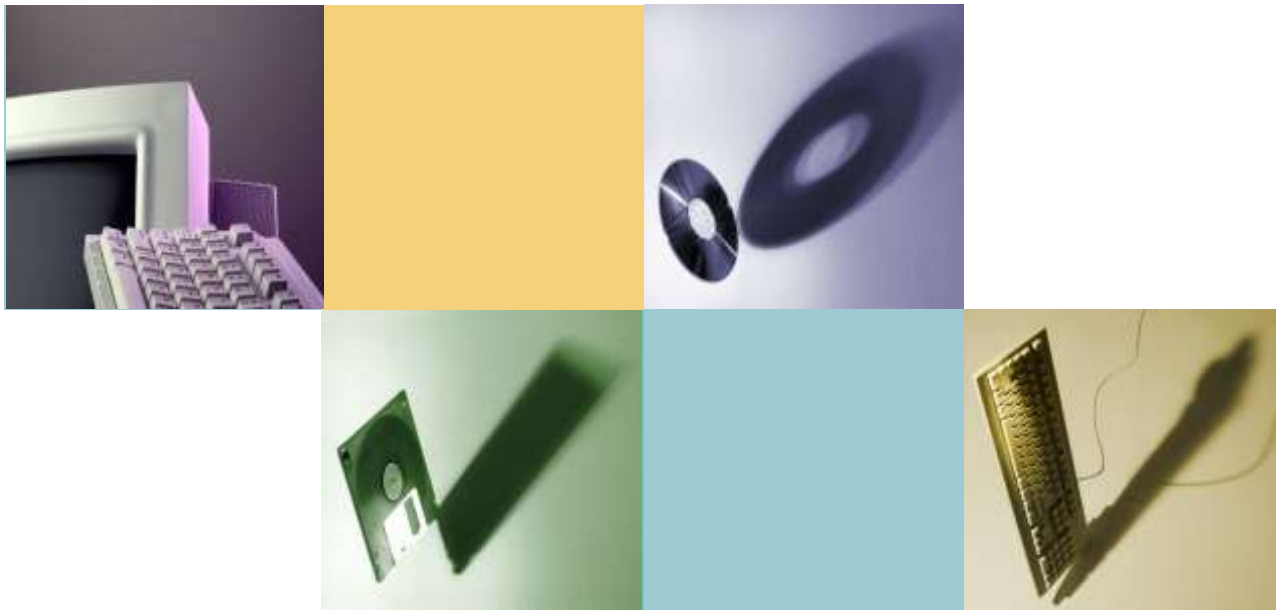


# Unidad 3 – Lección 3.1



## Derivadas de Funciones Exponenciales y Logarítmicas

# Actividades 3.1

- Referencia: Section 12.3: Derivadas de Funciones Exponenciales y Logarítmicas; Ejemplos del 1 al 8; problemas impares 1 – 79 de la página 518 a 519 (4ta Ed páginas 525 a 526).
- Asignación 4.2: Páginas 518-519; Problemas 40, 48, 70 y 74.
- Referencias del Web:
  - Moises Grillo (Video) – [Derivadas de Funciones Exponenciales y Logarítmicas](#)
  - Nilsa Toro – [Derivadas de Funciones Exponenciales](#)
  - Visual Calculus – [Differentiation Formulas](#); [Derivative of the Exponential Functions](#).



# Objetivo

- Calcular la derivada de funciones exponenciales
- Calcular la derivada de funciones logarítmicas.
- Calcular la derivada de funciones compuestas que envuelven funciones exponenciales y logaritmos.
- Calcular el costo marginal, costo promedio marginal e ingreso marginal



# Derivadas de la funciones exponenciales

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \ln a \qquad \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Ejemplos:

$$\frac{d}{dx}(3^x) = 3^x \ln 3 \qquad \frac{d}{dx}\left(8^x + \frac{1}{x} - \pi^2\right) = \frac{d}{dx}(8^x) + \frac{d}{dx}(x^{-1}) - \frac{d}{dx}(\pi^2)$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \ln e = e^x \qquad = 8^x \ln 8 + (-1)x^{-1-1} - 0$$

$$= 8^x \ln 8 - x^{-2}$$

$$\frac{d}{dx}(e^x + x^2) = \frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}x^2 \qquad = 8^x \ln 8 - \frac{1}{x^2}$$

$$= e^x + 2x$$



# Ejemplo 1

- Calcule la derivada de

a)  $y = e^{2x} + 1$   $u = 2x$

Regla de la Cadena

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= e^{2x} \cdot \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}(1) \\ &= e^{2x} \cdot 2 + 0 \\ &= 2e^{2x}\end{aligned}$$

Regla de la Cadena

b)  $\frac{d}{dx}(5^{x^2}) = 5^{x^2} \cdot \frac{d}{dx}(x^2)$

$$\begin{aligned}&= 5^{x^2} \cdot \ln 5 \cdot 2x \\ &= 2x5^{x^2} \ln 5\end{aligned}$$



# Ejercicio #1

$$1. \frac{d}{dx} (4^x - e^x + x^3) = \frac{d}{dx} 4^x - \frac{d}{dx} e^x + \frac{d}{dx} x^3$$
$$= 4^x \ln 4 - e^x + 3x^2$$

Regla de la Cadena

$$2. \frac{d}{dx} (e^{5-3x}) = e^{5-3x} \frac{d}{dx} (5-3x)$$
$$= e^{5-3x} \cdot -3$$
$$= -3e^{5-3x}$$



# Ejemplo 2

Encuentre la ecuación de la recta tangente a  $y = (e^x + 1)$  por el punto  $(0, 2)$

- Solución:

$$\frac{d}{dx}(e^x + 1) = \frac{d}{dx}e^x + \frac{d}{dx}1 = e^x + 0 = e^x$$

- Pendiente de la tangente en  $(0,2)$  es  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = e^{(0)} = 1$

- La ecuación de la tangente por  $(0,2)$  es:

$$y - (2) = (1)(x - (0))$$

$$y - 2 = x$$

$$y = x + 2$$



# Derivadas de la funciones logarítmicas

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x \ln a}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$$

Ejemplos:

$$\frac{d}{dx}(\log_5 x) = \frac{1}{x \ln 5}$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x \ln e}$$

$$\frac{d}{dx}(\log_{\frac{2}{3}} x) = \frac{1}{x \ln \frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$$\frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x \ln 10}$$



# Ejemplo 3

- Calcule  $\frac{d}{dx} \ln(2x^3 + \pi^2)$
- Solución: 
$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \ln(2x^3 + \pi^2) \\ &= \frac{1}{2x^3 + \pi^2} \cdot \frac{d}{dx} (2x^3 + \pi^2) \\ &= \frac{1}{2x^3 + \pi^2} \cdot 6x^2 \\ &= \frac{6x^2}{2x^3 + \pi^2}\end{aligned}$$



## Ejemplo 4

Calcule  $\frac{dy}{dx}$  cuando  $y = \frac{1 + \ln x}{1 - \ln x}$

$$y' = \frac{(1 - \ln x) \frac{d}{dx} (1 + \ln x) - (1 + \ln x) \frac{d}{dx} (1 - \ln x)}{(1 - \ln x)^2}$$

$$= \frac{(1 - \ln x) \frac{1}{x} + (1 + \ln x) \frac{1}{x}}{(1 - \ln x)^2}$$

$$= \frac{\frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln x}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{\frac{2}{x}}{(1 - \ln x)^2} = \frac{2}{x(1 - \ln x)^2}$$



# Ejercicio #2

- Calcule  $\frac{dy}{dx}$  cuando  $y = \ln(x^2 + 10)$

- Solución: 
$$y' = \frac{1}{x^2 + 10} \cdot \frac{d}{dx}(x^2 + 10)$$

$$= \frac{1}{x^2 + 10} \cdot 2x$$

$$= \frac{2x}{x^2 + 10}$$



# Ejemplo 5

- Calcule el costo marginal y el costo promedio marginal para la función costo  $C(x) = 100 + x + e^{-0.5x}$
- Solución:
- La función costo marginal es  $C'(x)$ :

$$\begin{aligned}C'(x) &= 0 + 1 + e^{-0.5x} \cdot (-0.5) \\&= 1 - 0.5e^{-0.5x}\end{aligned}$$

- La función costo promedio es  $\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x}$ :

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{100 + x + e^{-0.5x}}{x}$$

$$\overline{C}(x) = \frac{100}{x} + 1 + \frac{e^{-0.5x}}{x}$$

*Continúa ...*



# Ejemplo 5 ...

$$\overline{C}(x) = \frac{100}{x} + 1 + \frac{e^{-0.5x}}{x} = 100x^{-1} + 1 + x^{-1}e^{-0.5x}$$

- La función costo promedio marginal es:

$$\overline{C}'(x) = \frac{-100}{x^2} + 0 + \left[ x^{-1} \frac{d}{dx} e^{-0.5x} + e^{-0.5x} \frac{d}{dx} x^{-1} \right]$$

$$= \frac{-100}{x^2} + \left[ \frac{-0.5e^{-0.5x}}{x} + \frac{-e^{-0.5x}}{x^2} \right]$$

$$= \frac{-100}{x^2} + \frac{-0.5e^{-0.5x}}{x} - \frac{e^{-0.5x}}{x^2}$$

$$= \frac{-100 - e^{-0.5x}}{x^2} + \frac{-0.5e^{-0.5x}}{x}$$

