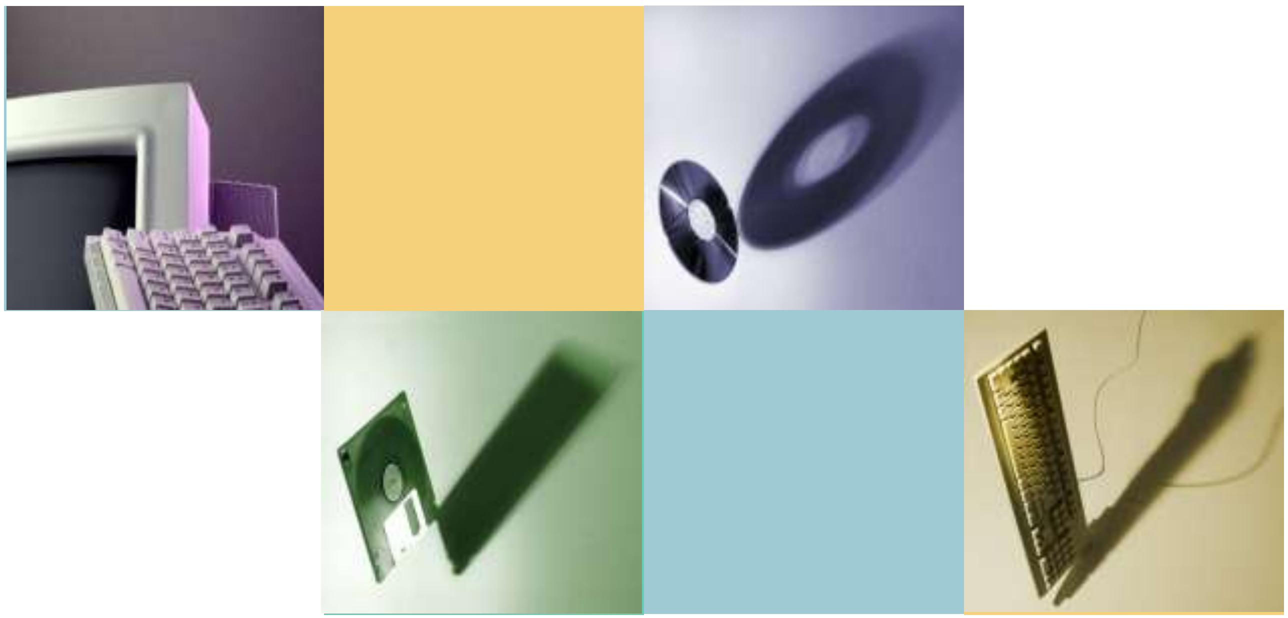
Unidad 4 – Lección 4.2



Integración por Sustitución

Actividades 5.2

- **Referencias**: Section 15.2: Método por Sustituión; Ejemplos del 1 al 8; problemas impares 1 – 63 de las páginas 634 y 635 (4ta Ed. Páginas 642 y 643)
- **Asignación 4.2:** Resuelva problemas 16, 26 y 30 de páginas 634 y 635.
- Referencias:
- Visual Calculus: Tutorial: Integration using Substitution Ejercicios: Integration by Substitution.
- Paul's Online Math Notes - Substitution Rule for the Indefinite Integrals ; More Substituion Rule; Substitution Rule for Definite Integrals.



Objetivo

Al finalizar esta lección podrá:

- Reconocer cuándo se debe usar el método de sustitución para integrar.
- Reconocer cuándo usar la Regla de la Potencia de la Integración para hallar la integral indefinida y definida.
- Usar la Regla de la Sustitución de la Integración.
- Usar la técnica de multipicar y dividir constantes en conjunto con la Regla de la Sustitución para hallar la integral indefinida y definida.

Regla de la sustitución

- Sea u una función diferenciable y F una función tal que F’(u) = f(u). Entonces,

$$\int f(u)u'(x)dx = F(u) + c$$

- Pasos a seguir:

1. Seleccione $\boldsymbol{u}$ y calcule el diferencial $\boldsymbol{du}$.
2. Exprese el integral en términos de $\boldsymbol{u}$.
3. Integre.
4. Exprese resultado en términos de variable original

Ejemplo 1

- Encuentre: $\int \left(x^2+1\right)^4 2x\,dx$
- Solución:

1. Seleccione $\boldsymbol{u}$ y calcule el diferencial $\boldsymbol{du}$:

$$u = x^2 + 1 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Longrightarrow du = 2x\,dx$$

2. Escriba el integral en términos de u:
3. Integre: $\int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c$
4. Exprese resultado en términos de variable original

$$\int \left(x^2+1\right)^4 2x\,dx = \frac{\left(x^2+1\right)^5}{5} + c$$

Ejemplo 2

- Encuentre: $\int x^2\left(2x^3-5\right)^3 dx \;=\int \left(2x^3-5\right)^3 x^2 dx$
- Solución:

$$u=2x^3-5 \qquad =\frac{1}{6}\int \left(2x^3-5\right)^3 6x^2 dx$$

$$du=6x^2dx \qquad =\frac{1}{6}\int u^3 du \;=\frac{1}{6}\cdot\frac{u^4}{4}+c$$

$$\Longrightarrow \quad \int x^2\left(2x^3-5\right)^3 dx=\frac{\left(2x^3-5\right)^4}{24}+c$$

Ejemplo 3

- Calcule: $\displaystyle\int \frac{x^2}{7-x^3}\,dx = \int \frac{1}{7-x^3}\,x^2 dx$
- Solución:

$$u = 7 - x^3$$

$$du = 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{7-x^3}\cdot 3x^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{1}{3}\ln|u| + c$$

$$= \frac{1}{3}\ln|7-x^3| + c$$

Ejercicio #1

- Calcule: $\int (x+2)(x^2+4x+2)^{10}\, dx$

$$= \int (x^2+4x+2)^{10}\,(x+2)dx$$

$$u = x^2+4x+2$$

$$= \frac{1}{2}\int (x^2+4x+2)^{10}\cdot 2(x+2)dx$$

$$du = (2x+4)dx$$

$$= 2(x+2)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int u^{10}\cdot du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{(x^2+4x+2)^{11}}{22} + c$$

Ejemplo 4

- Calcule: $\int x^2 e^{-4x^3}\,dx \quad = \int e^{-4x^3} \cdot x^2\,dx$
- Solución:

$$u = -4x^3$$

$$du = -12x^2\,dx$$

$$= \frac{-1}{12}\int e^{-4x^3} \cdot -12x^2\,dx$$

$$= \frac{-1}{12}\int e^u\,du$$

$$= \frac{-1}{12}e^u + c$$

$$= \frac{-e^{-4x^3}}{12} + c$$

Ejemplo 5

- Encuentre: $\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \quad = \int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}} x\,dx$
- Solución:

$$u = 1-4x^2 \qquad\qquad = \frac{-1}{8}\cdot\int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}}\cdot -8x\,dx$$

$$du = -8x\,dx \qquad\qquad = \frac{-1}{8}\int u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{-1}{8}\cdot\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \quad = \frac{-u^{\frac{1}{2}}}{4} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{-\sqrt{1-4x^2}}{4} + c$$

Ejercicio #2

- Calcule: $\int \sqrt{3x-5}\,dx$ $= \int (3x-5)^{\frac{1}{2}}\,dx$
- Solución:

$$= \frac{1}{3}\int (3x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 3dx$$

$$u = 3x-1$$

$$du = 3dx$$

$$= \frac{1}{3}\int u^{\frac{1}{2}}du$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c$$

$$= \frac{1}{3}\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2\sqrt{u^3}}{9} + c = \frac{2u\sqrt{u}}{9} + c \quad = \frac{2(3x-1)\sqrt{3x-1}}{9} + c$$



Ejemplo 6

- Compare:

$$\int \frac{3}{5y+4}dy$$

$$u = 5y+4$$

$$du = 5dy$$

$$\frac{3}{5}\int \frac{1}{5y+4}5dy$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{3}{5}\ln\left|5y+4\right| + c$$

$$\int \frac{3y}{5y^2+4}dy$$

$$u = 5y^2+4$$

$$du = 10ydy$$

$$\frac{3}{10}\int \frac{1}{5y^2+4}10ydy$$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{3}{10}\ln\left|5y^2+4\right| + c$$

$$\int \frac{3y}{\left(5y^2+4\right)^2}dy$$

$$u = 5y^2+4$$

$$du = 10ydy$$

$$\frac{3}{10}\int \frac{1}{(5y^2+4)^2}10ydy$$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{1}{u^2}du$$

$$= \frac{-3}{10\left(5y^2+4\right)} + c$$

Tablas de Integración

- Si a es distinto de 0:

$$\int (ax+b)^n \, dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} \cdot \ln |ax+b| + c$$

- Ejemplos:

$$\int (2x+5)^3 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+5)^4}{4} + c = \frac{(2x+5)^4}{8} + c$$

$$\int \frac{1}{3x+5} \, dx = \frac{1}{3} \cdot \ln |3x+5| + c = \frac{\ln |3x+5|}{3} + c$$