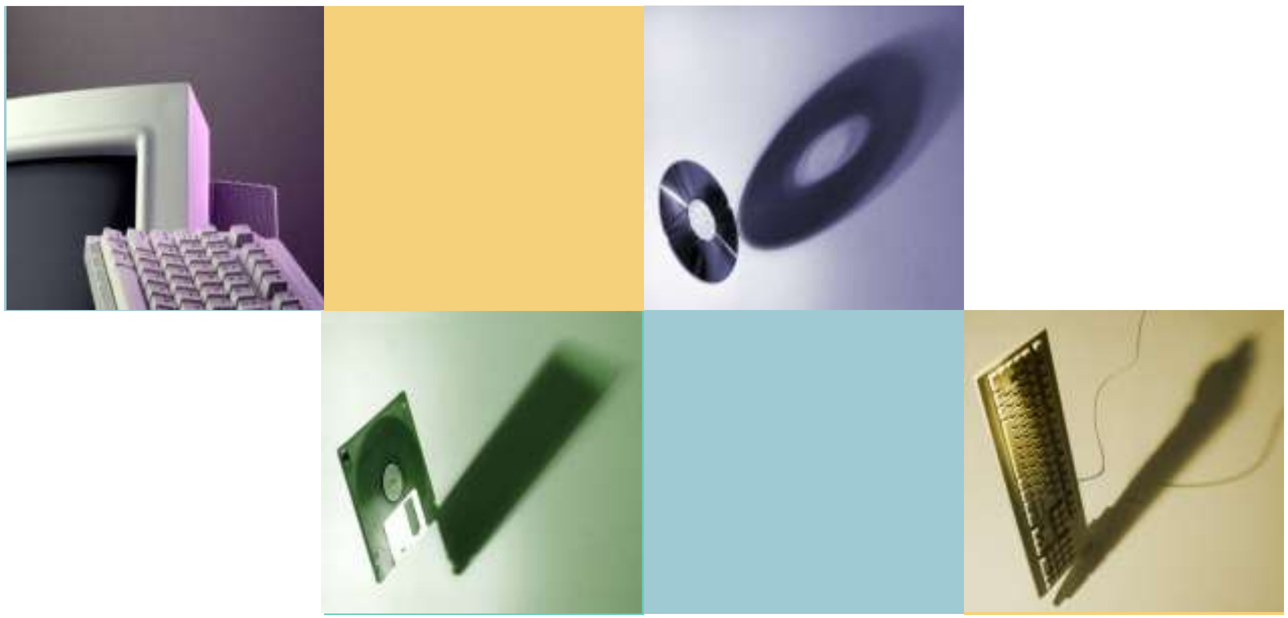
Unidad 2 - Lección 2.3



La Regla de la Cadena

Actividades 2.3

- Referencia: Section 12.2: La Regla de la Cadena. Estudie Ejemplos del 1 al 6. Páginas 509-510 Ejercicios de práctica 1 – 41 (4ta Ed págs 516-517).
- **Asignación 2.3:** Resuelva los problemas 43, 47 y 48 de la página 510 (4ta Ed pág. 517).
- Referencias del Web:
  - Calculus Help.com – The Chain Rule
  - Visual Calculus: Tutorial on the Chain Rule. A LiveMath notebook illustrating the use of the chain rule. Drill problems for differentiation using the chain rule. Computer program that graphically illustrates the chain rule.
  - E-MathLab.com: Ejercicios de prática interactivos. Regla de la Cadena.

Objetivos

- Usar la Regla de la Cadena para calcular las derivadas de funciones compuestas.
- Usar la Regla de la Potencia para calcular las derivadas de funciones de la forma:

$$f(x) = u(x)^n$$

¿Cómo calcularía la primera derivada?

$$y = x^3 \qquad y' = 3x^2$$

$$y = 4\sqrt{x} \qquad y' = \frac{4}{\sqrt{x}}$$

$$x \longrightarrow y$$

$$y = \left(x^2 - 5\right)^3 \qquad u = x^2 - 5$$

$$y = 4\sqrt{x+3} \qquad u = x + 3$$

$$x \longrightarrow u \longrightarrow y$$

- Observe que:

1. Se usa las reglas básicas para derivar las funciones a la izquierda.
2. Las funciones a la derecha son funciones compuestas.
   - Para evaluar la función tiene que evaluar primero una función interna (u).
   - Reconozca una función compuesta cuando la variable de x NO está sóla.

La Regla de la Cadena

- Si $x \longrightarrow u \longrightarrow y$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- Por ejemplo:

$$u = 3x^2 - 1$$

$$y = \left(3x^2 - 1\right)^4$$

$$y = x^4 \qquad y = u^4$$

$$\frac{dy}{dx} = 4x^3 \qquad \frac{dy}{du} = 4u^3$$

$$y = u^4$$

donde u es una función de x

$$\frac{dy}{dx} = 4u^3 \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 4\left(3x^2 - 1\right)^3 \cdot \frac{d}{dx}\left(3x^2 - 1\right)$$

$$= 4\left(3x^2 - 1\right)^3 \cdot 6x$$

$$= 24x\left(3x^2 - 1\right)^3$$

Ejemplo 1

Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

$u = x^2 - 5$

- 1) $y = x^3$

  $y' = 3x^2$

2) $y = \left(x^2 - 5\right)^3$

$$y' = 3\left(x^2 - 5\right)^2 \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2 - 5\right)$$

$$= 3\left(x^2 - 5\right)^2 \cdot 2\mathrm{x}$$

$$= 6x\left(x^2 - 5\right)^2$$

Ejemplo 2

Calcule la primera derivada de las siguientes funciones:

- 1) $y = 4\sqrt{x}$

$$= 4x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$= 2x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x}} \quad \text{ó} \quad \frac{2\sqrt{x}}{x}$$

2) $y = 4\sqrt{x+3}$

$u = x + 3$

$$= 4(x+3)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = 4 \cdot \frac{1}{2}(x+3)^{2} \cdot \frac{d}{dx}(x+3)$$

$$= 2(x+3)^{-\frac{1}{2}} \cdot 1$$

$$= \frac{2}{\sqrt{x+3}} \quad \text{ó} \quad \frac{2\sqrt{x+3}}{x+3}$$

Ejemplo 3

- Calcule la primera derivada de $f(x)=\sqrt{x^2-5}$

$$u = x^2 - 5$$

$$f(x) = \left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{d}{dx}\left(x^2-5\right)$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$= (x^2-5)^{-\frac{1}{2}} \cdot x$$

$$= x(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2-5}} \quad ó \quad \frac{x\sqrt{x^2-5}}{x^2-5}$$

Ejercicio #1

- Calcule:

1. $$\frac{d}{dx}\sqrt[3]{1+2x} = \frac{d}{dx}(1+2x)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}(1+2x)^{-\frac{2}{3}}\frac{d}{dx}(1+2x)$$

$$= \frac{1}{3}(1+2x)^{-\frac{2}{3}}\cdot 2$$

$$= \frac{2}{3\sqrt[3]{(1+2x)^2}} \quad ó \quad \frac{2\sqrt[3]{1+2x}}{3(1+2x)}$$

La Regla de la potencia

- Si n es cualquier número real, u = g(x) es derivable, entonces: $\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$
- Ejemplos:

a)
$$\frac{d}{dx}(2x^3-5)^4 = 4(2x^3-5)^3 \cdot \quad 6x^2$$
$$= 24x^2(2x^3-5)^3$$

b)
$$\frac{d}{dx}(-4x^2-8x)^5 = 5(-4x^2-8x)^4.(-8x-8)$$
$$= 5(-4x^2-8x)^4 \cdot -8(x+1)$$
$$= -40(x+1)(-4x^2-8x)^4$$

Ejercicio #2

- Calcule:

1. $$\frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)^3 = 3(x^2 - x + 1)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)$$
$$= 3(x^2 - x + 1)^2 (2x - 1)$$

2. $$\frac{d}{dx}(-4x^3 - 2x)^5 = 5(-4x^3 - 2x)^4 \frac{d}{dx}(-4x^3 - 2x)$$
$$= 5(-4x^3 - 2x)^4 \cdot (-12x^2 - 2)$$
$$= 5(-4x^3 - 2x)^4 \cdot -2(6x^2 + 1)$$
$$= -10(-4x^3 - 2x)^4 \left(6x^2 + 1\right)$$

Ejemplo 4

- Determine la función Costo Marginal si: $C(t)=\left(\dfrac{t-1}{2t+1}\right)^5$

- Solución:

Regla de la Cadena

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^5=5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)$$

Regla del Cociente

$$=5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4\left(\frac{(2t+1)\frac{d}{dt}(t-1)-(t-1)\frac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right)$$

$$=5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4\left(\frac{(2t+1)-(t-1)2}{(2t+1)^2}\right)$$

$$=5\frac{(t-1)^4}{(2t-1)^4}\left(\frac{3}{(2t+1)^2}\right)=\frac{15(t-1)^4}{(2t+1)^6}$$

La función Costo Marginal

$$C'(t)=\frac{15(t-1)^4}{(2t+1)^6}$$

Ejercicio #3

- Calcule

Regla de la Cadena

Regla del Cociente

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+4}{3x-1}\right]^3 = 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2 \frac{d}{dt}\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)$$

$$= 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2 \left(\frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(2x+4)-(2x+4)\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2 \left(\frac{2(3x-1)-3(2x+4)}{(3x-1)^2}\right)$$

$$= 3\frac{(2x+4)^2}{(3x-1)^2}\left(\frac{-14}{(3x-1)^2}\right) = \frac{-42(2x+4)^2}{(3x-1)^4}$$

Ejemplo 5

- Determine la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ en x=4
- Solución: $$f(x) = (x^2 + 9)^{\frac{1}{2}}$$
$$f'(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \ = x(x^2 + 9)^{-\frac{1}{2}}$$
- La pendiente de la recta tangente en x = 4
$$f'(4) = (4)((4)^2 + 9)^{-\frac{1}{2}} = (4)(25)^{-\frac{1}{2}} = \frac{4}{5}$$
- Si x=4, $f(4) = \sqrt{4^2 + 9} = 5$. Por tanto el punto es (4,5)
- La ecuación es: $$y - 5 = \frac{4}{5}(x - 4)$$
$$y = \frac{4}{5}x + \frac{9}{9}$$