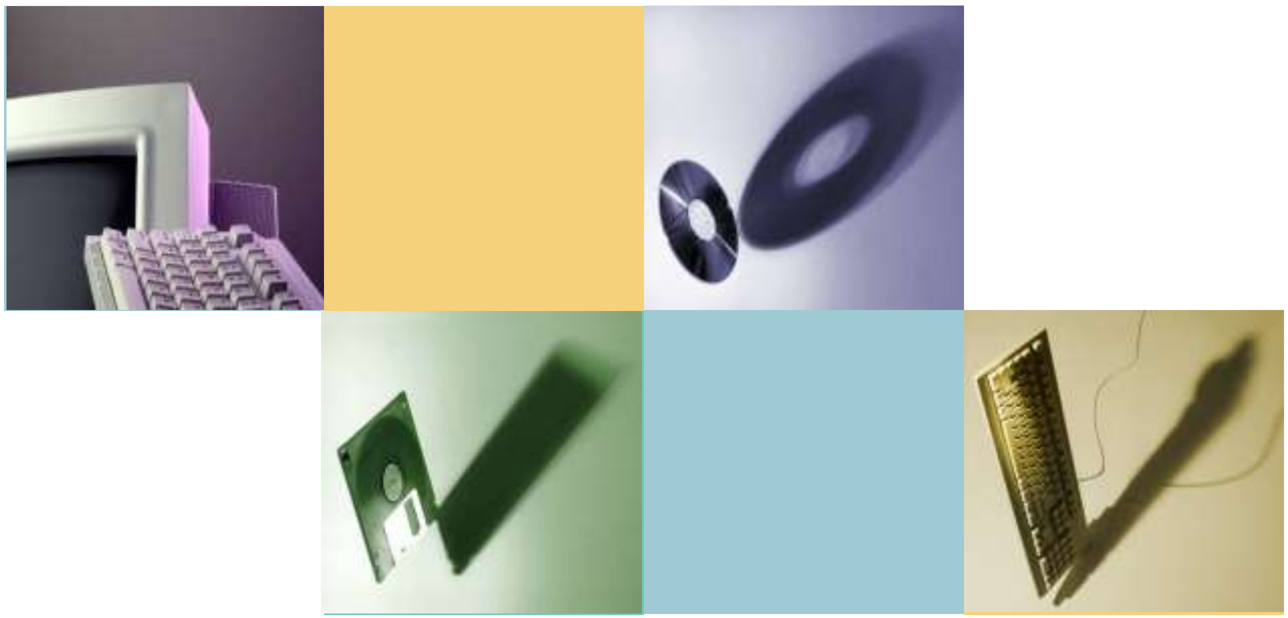
Unidad 3 – Lección 3.3



Optimización

Actividades 3.3

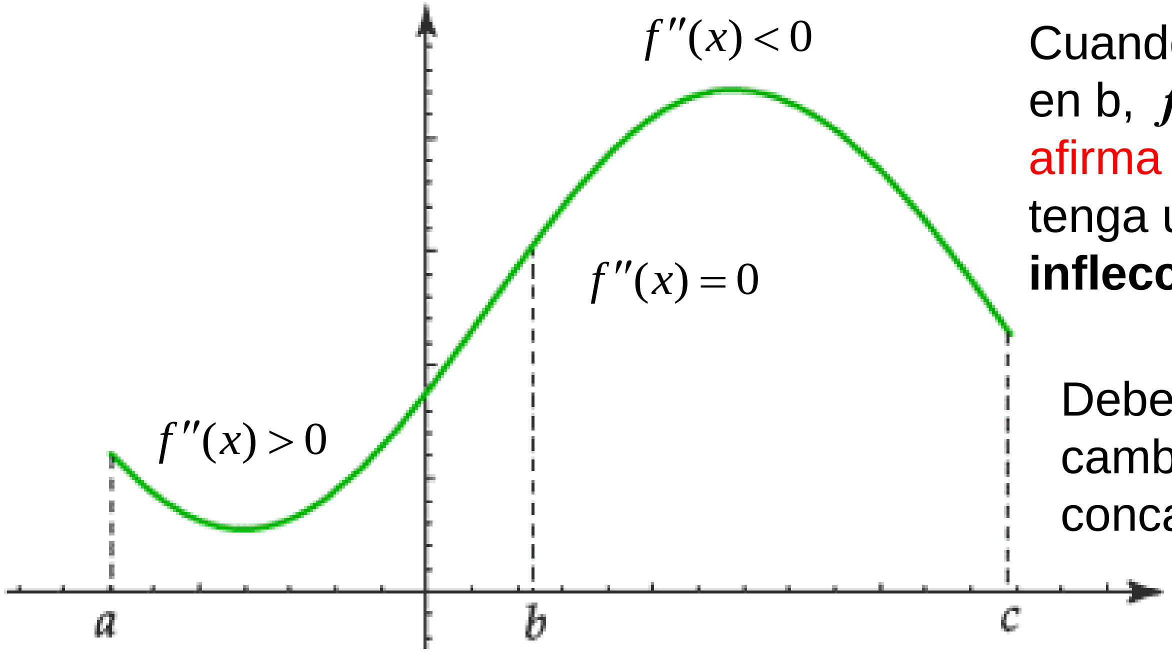
- **Referencia**: Section 13.5: Aplicaciones de Máximos y Mínimos; Ejemplos del 1 al 7; problemas impares 1 – 35 de las páginas 567 a 569.
- **Asignación** 3.3: Página 568 ; Problemas 20, 24 y 27
- **Referencias**:
- Paul's Online Notes - Optimization Part 1. Part 2
- Duane Cuba's: Maximum/Minimum Problems
- Khan Academy Videos – Optimization problems with Calculus: Problema 1; problema 2 ; problema 3; problema 4.

Objetivo

Al finalizar esta lección podrás:

- Determinar los intervalos en donde una función es cóncava hacia arriba o cóncava hacia abajo.
- Identificar los puntos de inflexión de la gráfica de una función.
- Aplicar la Prueba de la Segunda Derivada para encontrar máximos o mínimos relativos y puntos de inflexión.
- Resolver problemas de optimización donde se provee la función.
- Resolver problemas de optimización básicos de perímetro y área que envuelven un triángulo, rectángulo y un círculo.

Prueba de la segunda derivada



Cuando la segunda derivada en b, ***f " (b)***) es 0, sólo afirma la posibilidad que ***f*** tenga un **punto de inflección** en x = b.

Debe confirmar el cambio de concavidad.

- Una función ***f*** definida en un intervalo [a,b] es **cóncava hacia arriba** si su segunda derivada (***f "***) es positiva. Además, f tiene un **mínimo relativo**.
- Una función ***f*** definida en un intervalo [b,c] es es **cóncava hacia abajo**, si segunda derivada (***f "***) es negativa. Además, f tiene un **máximo relativo**.

Ejemplo 1

- Analice la gráfica de la función $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^3}{3}$ con respecto a la concavidad y a sus puntos de inflexión.
- Solución:
- Paso 1 – Cálcule la primera y la segunda derivada

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}-x^2 \qquad\qquad f''(x)=x^2-2x$$

- Paso 2 – Identifique los intervalos de concavidad.

Identifique valores donde la segunda derivada es 0.

$$f''(x)=x(x-2)$$
$$0=x(x-2)$$
$$x=0 \qquad x=2$$

Posibles puntos de inflexión ocurren en x= 0 y en x = 2.

Intervalos para analizar variación de signos.

$$(-\infty,0) \qquad (0,2) \qquad (2,\infty)$$

Ejemplo 2 …

- Paso 3 – Construya tabla para analizar variación de signo $f''(x) = x(x-2)$

	x	x-2	f''(x)	concavidad
(-infinito, 0)	-	-	+	Hacia arriba
(0, 2)	+	-	-	Hacia abajo
(2, +infinito)	+	+	+	Hacia arriba

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

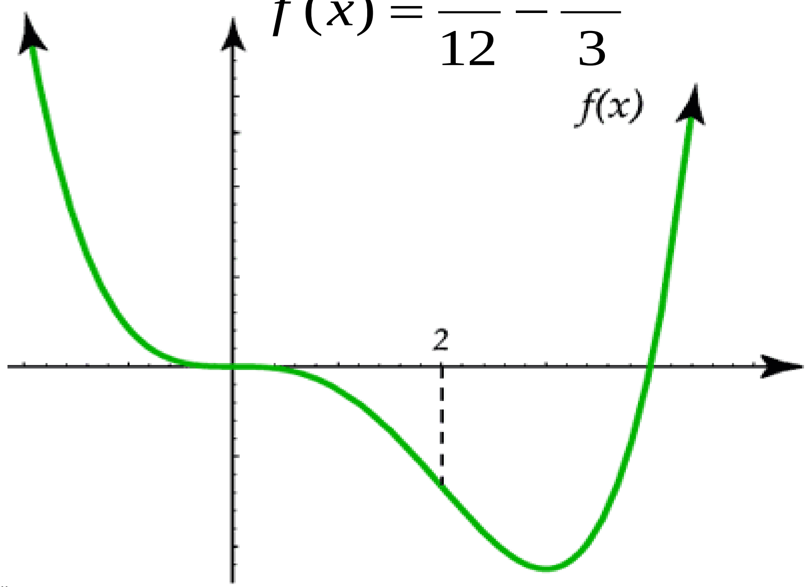


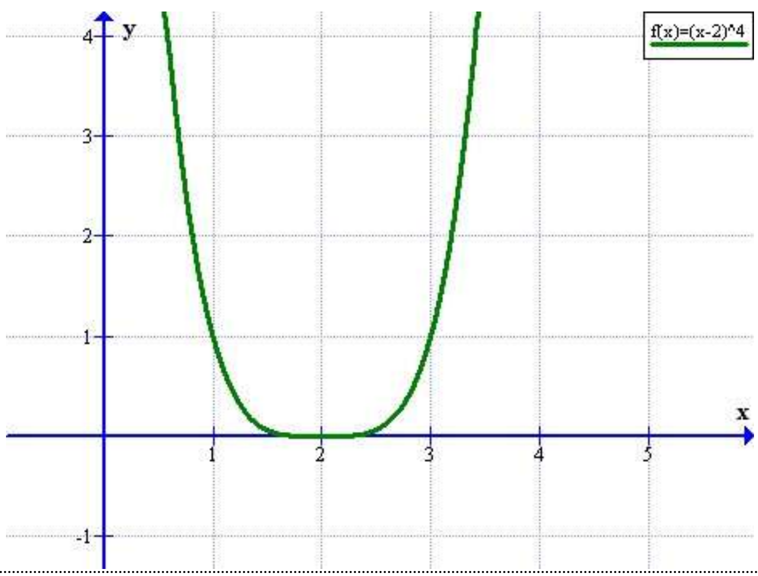
Tabla confirma puntos de inflexión en x= 0, x = 2

f''(x) = 0 no asegura puntos de inflexión

- Recuerde: f''(c) = 0 no garantiza que exista un punto de inflexión en (c, f (c)).
- Considere la función: $f(x) = (x - 2)^4$

$$f'(x) = 4(x - 2)^3 \qquad f''(x) = 12(x - 2)^2$$

- Observe f ''(2) = 0. Sin embargo, f ''(x) es positivo para valores menores o mayores que 2.



Es decir que el punto (2, 0) NO es un punto de inflexión,

Ejemplo 2

- Determine dos números positivos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.
- Solución:
- Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -
  - Sea x, y los dos números y P su producto.
  - Se desea maximizar el producto P.
- Paso 2 - Identifique o establezca ecuación principal.

$$P = xy$$

Ejemplo 2 …

- Paso 3 - Identifique o establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.
  - Como la suma de los números es 10, entonces:

$$x + y = 10$$

- Paso 4 - Utilice las ecuaciones auxiliares para expresar la ecuación principal como una función de la variable que se desea optimizar.
  - Como $y = 10 - x$

$$P = xy$$

$$P = x(10 - x)$$

$$P(x) = x(10 - x)$$

Ejemplo 2 …

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$P'(x) = 10 - 2x$$

- Calcule los números críticos:

$$0 = 10 - 2x$$

$$x = 5$$

  – Como $P''(x) = -2$, entonces $P''(5) < 0$. Esto es, en $x = 5$ la función tiene un valor máximo.

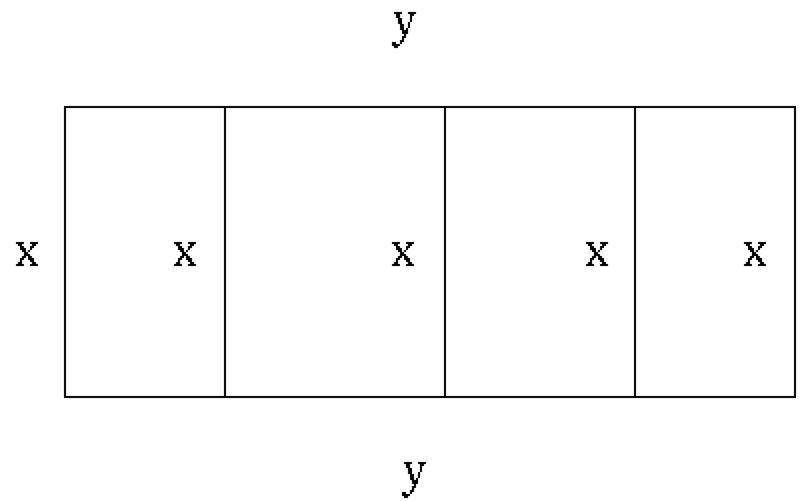
- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  – Para maximizar el producto x = 5, y = 5. Es decir, ambos números tienen que ser 5.

Ejemplo 3

- Con 500 pies de *cyclone fence* se construye un área rectangular con cuatro particiones paralelas. ¿Cuál será las dimensiones que maximizará el área total?
- Solución:

Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

Sea x, y las dimensiones del área rectangular A.
Se desea maximizar el área A.



Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$A = xy$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.

$$5x + 2y = 500$$

Ejemplo 3 …

- Paso 4 - Utilice las ecuaciones auxiliares para expresar la ecuación principal como una función de la variable que se desea optimizar.

$$5x + 2y = 500$$

$$2y = -5x + 500$$

$$y = \frac{-5}{2}x + 250$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x\left(\frac{-5}{2}x + 250\right)$$

$$A(x) = \frac{-5}{2}x^2 + 250x$$

- Paso 5 - Calcule los valores óptimos de la función.

$$A'(x) = -5x + 250$$

$$0 = -5x + 250$$

$$x = 50$$

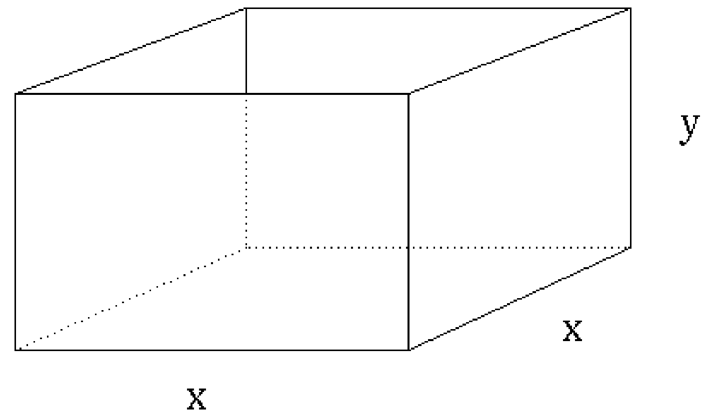
$$A''(x) = -5$$

En $x = 50$ hay un máximo.

- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  - Las dimensiones del área rectangular que maximazarán el área toal serán: ancho de 50 pies y el largo 125 pies.

Ejercicio #1

- Una caja rectangular abierta con una base cuadrada se construirá de 48 ft.^{2} de un material. ¿Cuáles dimensiones resultarán en una caja con el volumen mayor possible volume ?



Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

x – ancho de la base

y – altura

V – volumen (maximizar)

Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$V = x^2 y$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.

$$48 = x^2 + 4xy \longrightarrow y = \frac{12}{x} - \frac{x}{4}$$

Paso 4 – Establezca función que se desea optimizar.

$$V(x) = 12x - \frac{1}{4}x^3$$

Ejercicio #1 …

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$V(x) = 12x - \frac{1}{4}x^3$$

$$V'(x) = 12 - \frac{3}{4}x^2$$

$$0 = 12 - \frac{3}{4}x^2$$

$$\frac{3}{4}x^2 = 12$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

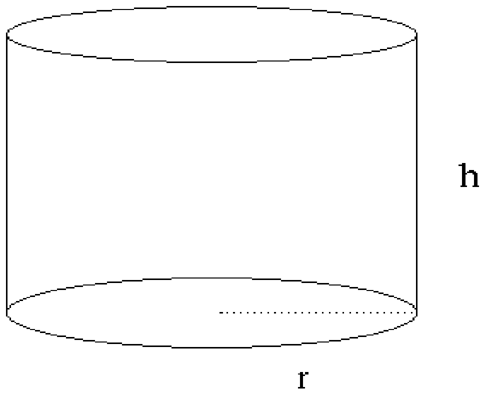
- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  – Para maximizar V, x = 4 pies.

$$y = \frac{12}{x} - \frac{x}{4} = \frac{12}{(4)} - \frac{(4)}{4} = 2$$

  – Para maximizar el volumen las dimensiones de la caja debe ser 4 pies x 4 pies x 2 pies.

Ejercicio #2

- Un contenedor cilíndrico circular sin tapa tiene un área de superficie de 3π ft.^{2} ¿Cuál es la altura h y el radio r de la base que maximizará su volumen?



Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

r – el radio de la base

h – altura

V – volumen (maximizar)

Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$V = \pi r^2 h$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.

$$3\pi = \pi r^2 + 2\pi r h \longrightarrow h = \frac{3}{2r} - \frac{r}{2}$$

Paso 4 – Establezca función que se desea optimizar.

$$V(r) = \frac{3}{2}\pi r - \frac{1}{2}\pi r^3$$

Ejercicio #2 …

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$V(r) = \frac{3}{2}\pi r - \frac{1}{2}\pi r^3$$

$$V'(r) = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi r^2$$

$$0 = \frac{3}{2}\pi - \frac{3}{2}\pi r^2$$

$$\frac{3}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi$$

$$r^2 = 1$$

$$r = \pm 1$$

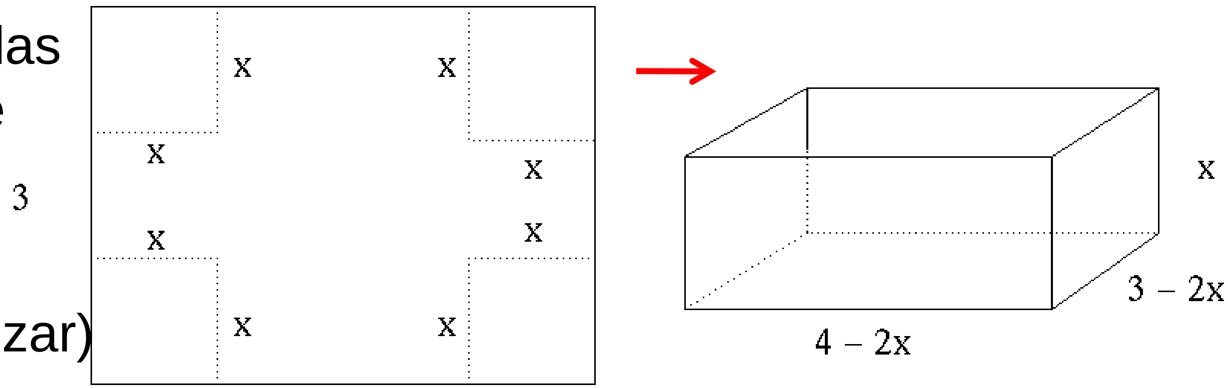
- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  – Para maximizar V, r = 1 pie.

$$h = \frac{3}{2r} - \frac{r}{2} = \frac{3}{2(1)} - \frac{(1)}{2} = 1$$

  – Para maximizar el volumen la altura del cilindro debe ser de 1 pie.

Ejemplo 4

- Una hoja de cartón de 3 ft. por 4 ft. se convertirá en una caja cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblándolas por los lados resultantes. ¿Cuál será las dimensiones de la caja con el volumen mayor?



Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

x – altura de la caja
V – volumen (maximizar)

Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$V = (4-2x)(3-2x)x$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares). - No aplica

Paso 4 – Establezca función que se desea optimizar.

$$V(x) = 12x - 14x^2 + 4x^3$$

Ejemplo 4 …

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$V'(x) = 12 - 28x + 12x^2$$

$$0 = 12 - 28x + 12x^2$$

$$0 = 3 - 7x + 3x^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$$

$$x \approx 0.57 \text{ ó } 1.77$$

Observe que x = 1.77 no puede ser un valor posible

- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  – Para maximizar volumen las dimensiones de la caja deben ser aproximadamente de 0.57 pies x 1.86 pies x 2.86 pies.