)}$
  - Si f(x) = $3x^6$, entonces f’(x) = $3(6x^5) = 18x^5$

Ejemplo 1

Determine *f'(x)* si $f(x) = \dfrac{5}{x^2}$

- Solución:

$$f(x) = 5x^{-2}$$

$$f'(x) = 5(-2)x^{(-2)-1}$$

$$= -10x^{-3}$$

$$= \frac{-10}{x^3}$$

Ejemplo 2

Determine $f'(x)$ si $f(x) = 3\sqrt{x}$

- Solución:

$$f(x) = 3x^{1/2}$$

$$f'(x) = 3\left(\tfrac{1}{2}\right)x^{\left(\frac{1}{2}\right)-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{3\sqrt{x}}{2x}$$

Ejercicios #1

Determine la derivada:

1. $F(x) = x^4$

$$F'(x) = 4x^3$$

2. $F(x) = \sqrt{5}$

$$F'(x) = 0$$

3. $F(x) = 9x$

$$F'(x) = 9$$

4. $F(x) = -4x^3$

$$F'(x) = -12x^2$$

5. $F(x) = -4x^{-2}$

$$F'(x) = \frac{8}{x^3}$$

6. $F(x) = x^{1/3}$

$$F'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$$

Ejemplo 3

Determine: $a)\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\qquad b)\ \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x}\right)$

$$a)\quad \frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{-\sqrt{x}}{2x^{2}}$$

$$b)\quad \frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{5}}\right) = \frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1} = \frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}} = \frac{\sqrt[5]{x}}{5x}$$

Reglas de diferenciación: Adición y Sustracción

- Si $f(x) = u(x) + v(x)$ entonces:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Si $f(x) = u(x) - v(x)$ entonces:

$$f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Ejemplo 4

- Encuentre la derivada de: $f(x) = 8x^3 - 5\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x}$

- Solución:

$$f(x) = 8x^3 - 5x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-1}$$

$$f'(x) = 8(3)x^{3-1} - 5\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} + 3(-1)x^{-1-1}$$

$$= 24x^2 - \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-2}$$

$$= 24x^2 - \frac{5\sqrt[3]{x}}{3x} - \frac{3}{x^2}$$

Ejemplo 5

Encuentre la ecuación de la recta tangente a

$$y = x^3 - \frac{1}{x^3}$$ cuando x = 1

$$y' = \frac{d}{dx}(x^3 - x^{-3}) = \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}x^{-3} = 3x^2 + 3x^{-4}$$

pendiente de la tangente $m = y'(1) = 3(1)^2 + 3(1)^{-4} = 6$

La ecuación de la tangente por el punto (1,0) es:

$$y - 0 = 6(x - 1)$$

$$y = 6x - 6$$

Ejercicio #2

1. $$\frac{d}{dx}\left(-2x^3-\sqrt[4]{x}+\frac{2}{x}\right)=\frac{d}{dx}(-2x^3)-\frac{d}{dx}\sqrt[4]{x}+\frac{d}{dx}\frac{2}{x}$$

$$=-6x^2-\frac{\sqrt[4]{x}}{4x}-\frac{2}{x^2}$$

2. $$\frac{d}{dx}\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)=\frac{d}{dx}x^2-\frac{d}{dx}x^{-2}$$

$$=2x+2x^{-3}$$

Ejemplo 6

- Determine el **costo marginal** al producir 50 artículos si la función costo es:

$$C(x) = 0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000$$

- Solución:

$$C'(x) = \frac{d}{dx}\left[0.001x^3 - 0.3x^2 + 40x + 1000\right]$$

$$= 0.001(3x^2) - 0.3(2x) + 40 + 0$$

$$= 0.003x^2 - 0.6x + 40$$

$$C'(5) = 0.003(50)^2 - 0.6(50) + 40 = 17.5$$

- ¿Qué indica el costo marginal?
- Cuando se produzcan 50 artículos, el costo incrementará $17.5 por producir un articulo adicional.

Ejercicio #3

- Determine el **ingreso marginal** al vender 200 artículos si la función ingreso es:

$$R(x) = 10x - 0.01x^2$$

- Solución:

$$R'(x) = \frac{d}{dx}\left[10x - 0.01x^2\right]$$

$$= 10 - 0.02x$$

$$R'(200) = 10 - 0.02(200) \;\; = 6$$

- ¿Qué indica el ingreso marginal?
- Cuando se venden 200 artículos, el ingreso incrementará por $6, por vender un articulo adicional.

Actividades 2.1

- **Referencia:** Sección 11.4 Derivadas de funciones elevadas a una potencias; Ejemplos del 1 al 5; Página 472; problemas impares 1 – 57.
- **Asignación 2.1: Página 472: P**roblemas 18, 54 y 62. Para cada una incluya las gráficas de las funciones y sus funciones derivadas.
- Referencia en el Web:
  - Calculus Phobe – The Power Rule
  - Visual Calculus – Differentiation Formulas.