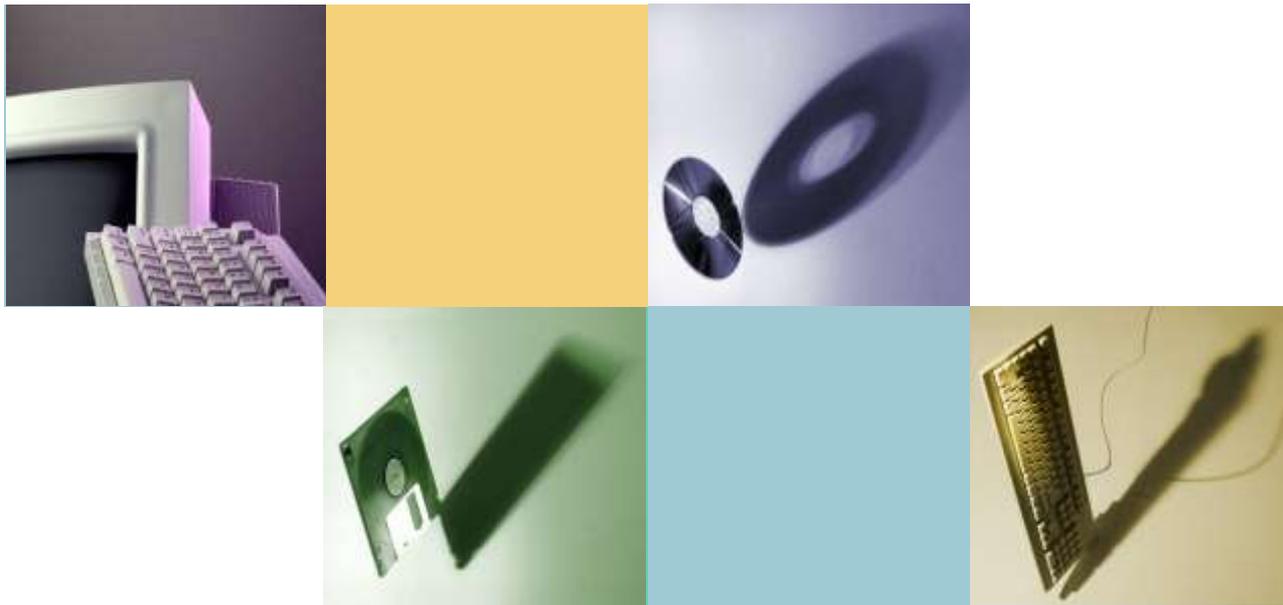


Unidad 3 – Lección 3.2



Aplicaciones de la Derivada: Valores Máximos y Mínimos

Actividades 3.2

- Referencia: 13-2 Máximos y Mínimos; Ejemplos del 1 al 5; Páginas 542-543 (4ta Ed páginas 549-550), problemas impares 1 – 43.
- **Asignación 3.2** Página 543(4ta Ed página 550) 28 y 32. Use Graph para trazar la gráfica de las funciones y el los puntos máximos y mínimos.
- **Referencias del Web:**
 - Paul's Online note: [Minimum and Maximum values](#).
 - [Extrema on the Interval](#)
 - Visual Calculus - The [Mean Value Theorem](#)
 - Ian Crow - [Rolle's Theorem and The Mean Value Theorem](#)
 - eMathLab – [Derivative Aplications](#)



Objetivo

Al finalizar esta lección podrás:

- Diferenciar entre los valores extremos relativos y absolutos de una función.
- Identificar los números críticos de una función en un intervalo.
- Hallar los números críticos de una función en un intervalo.
- Determinar los valores extremos de una función continua en un intervalo cerrado.



Valores extremos

¿Puntos máximo relativo vs. máximo absoluto?

Máximo relativos o local:

Máximo absoluto:

¿Puntos mínimo relativos vs. mínimo absoluto?

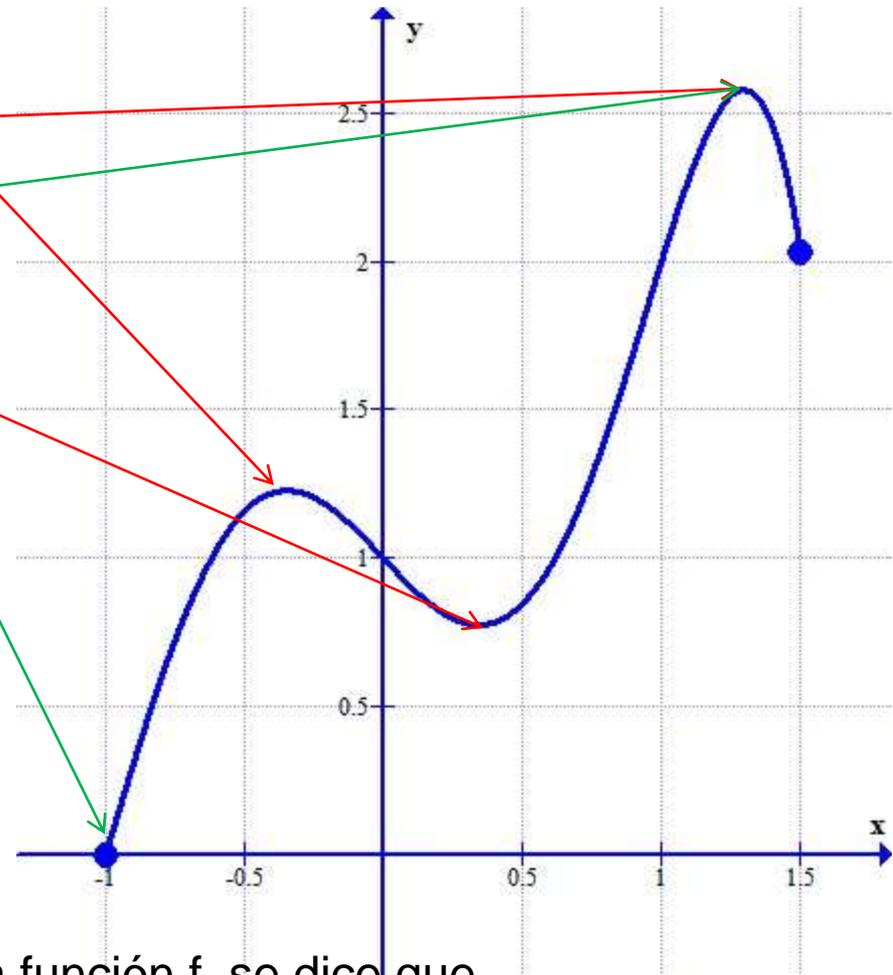
Mínimo relativos:

Mínimo absoluto:

Un punto mínimo o máximo **relativo** o **local** tiene que estar en el intervalo abierto (a, b) .

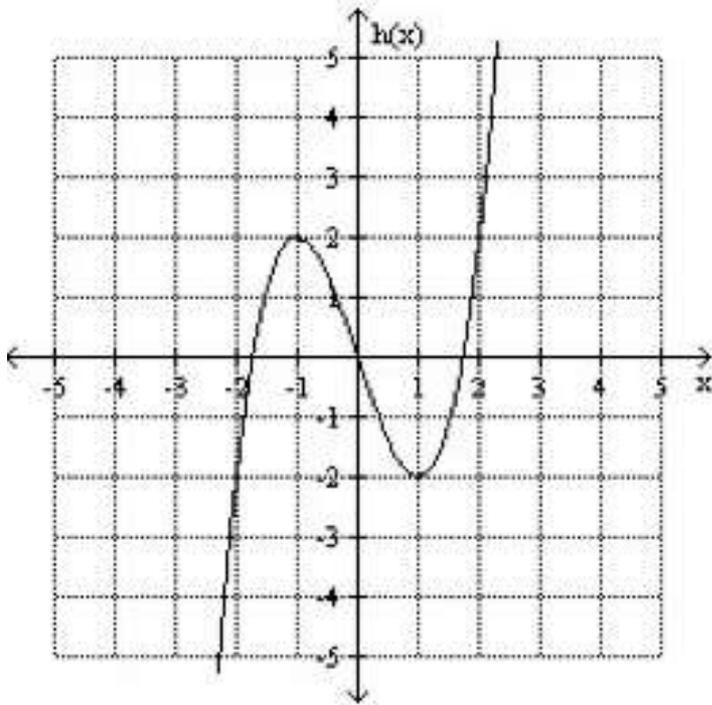
Un punto mínimo o máximo **absoluto** puede ser un punto relativo o puede estar uno de los puntos límites del intervalo cerrado $[a, b]$.

Si $(a, f(a))$ es un punto extremo de una función f , se dice que ocurre en $x = a$ y que $f(a)$ es un **valor extremo** (relativo o absoluto) de f .



Ejemplo 1

- De la gráfica aproxime dónde la función tiene un extremo local.



- Aproximadamente en $x = -1$ la función asume un valor máximo local.
- En $x = -1$, el valor máximo local de la función es aproximadamente **2**.
- Además, se observa que aproximadamente en $x = 1$ la función asume un valor mínimo relativo. Este valor es aproximadamente **-2**.



Puntos críticos

- Números Críticos

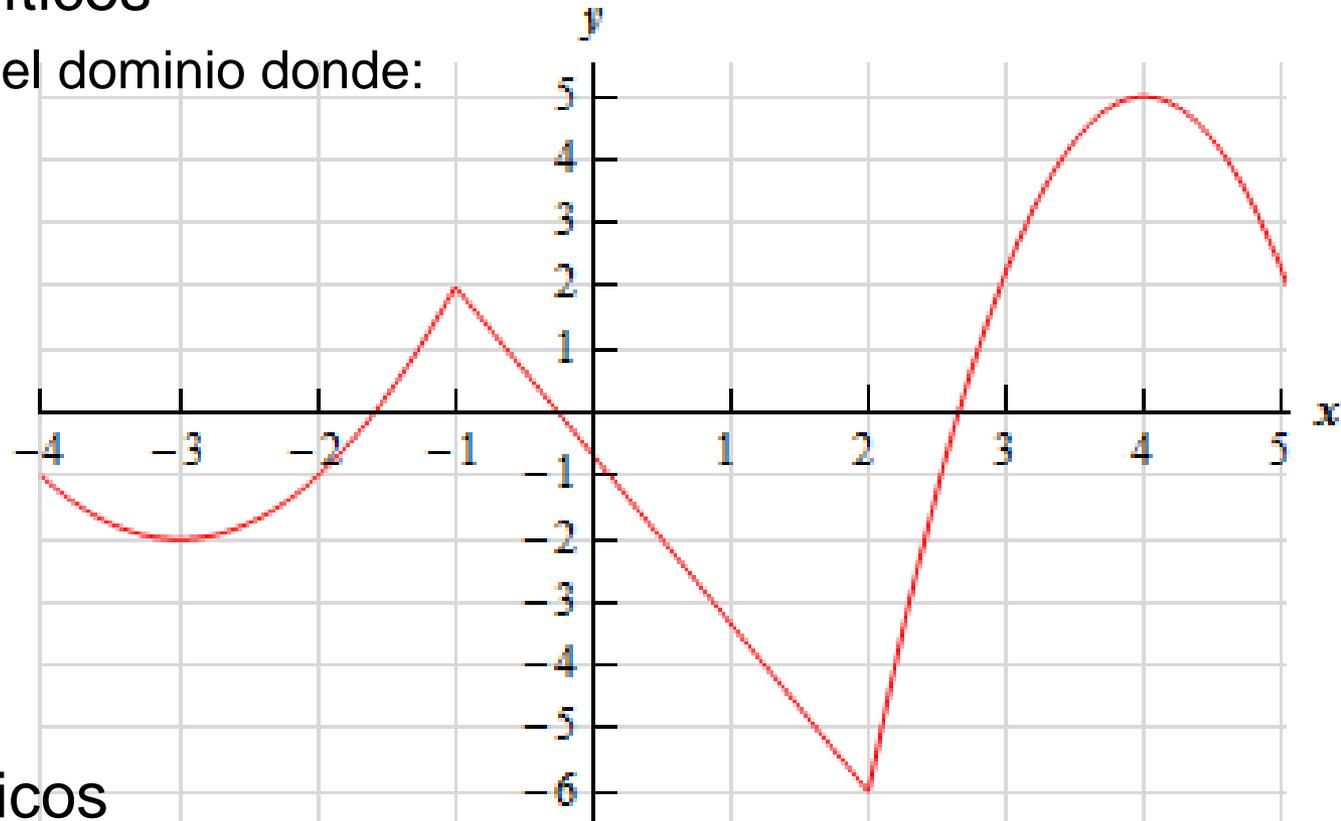
- Números del dominio donde:

$$f'(x) = 0$$

$$X = -3, 4$$

$$f'(x) \text{ no existe}$$

$$X = -1, 2$$



- Valores Críticos

- Valores de la función correspondientes a sus números críticos

$$X = -2, 2, -6, 4$$



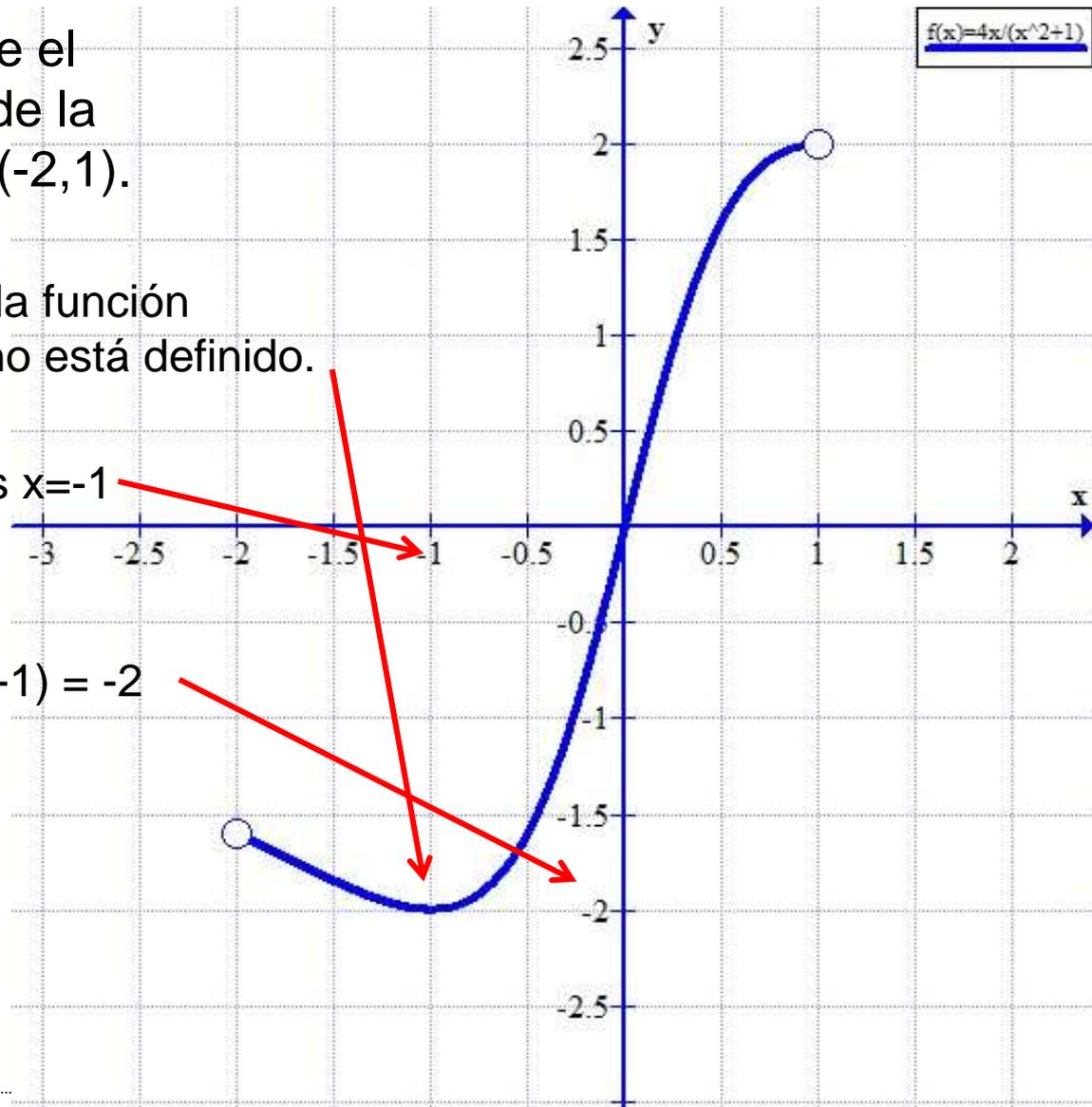
Ejemplo 2

De su gráfica, aproxime el número y valor crítico de la función en el intervalo $(-2,1)$.

Identifique puntos dónde la función derivada f' es 0 o donde no está definido.

Posible número crítico es $x=-1$

Posible valor crítico es $f(-1) = -2$



Ejemplo 3

Determine el número y valor crítico de la función $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ en el intervalo $(-2,1)$.

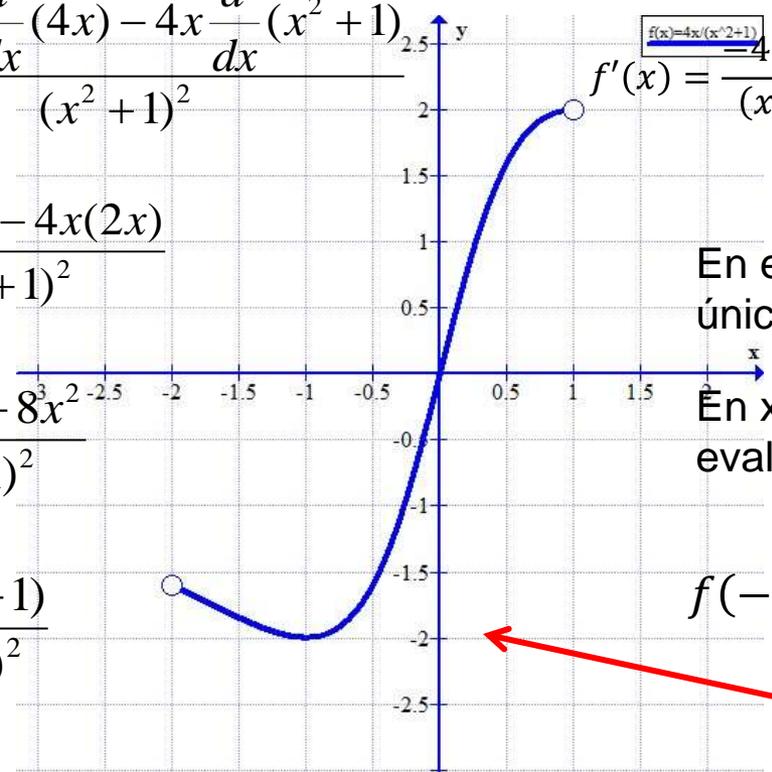
Solución (analítica):

Paso 1- Calcule la función derivada f'

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(x^2 + 1) \frac{d}{dx}(4x) - 4x \frac{d}{dx}(x^2 + 1)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4(x^2 + 1) - 4x(2x)}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{4x^2 + 4 - 8x^2}{(x^2 + 1)^2} \\
 &= \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}
 \end{aligned}$$

Paso 2 - Identifique puntos dónde f' toma el valor de 0 o donde no está definido:

$$\begin{aligned}
 0 &= -4(x^2 - 1) \\
 x &= \pm 1 \\
 0 &= (x^2 + 1)^2 \\
 x &= \text{no tiene solución}
 \end{aligned}$$



En el intervalo abierto $(-2,1)$, el único **número crítico** es $x = -1$

En $x = -1$, el **valor crítico** se calcula evaluando la función $f(-1)$:

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= \frac{4(-1)}{(-1)^2 + 1} \\
 &= -2
 \end{aligned}$$



Ejercicio #1

- Encuentre los valores críticos de $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$
- Solución (analítica):
- Calcule $f'(x)$ $f'(x) = 3\left(\frac{x^2}{3}\right) - 2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = x^2 - x - 2$
- Determine los números críticos. Esto son, valores en donde $f'(x) = 0$ o $f'(x)$ no existe

$$0 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$
$$x = -1 \text{ y } x = 2$$

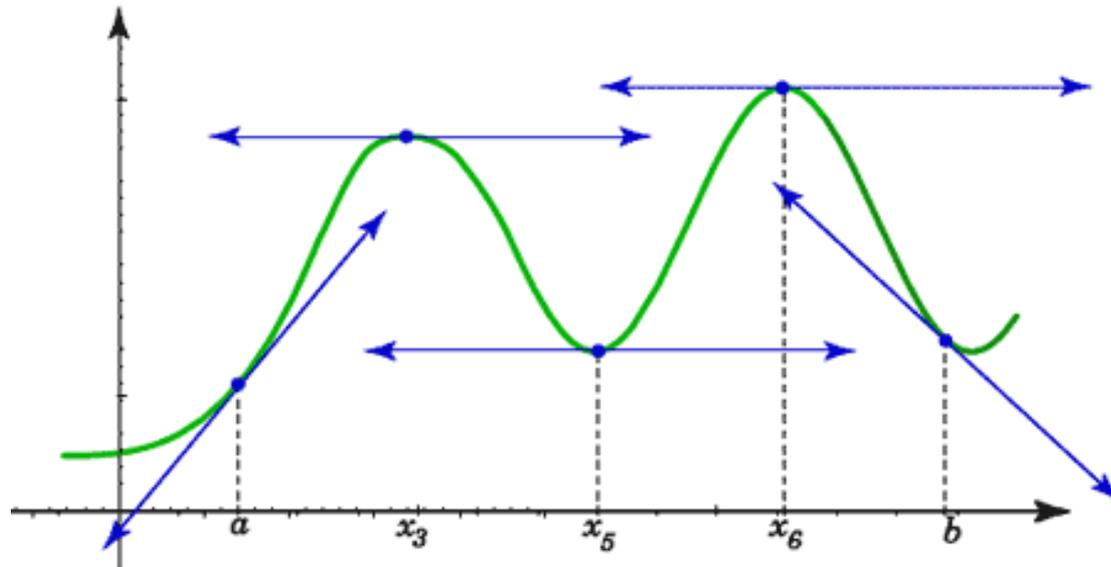
- Los valores críticos son:

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) = \frac{7}{6}$$

$$f(2) = \frac{-10}{3}$$



Prueba de la primera derivada



- Si $f'(x) > 0$ para todo valor de x en (a,b) , entonces f es una **función creciente** en $[a,b]$
- Si $f'(x) < 0$ para todo valor de x en (a,b) , entonces f es una **función decreciente** en $[a,b]$
- Si $f'(x) = 0$ para todo valor de x en (a,b) , entonces f es una **función constante** en $[a,b]$



Ejemplo 4

- Para la función: $f(x) = x^4 - 4x - 1$ encuentre los intervalos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.

- Solución

- Paso 1 - Calcule la primera $f'(x) = 4x^3 - 4$

- Paso 2 – Identifique números críticos. $0 = 4x^3 - 4$

$$4x^3 = 4$$

$$x = 1$$

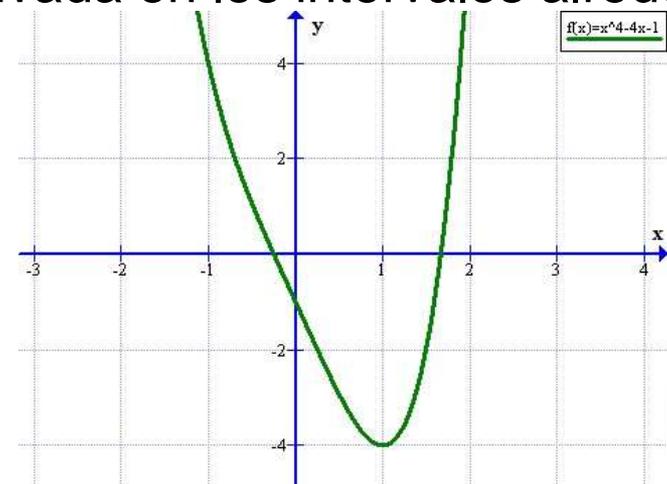
- Paso 3 – Analice la primera derivada en los intervalos alrededor de los número críticos.

$$(-\infty, 1) \rightarrow f'(x) < 0$$

$\rightarrow f$ decrece

$$(1, \infty) \rightarrow f'(x) > 0$$

$\rightarrow f$ crece



Ejemplo 5

Determine si $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$ asume un mínimo o un máximo relativo en el intervalo $(-2,1)$. En el caso afirmativo, indentifíquelo.

Solución (analítica):

1. Calcule valores críticos $f'(x)$ en $(-2,1)$

El único número crítico en $(-2,1)$ es $x = -1$

2. Determine cambio de signo de $f'(x) = \frac{-4(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2}$ alrededor del número crítico (si existe).

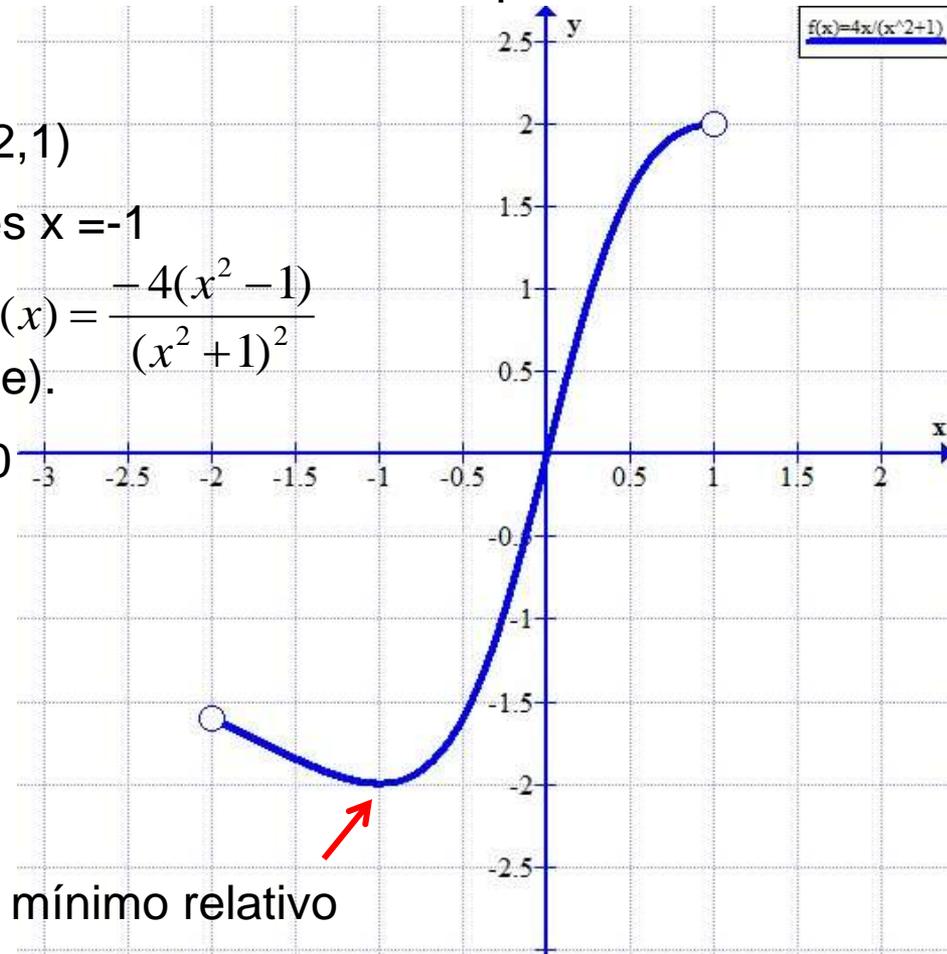
Para $x = -1$, tome $x = -1.5$ y $x = 0$

$$f'(-1.5) = \frac{-4((-1.5)^2 - 1)}{((-1.5)^2 + 1)^2} = \frac{-}{+} = -$$

$$f'(0) = \frac{-4((0)^2 - 1)}{((0)^2 + 1)^2} = \frac{+}{+} = +$$



En $x = -1$ hay un mínimo relativo



Ejemplo 6

Determine si $f(x) = 2 - (x - 1)^3$ asume un mínimo o un máximo relativo en el intervalo $[0,2]$. En el caso afirmativo, indentifíquelo.

Solución (analítica):

1. Calcule valores críticos $f'(x)$ en $[0,2]$

$$f'(x) = -3(x - 1)^2$$

El único número crítico en $[0,2]$ es $x = 1$

2. Determine cambio de signo de $f'(x)$ alrededor del número crítico (si existe).

Para $x = 1$, tome $x = 0.5$ y $x = 1.5$

$$f'(0.5) = -3((0.5) - 1)^2 = -$$

$$f'(1.5) = -3((1.5) - 1)^2 = -$$

NO HAY ni un mínimo o máximo relativo en $[0,2]$



Ejemplo 7

- Encuentre los máximos o mínimos absolutos en $[-2, 5]$ de

- Solución:

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x$$

- Números críticos: $x = -1$ y $x = 2$

- Valores críticos: $f(-1) = \frac{7}{6}$ y $f(2) = -\frac{10}{3}$

- Valor de la función en a y b .

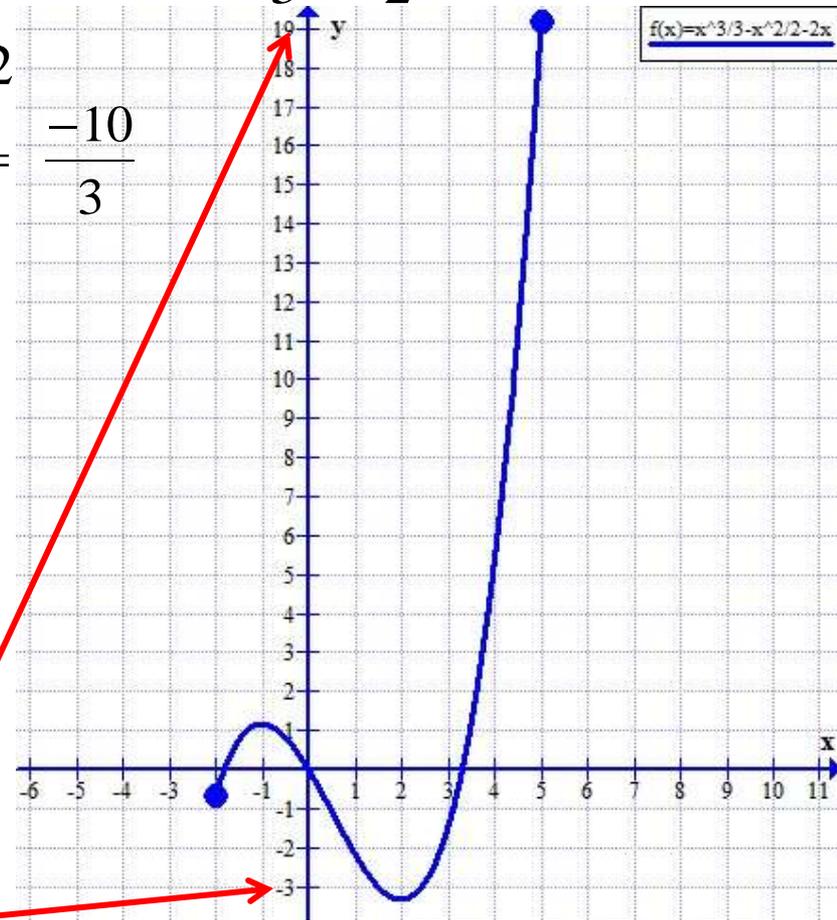
$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) = -\frac{2}{3}$$

$$f(5) = \frac{115}{6}$$

- Compare

$$f(5) = \frac{115}{6} \text{ es el máximo absoluto}$$

$$f(2) = -\frac{10}{3} \text{ es el mínimo absoluto}$$



¿Cómo determinar valores extremos?

Para encontrar los **valores extremos absolutos** de una función f en un intervalo cerrado $[a,b]$ son:

1. Encuentre los valores críticos de f en (a,b) .
2. Evalúe la función f en a y b .
3. Compare los valores críticos con los valores de $f(a)$ y $f(b)$.

El valor mínimo será el **mínimo absoluto** en $[a,b]$.

El valor máximo será el **máximo absoluto** en $[a,b]$.



Ejemplo 8

- El costo de vender x artículos para una pequeña empresa está dado por $C(x) = -\frac{1}{2}(x - 12)^2 + 72$. ¿Cuál es el número de artículos que le ocasionará el costo mayor?
- Solución:

$$\begin{aligned}C'(x) &= -\frac{1}{2} \cdot 2(x-12)^{2-1} \cdot 1 + 0 \\ &= -x + 12\end{aligned}$$

$$\text{Si } C'(x) = 0 .$$

$$0 = -x + 12$$

$$x = 12$$

El costo mayor ocurrirá cuando empresa venda 12 artículos

