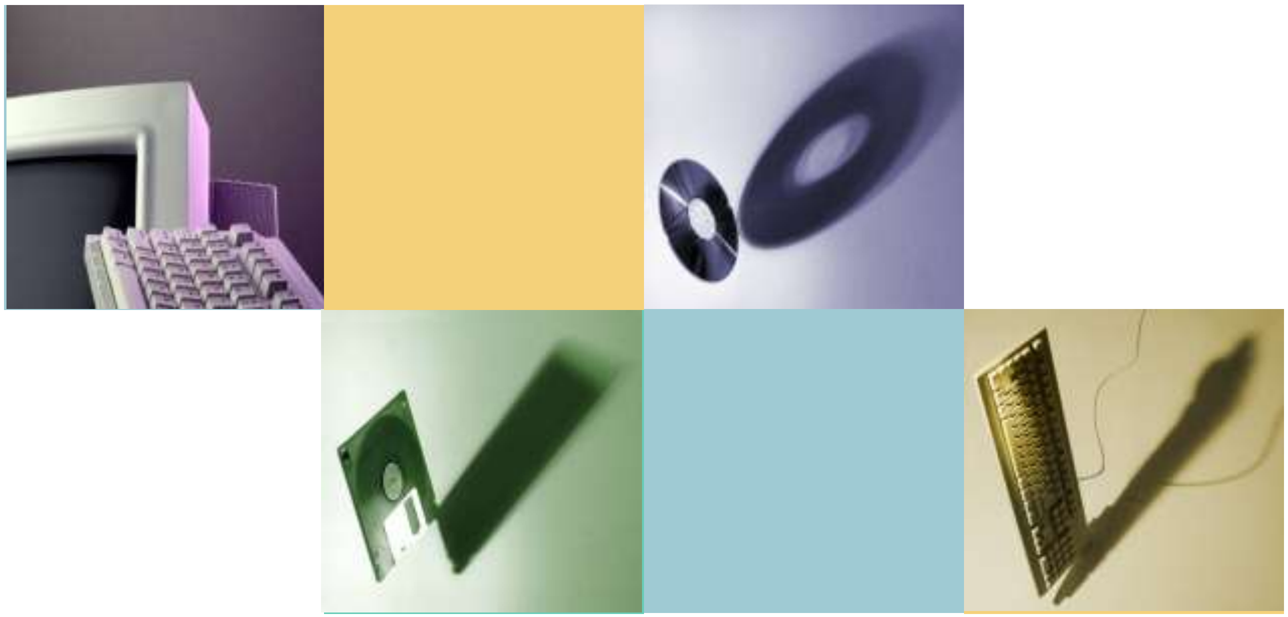
Unidad 4 – Lección 4.1



La Integral Indefinida

Actividades 4.1

- **Ejemplos para estudiar y Ejercicios de Práctica**: Sección 15.1: Antiderivadas; Ejemplos del 1 al 7; problemas impares 1 – 35, 67 de las páginas 627-629 (4ta Ed págs 635-636).
- **Asignación 4.1:** Resuelva problemas 26 y 68, páginas 628 y 629 (4ta Ed págs 636-637).
- Referencias:
- Paul's Online Note – Indefinite Integrals
- Visual Calc - Antiderivatives / Indefinite Integrals; Tutorial sobre antiderivadas y el integral indefinido. Table of Elementary Indefinite Integrals. Ejercicios de práctica (Drill) usa Java.
- eMathLab – Indefinite Integrals

Objetivo

- Describir la antiderivada de una función
- Usar la notación de la integral indefinida para antiderivadas
- Identificar la antiderivada de funciones exponenciales básicas.
- Usar las reglas básicas de integración para encontrar la Integral Indefinida de una función polinómica.

Antiderivada

- Una función F es la **antiderivada de f** sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

- Ejemplo: $F(x) = x^2 + x - 5$
- es una antiderivada de $f(x) = 2x + 1$
- Otras son:

$$F_1(x) = x^2 + x + 1 \quad F_2(x) = x^2 + x + \pi \quad F_3(x) = x^2 + x$$

- En general, si F es una función antiderivada de f sobre un intervalo I, cualquier otra antiderivada de f será de la forma $F(x)$ + c donde c es una constante.

Integral indefinida

- La *integral indefinida* de $f(x)$ se define como el conjunto de todas las antiderivadas F de $f(x)$.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

donde c es una constante.

- Ejemplos:

$$\int (2x+1)dx = x^2 + x + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas

- Recuerde

$$\int k\,dx = kx + c$$

Ejemplos:

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int \pi\,dx = \pi x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ ,\ n \neq -1$$

Ejemplos:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas …

- Si f, g son las funciones antiderivables en un intervalo y k una constante. Entonces:

$$\int kf(\mathrm{x})\,dx = k\int f(\mathrm{x})\,dx$$

- Ejemplos:

$$\int 6x^2\,dx = 6\int x^2\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right] + c = 2x^3 + c$$

$$\int -3\sqrt[3]{x}\,dx = -3\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = -3\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = -3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -9\frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} + c = \frac{-9x\sqrt[3]{x}}{4} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas …

- Si f, g son las funciones antiderivables. Entonces:

$$\int [\,f(\mathrm{x}) \pm \mathrm{g}(\mathrm{x})]\,dx = \int f(\mathrm{x})\,dx \pm \int g(\mathrm{x})\,dx$$

- Ejemplos:

$$\int \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + \int 1 dx$$

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + c$$

$$\int \left(1 + \frac{-2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 1\,dx + \int -2x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \int 1\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= x - 2\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + c \qquad = x - 4\sqrt{x} + c$$

Ejercicio #1

1. $$\int\left(1-x^{3}+12x^{5}\right)dx \;=\int dx-\int x^{3}dx+12\int x^{5}dx$$
$$=x-\frac{1}{4}x^{4}+2x^{6}+c$$

2. $$\int\left(\sqrt[4]{x^{3}}\right)dx \;=\int x^{3/4}\,dx$$
$$=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{7/4}+c$$
$$=\frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7}+c\;=\frac{4x\sqrt[4]{x^{3}}}{7}+c$$

Antiderivadas para recordar ..

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c$$

Si a es un número, $\displaystyle \int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$

$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

Ejemplos:

$$\int \left(1 - \frac{6}{x}\right) dx = \int dx - 6\int \frac{1}{x}\,dx = x - 6\ln|x| + c$$

$$\int -3\cdot\pi^x\,dx = -3\int \pi^x\,dx = -3\cdot\frac{\pi^x}{\ln\pi} + c = \frac{-3\pi^x}{\ln\pi} + c$$

Ejercicio #2

$$\int 2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}\, dx = 2e^{x} + c$$

$$\int 2^{x}\sqrt{3}\, dx = \frac{2^{x}\sqrt{3}}{\ln 2} + c$$

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\, dx = \int\left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int\left(3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 3

- Encuentre f si $f'(x) = 5 - 2x + x^2$ si $f(1) = 3$
- Solución: f es una antiderivada de $f'(x)$

$$f = \int \left(5 - 2x + x^2\right) dx = \int 5dx - \int 2xdx + \int x^2 dx$$

$$= 5x - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$$

$$= 5x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + c$$

- si f(1) = 3, entonces

$$f(1) = 5(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3 + c = 3$$

$$5 - 1 + \frac{1}{3} + c = 3$$

$$c = -\frac{4}{3}$$

$$f(x) = 5x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}$$

Ejemplo 4

- El costo marginal de cierta empresa está dada por $C'(x) = 18 - 0.05x + 0.005x^2$. Si el costo de producir 200 unidades es de $25,400, encuentre

a) La función costo

b) Los costos fijos de la empresa

c) El costo de producir 450 unidades

Ejemplo 4 (a)…

- $C(x) = \int C'(x)dx = \int (18 - 0.05x + 0.005x^2)dx$

$$= 18x - \frac{0.05x^2}{2} + \frac{0.005x^3}{3} + c$$

Si el costo de producir 200 unidades es de $25,400,

$$25400 = 18(200) + \frac{0.05(200)^2}{2} + \frac{0.005(200)^3}{3} + c$$

$$25400 = (3600) + 1000 + \frac{40{,}000}{3} + c$$

$$25400 \approx 17{,}933 + c$$

$$7{,}467 \approx c$$

Por tanto la función costo es: $C(x) = 18x + \frac{0.05x^2}{2} + \frac{0.005x^3}{3} + 7{,}467$

Ejemplo 4 (b) y (c) …

- Si la función costo es: $\mathrm{C}(x) = 18x + \frac{0.05x^2}{2} + \frac{0.005x^3}{3} + 7{,}467$

- Los costos fijos son: $\$7{,}467$

- El costo de producir 450 unidades es aproximadamente:

$$\mathrm{C}(450) = 18(450) + \frac{0.05(450)^2}{2} + \frac{0.005(450)^3}{3} + 7{,}467$$

$$= 8{,}100 + \;\; 5{,}062.50 \; + \; 151{,}875 \; + 7{,}467$$

$$\approx \$172{,}505$$

Integral indefinido

- Observe

$$\int 3x\,dx = \frac{3x^2}{2} + c \qquad \int 3t\,dt = \frac{3t^2}{2} + c \qquad \int 3z\,dz = \frac{3z^2}{2} + c$$

- Compare

$$\int 3x\,dt \qquad \int 3t\,dx \qquad \int 3z\,dx$$

- Recuerde: Al integrar, observe siempre con respecto a qué variable lo está haciendo.
- ¡Observe el diferencial! … ***dx, dt, dz***