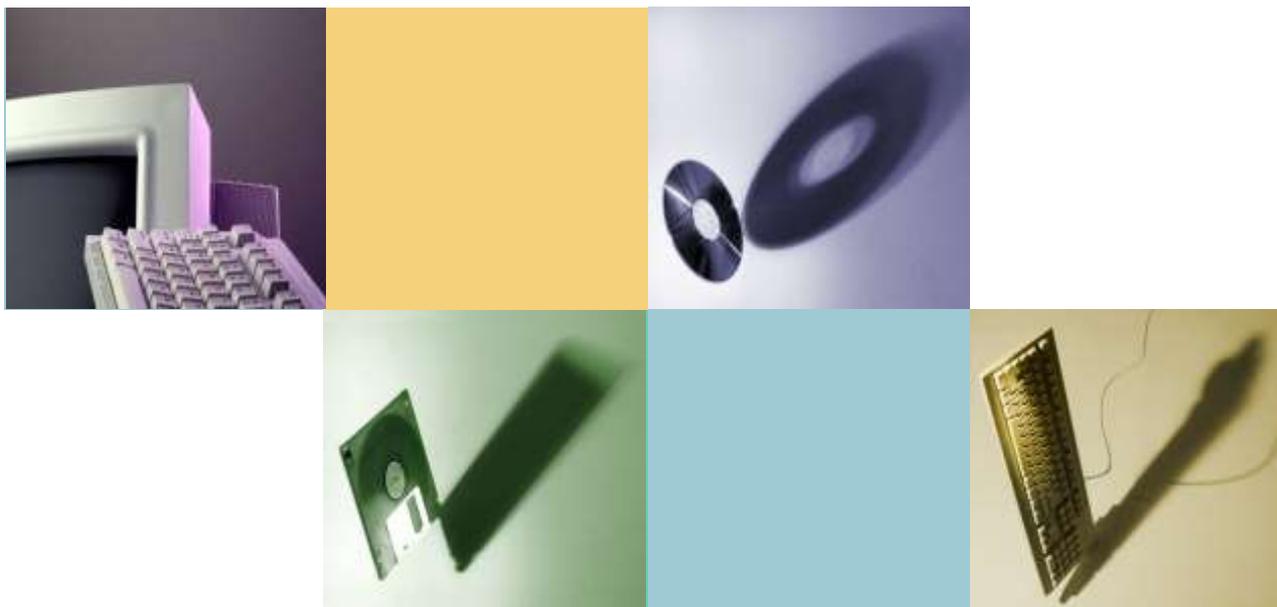
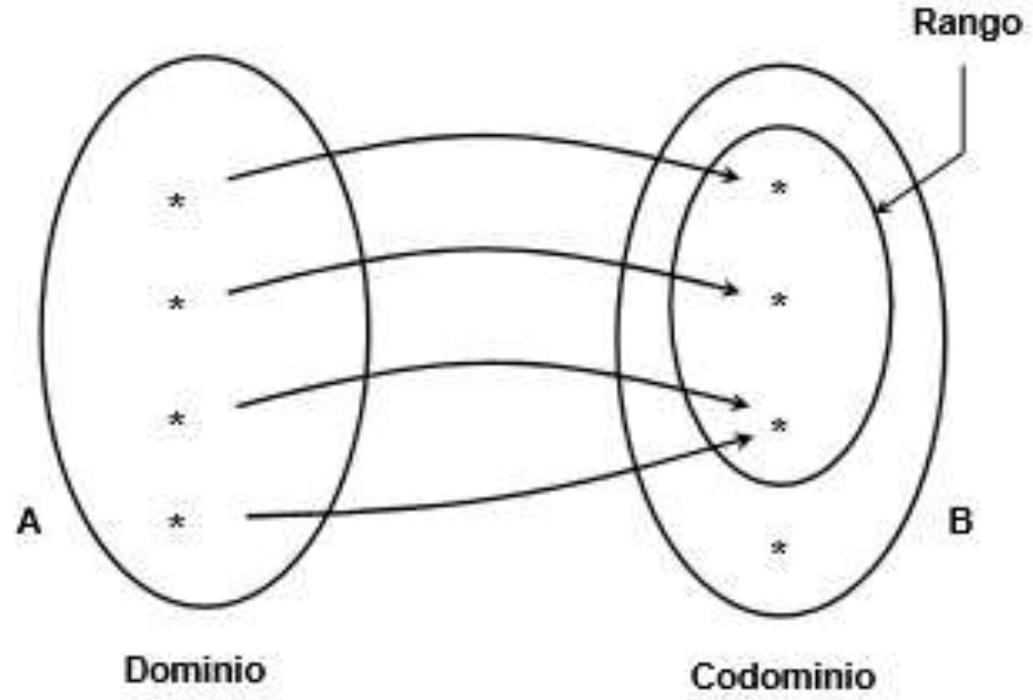
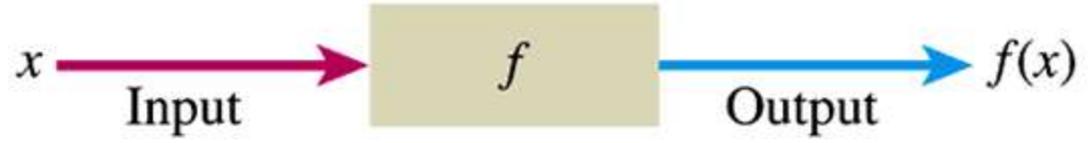


Repaso de Funciones



MATE 3031 – Cálculo 1



FUNCIONES



¿Cómo se representa una función?

- Sea $x=\{1,2,3\}$, $y = \{1, 4\}$

1. Tabla de valores

$1 \rightarrow 1$

$2 \rightarrow 4$

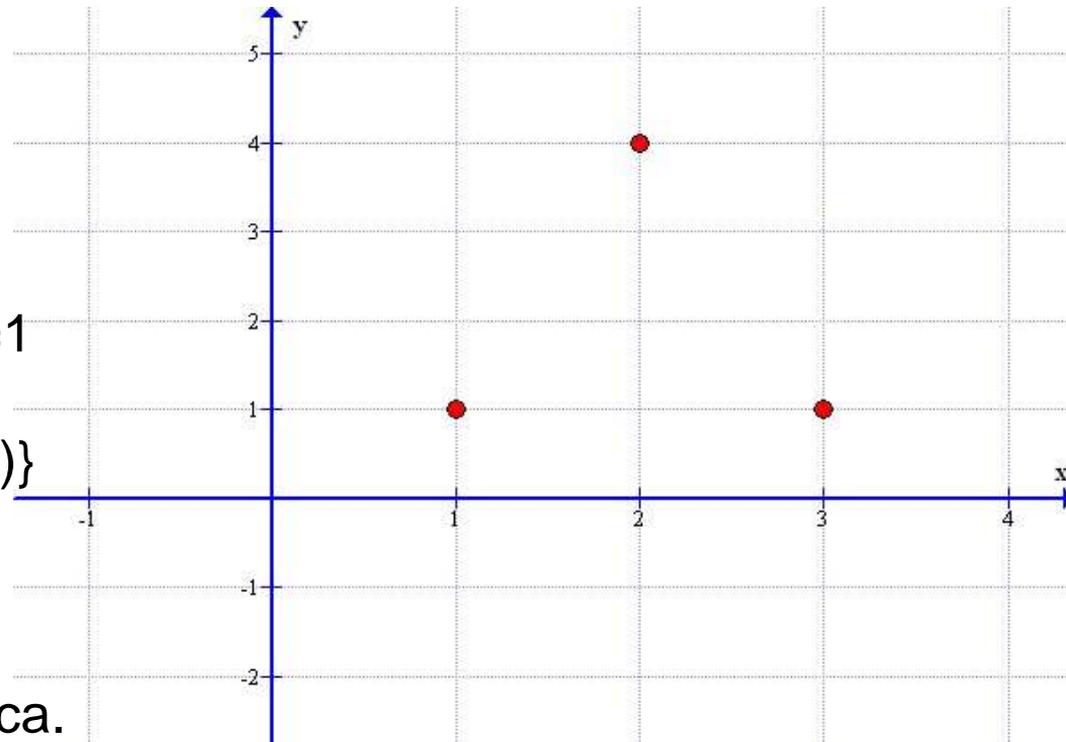
$3 \rightarrow 1$

2. $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=1$

3. $f = \{(1,1), (2,4), (3,1)\}$

4. Gráfica

5. Expresión algebraica.



Evaluando funciones

Para la función $f(x) = 2x^2 + 5$

a) $f(3) = 2(3)^2 + 5 = 23$

b) $f(1 + \sqrt{2}) = 2(1 + \sqrt{2})^2 + 5$
 $= 2(1 + \sqrt{2})(1 + \sqrt{2}) + 5$
 $= 2(3 + 2\sqrt{2}) + 5 = 11 + 4\sqrt{2} \approx 16.66$

TI30XS *Multiview*:

$$2[(1+)] [2nd] [x^2] [(1+)] [x^2] [+] 5$$



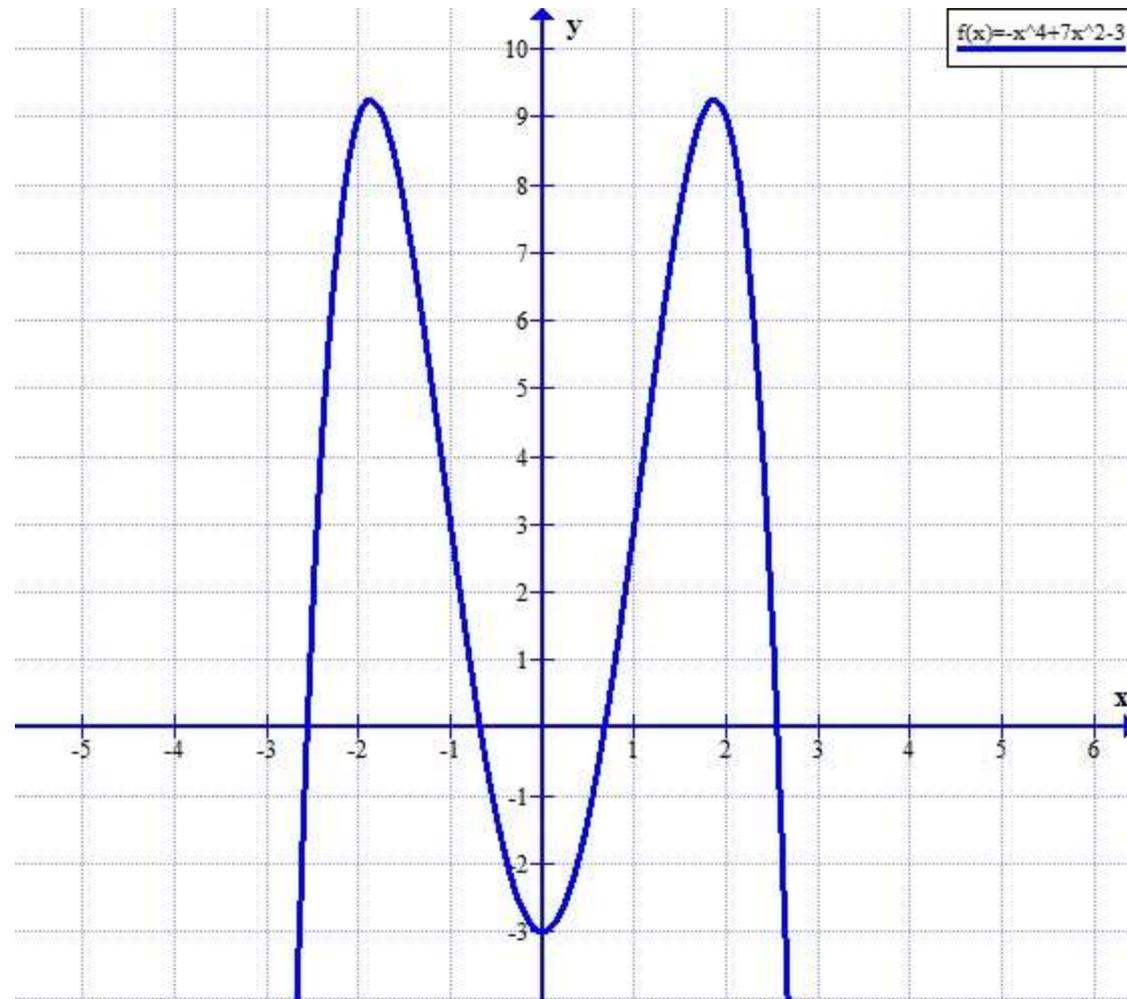
Gráfica de una función

- Trace la gráfica de la función $f(x) = -x^4 + 7x^2 - 3$

Solución:

Se asume como el conjunto mayor de números reales que pueda sustituir la variable (Dominio).

Para graficar use programas computadorizados (*graficadores*)



Graficador: GRAPH

- Permite del menú Function:
 - Graficar funciones (Insert Function)
 - Conjunto de puntos (Insert point series)
 - Aproximar un conjunto de puntos por una gráfica (Insert trendline)
 - Relaciones (Insert relation)



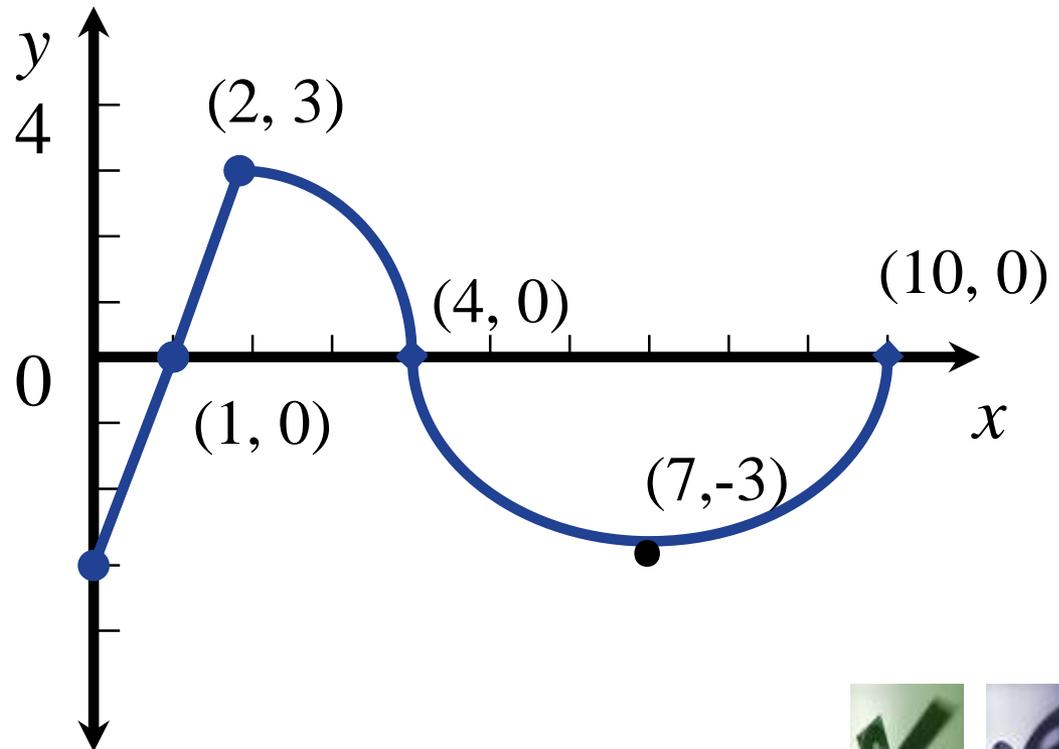
Bajar de: <http://www.padowan.dk/graph/>



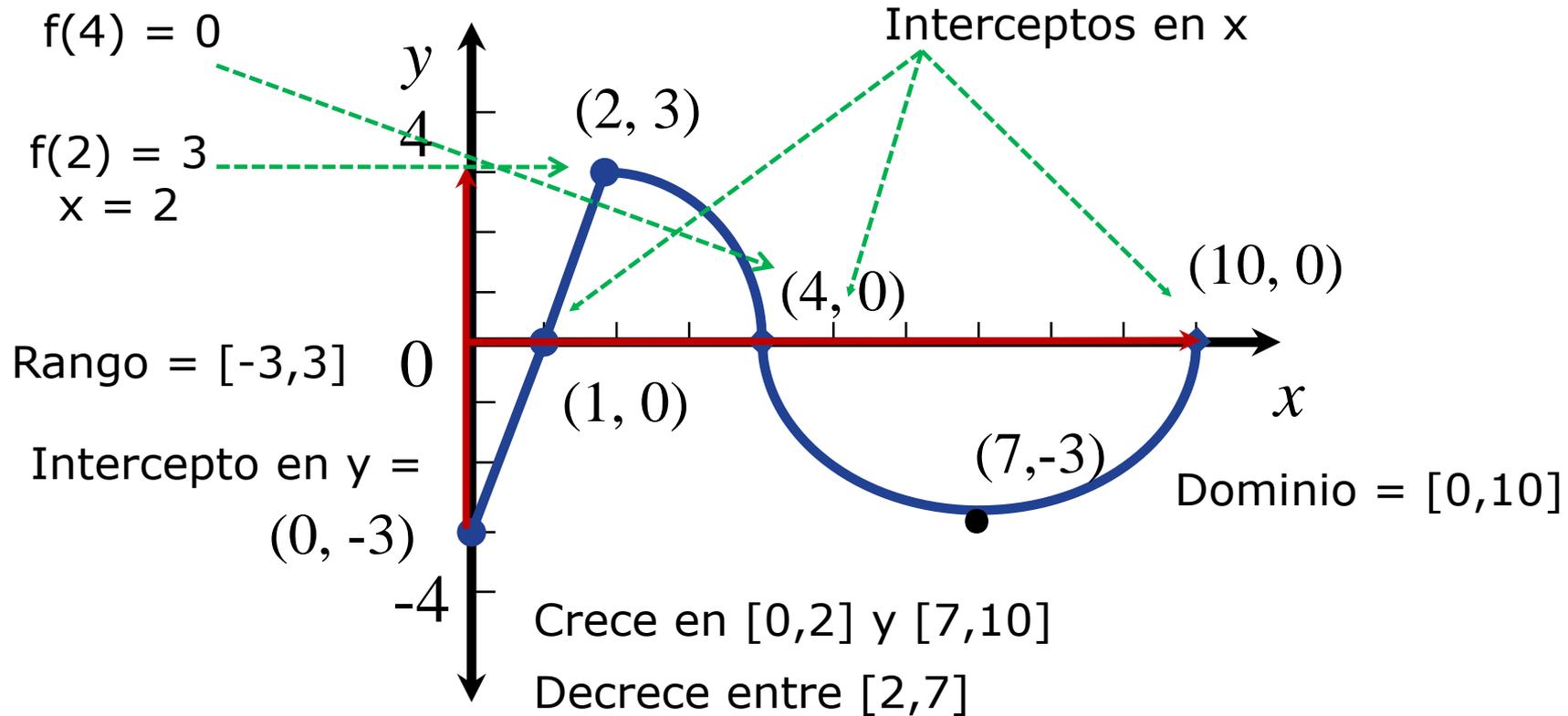
Interpretación de la gráfica

De la gráfica de la función f siguiente, determine

- $f(4)$.
- El valor de x , si que $f(x) = 3$
- El dominio, recorrido e interceptos.
- Dónde crece y decrece
- El valor máximo y mínimo de la función.



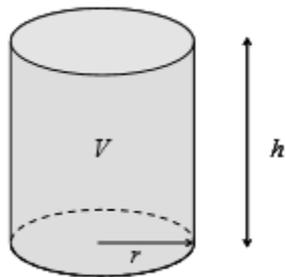
Interpretación de la gráfica



El valor máximo de la función es 3.

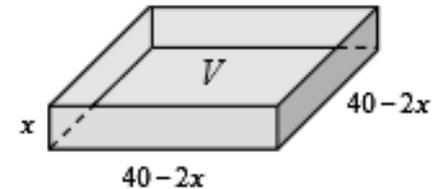
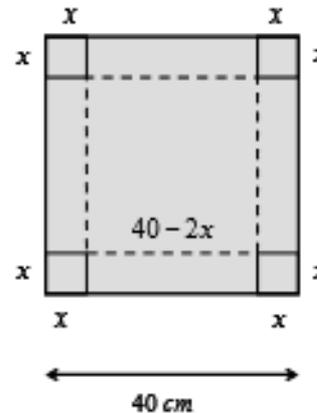
El valor mínimo de la función es -3.





$$V(r) = \pi r^2 h$$

Volumen de un cilindro vertical



$$A(x) = 4x^3 - 160x^2 - 1600x$$

Cantidad de material (área de superficie) de una caja que se forma de una cartulina cuadrada de 40 cm.

MODELADO A TRAVÉS DE FUNCIONES



Ejemplo

Un rectángulo tiene un perímetro de 100 cm. Expresa el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

- Solución:
- Sea a , b las medidas de los lados del rectángulo. A su área. Entonces

$$A = ab$$

- Si el perímetro es 20, entonces

$$2a + 2b = 100$$

$$2a = 100 - 2b$$

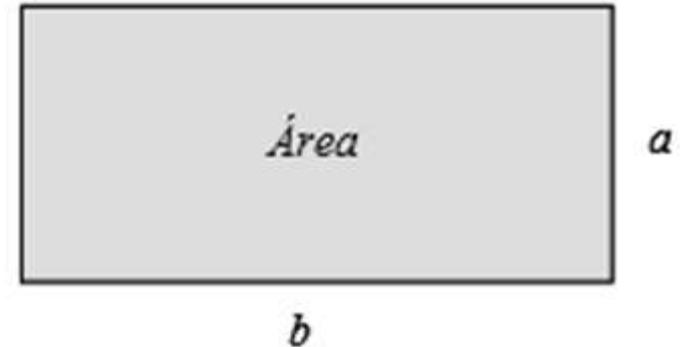
$$a = 50 - b$$

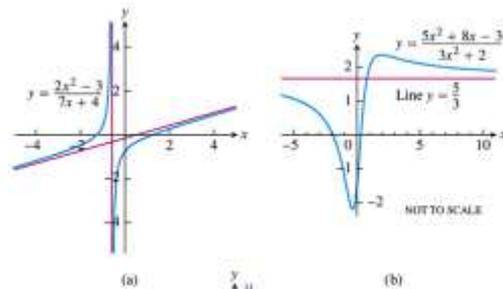
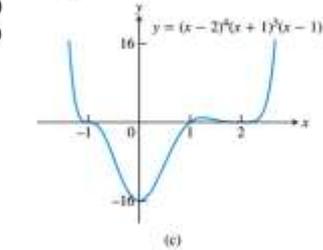
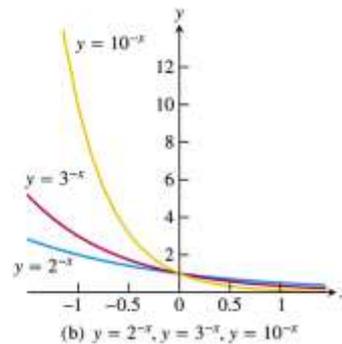
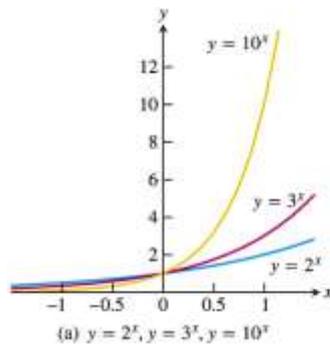
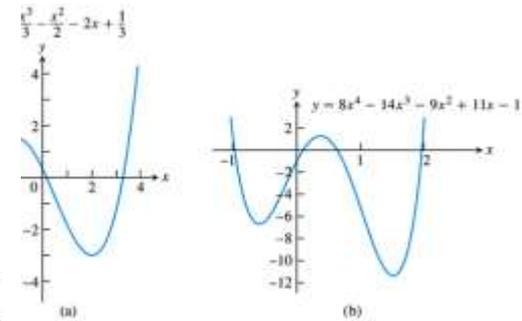
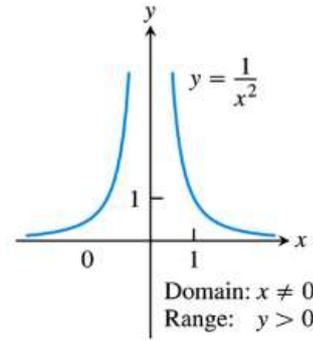
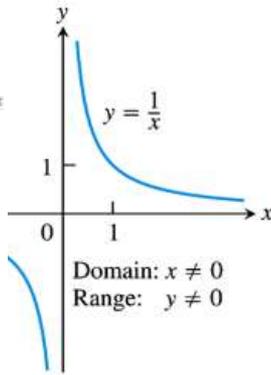
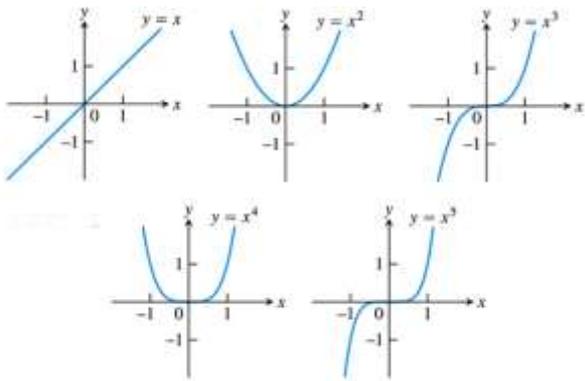
- Por tanto,

$$A = b(50 - b)$$

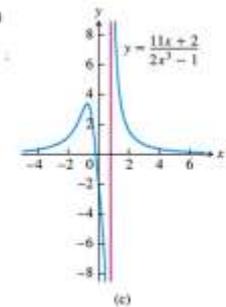
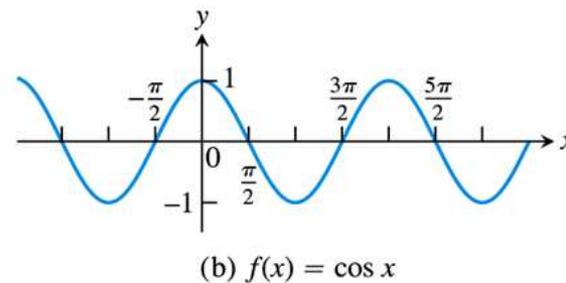
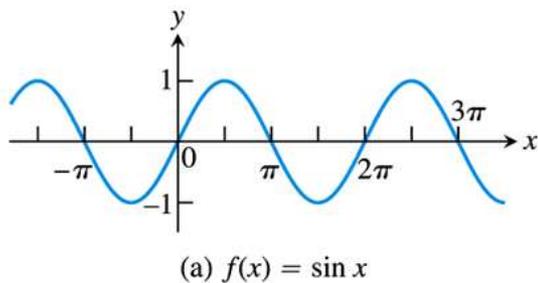
$$A(x) = x(50 - x)$$

Perímetro = 100 cm





TIPOS DE FUNCIONES

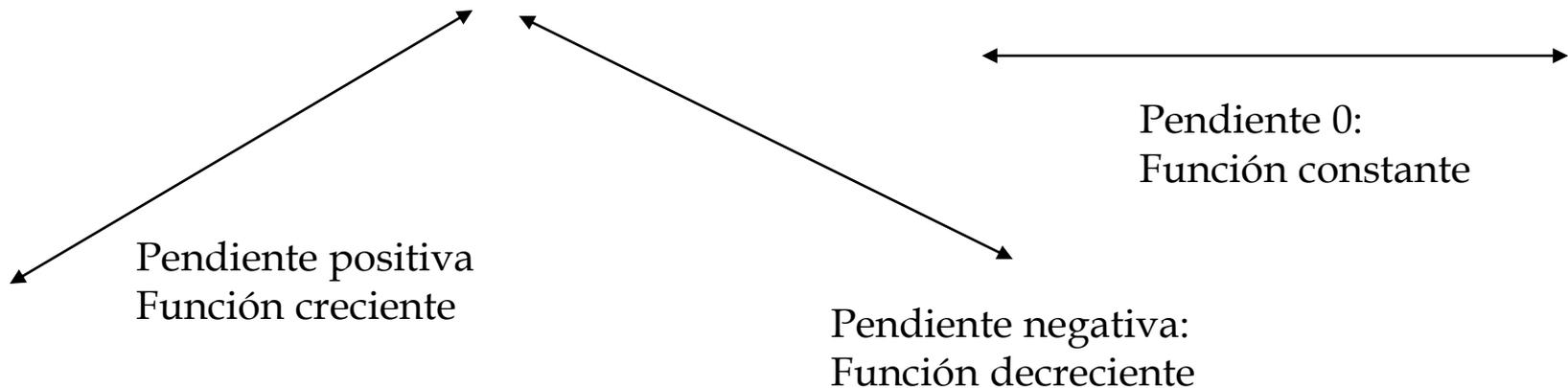


La Función Lineal

- La función lineal es la función de la forma:

$$f(x) = mx + b$$

- La gráfica de una función lineal es la recta con pendiente m , intercepto en y en $(0,b)$.
- Tres tipos de funciones lineales:



Pendiente (Slope)

- Sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en una recta su **pendiente (m)** está definida como:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \neq x_2$$

- Las rectas verticales no tienen pendiente.
- Las rectas horizontales tienen pendiente 0.
- Ejemplo: Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(4,5)$:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(5) - (3)}{(4) - (1)} = \frac{2}{3}$$



Forma de la ecuación de la recta

- Si m es la pendiente de una recta que pasa por el punto (x_1, y_1) . Entonces, su ecuación se puede expresar como:

(pendiente-punto)

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Ejemplo: Si una recta tiene pendiente -3 y pasa por el punto $(-1, 2)$ entonces su ecuación es:

$$y - 2 = (-3)(x - (-1))$$

$$y - 2 = -3(x + 1)$$

$$y - 2 = -3x - 3$$

$$y = -3x - 1$$

pendiente-intercepto ya que su intercepto en y será $(0,-1)$.



Ejemplo 1

- Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-1,-2) (3,2)
- Solución:

- Determine pendiente:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-2)}{3 - (-1)} = \frac{4}{4} = 1$$

- Sustituya la pendiente $m = 1$ y cualquiera de los puntos en la ecuación **de la forma pendiente punto**.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (-2) = (1)(x - (-1))$$

$$y + 2 = x + 1$$

$$y = x + 1 - 2$$

$$y = x - 1$$

$$y - 2 = (1)(x - 3)$$

$$y - 2 = x - 3$$

$$y = x - 3 + 2$$

$$y = x - 1$$



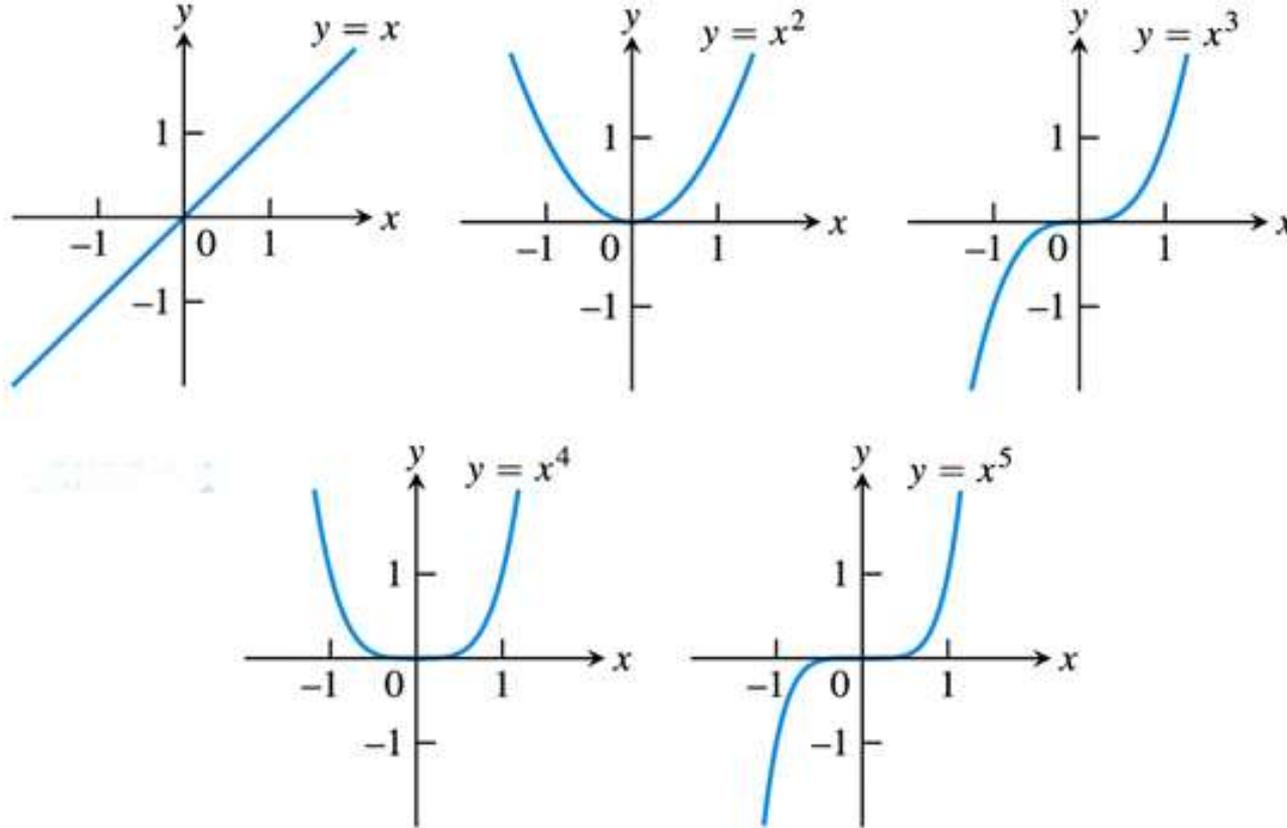
Interpretación de la pendiente como razón de cambio

- En una relación lineal $y = mx + b$, la pendiente m representa:
 - Que y **cambiará** m unidades **por cada unidad** de x .
 - **la razón de cambio promedio** de y con respecto al cambio en x .
- Ejemplos:
 - Si y es la población de una especie en una región cada x meses. Entonces, la pendiente indica el número de especies que aumentará o disminuirá por cada mes adicional que pase.
 - Si y es el costo de producir x artículos. Entonces, la pendiente indica cuánto cambiará el costo por producir un artículo adicional.



Funciones potencias $f(x) = x^n$

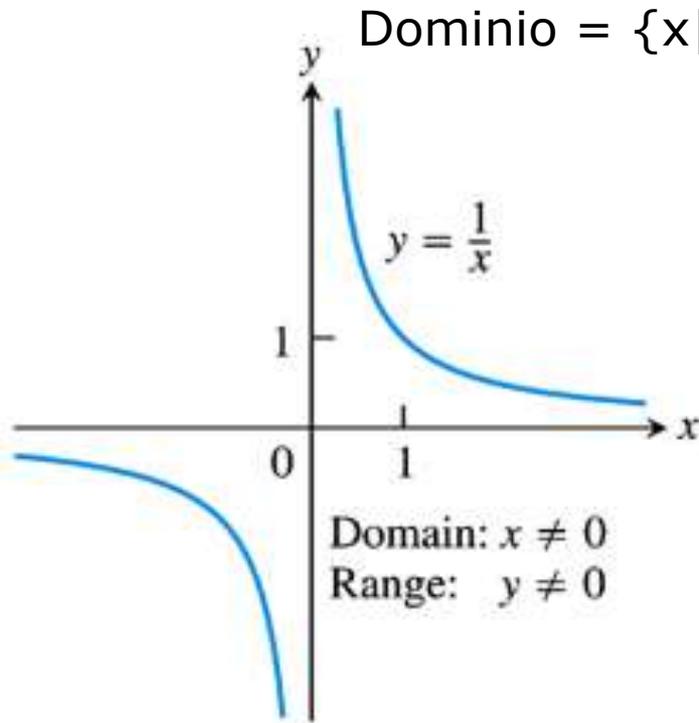
Gráficas de $f(x) = x^n$, $n = 1, 2, 3, \dots$



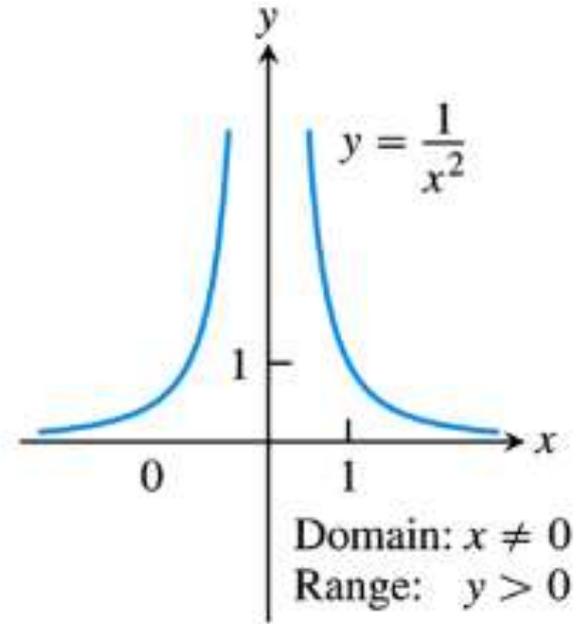
Dominio = $(-\infty, \infty)$



Funciones potencias $f(x) = x^{-n}$



Gráficas de $f(x) = x^{-n}$
 $n = 1, 3, \dots$ impar
tienen un parecido.



Gráficas de $f(x) = x^n$ $n = 2, 4, \dots$ par tienen un parecido.



Funciones Polinómicas

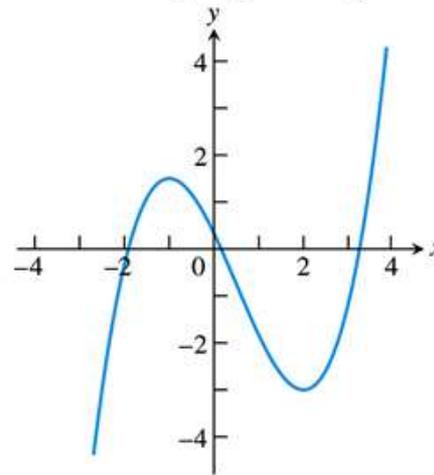
Funciones de la forma:

$$f(x) = P(x)$$

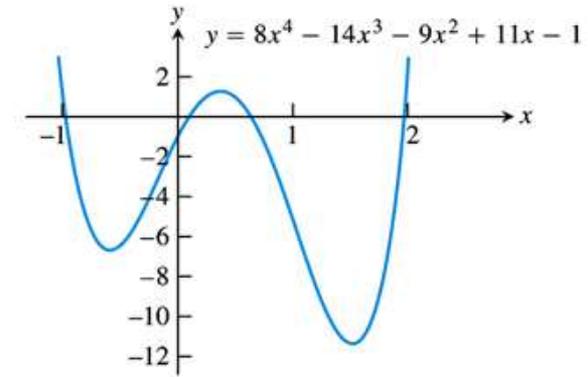
Donde $P(x)$ es un polinomio.

Los extremos de las gráficas de las funciones polinómicas se parecen de acuerdo a la paridad de su grado y el signo del coeficiente que determina su grado.

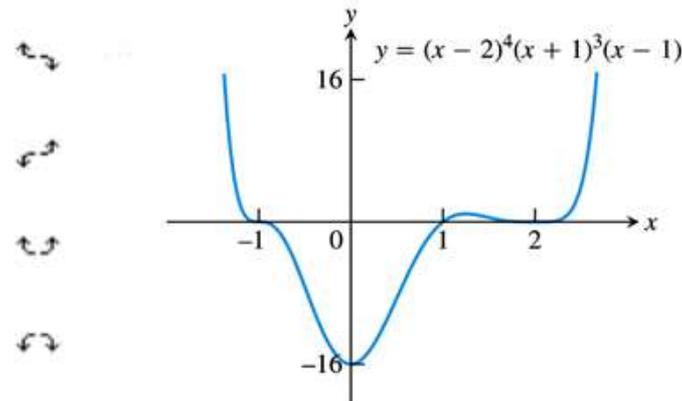
$$y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{1}{3}$$



(a)



(b)



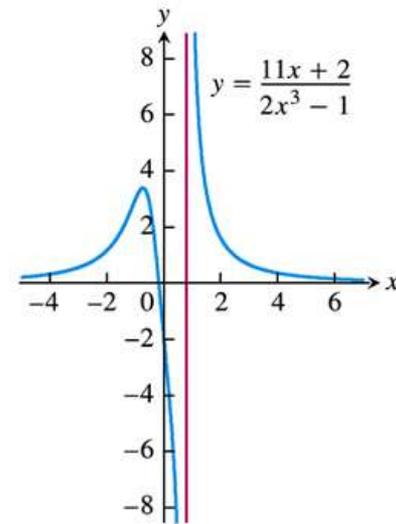
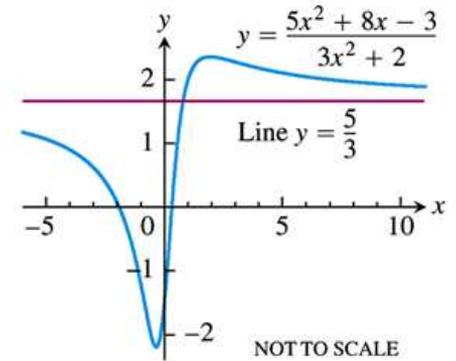
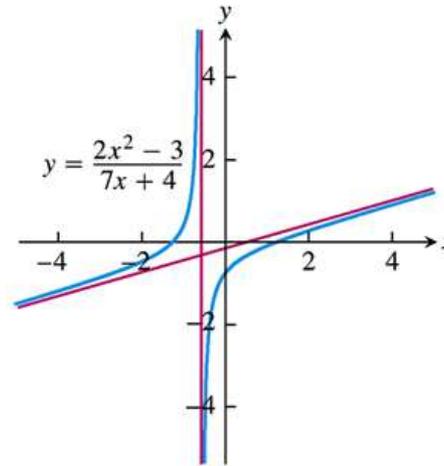
(c)



Funciones Racionales

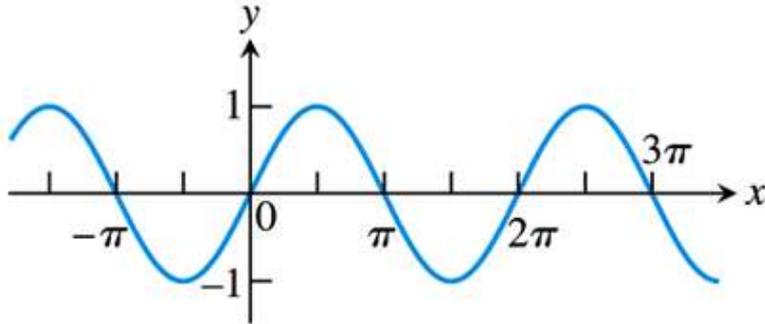
Funciones compuesta del cociente de dos polinomios. Esto es, de la forma:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

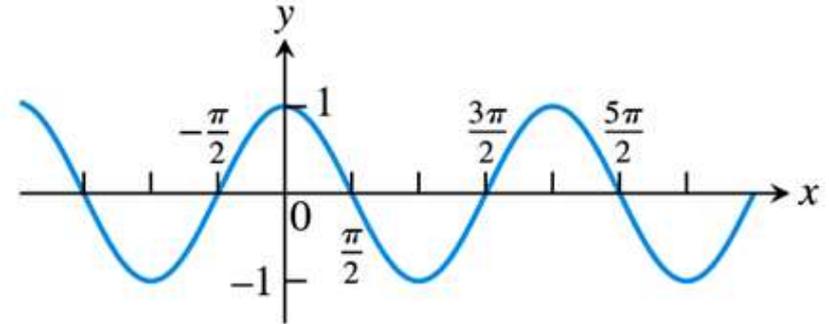


Funciones Trigonométricas

Funciones compuesta del valor trigonométrico de un ángulo.



(a) $f(x) = \sin x$



(b) $f(x) = \cos x$

La convención es que la medida del ángulo siempre está en radianes, al menos que se indique lo contrario.

Aproxime a cinco lugares decimales:

$$\sin 5.3 = -0.83227$$

$$\tan \frac{\pi}{5} = 0.72654$$

$$\sec \frac{\pi}{5} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} = 1.23607$$



Valores e identidades trigonométricas

Sea t un número real y $P = (a, b)$ un punto en el círculo unitario asociado a t . Entonces:

$$\text{(coseno)} \quad \cos t = a$$

$$\text{(seno)} \quad \sin t = b$$

$$\text{(tangente)} \quad \tan t = \frac{b}{a}$$

Valores especiales:

$$\frac{\pi}{2} \leftrightarrow (0,1) \quad \frac{3\pi}{2} \leftrightarrow (0,-1) \quad \frac{\pi}{6} \leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \frac{\pi}{4} \leftrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\pi \leftrightarrow (-1,0) \quad 2\pi \leftrightarrow (1,0) \quad \frac{\pi}{3} \leftrightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Identidades del cociente $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

Identidades recíprocas $\csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} \quad \sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$

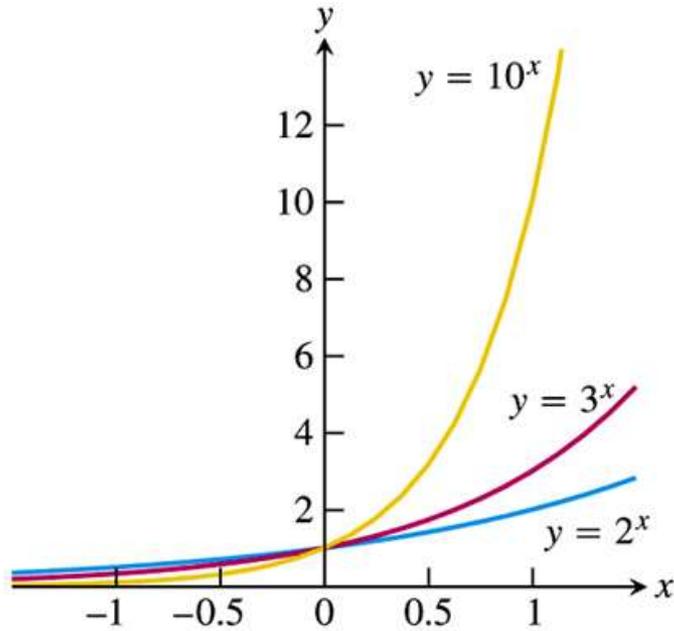
Identidades Pitagóricas $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$

$$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

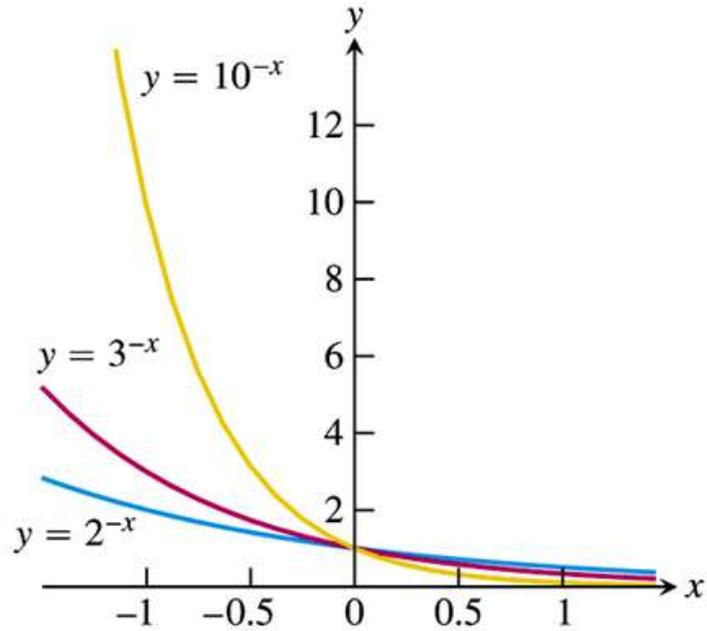


Funciones Exponenciales:

$$f(x) = a^x$$



(a) $y = 2^x, y = 3^x, y = 10^x$



(b) $y = 2^{-x}, y = 3^{-x}, y = 10^{-x}$

Si $f(x) = 3^x$

$$f(-5.8) = 3^{-5.8} \approx 0.001708822$$

$$f(4) = 3^4 = 81$$

$$f(1.25) = 3^{1.25} \approx 3.948222039$$

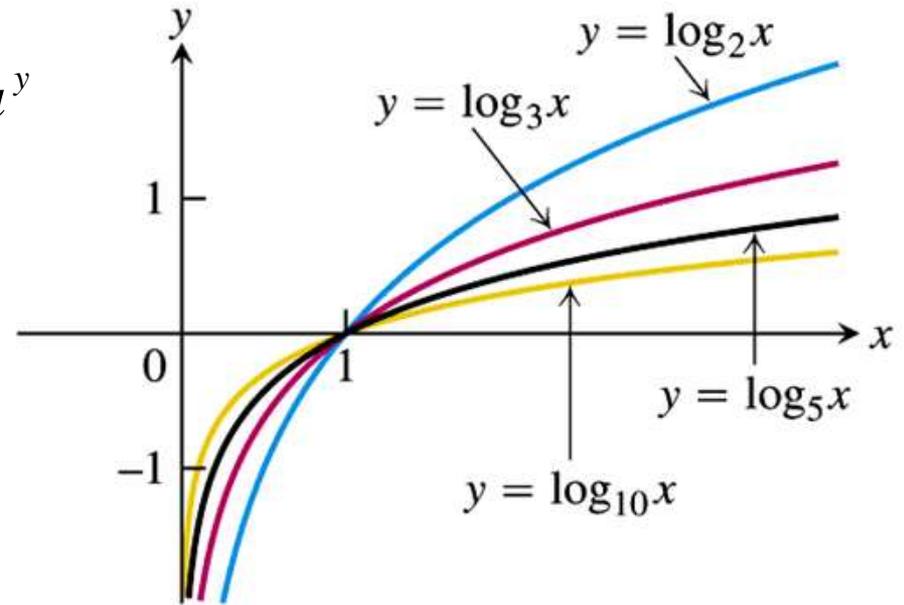


Funciones Logarítmicas:

$$f(x) = \log_a x$$

$$y = \log_a x \quad \text{si y sólo si} \quad x = a^y$$

En GRAPH entre **log(x)** para la función con base 10 y use el formato **logb(x, a)** para la función con base a y entre **ln(x)** para la función con base e



Si $f(x) = \log x$

$$f(100) = \log 100 = 2$$

$$f(5) = \log 5 \approx 0.698970004$$

Si $f(x) = \ln x$

$$f(1) = \ln 1 = 0$$

$$f(5) = \ln 5 \approx 1.609437912$$

Si $f(x) = \log_3 x$

$$f(3) = \log_3 81 = 4$$

$$f(5) = \log_3 5$$

$$= \frac{\log 5}{\log 3} \approx 1.464973521$$



Funciones por partes

- Si $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 2 \\ -2x+9 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ determine $f(-1)$, $f(2)$, $f(4)$ y sus interceptos, si los tiene.

- Solución:

$$f(-1) = (-1) + 1 = 0$$

$$f(2) = (2) + 1 = 3$$

$$f(3) = -2(4) + 9 = 1$$

Si $x = 0$, entonces $f(0) = (0) + 1 = 1$

Intercepto en y es (0,1)

Si $f(x) = 0$, entonces

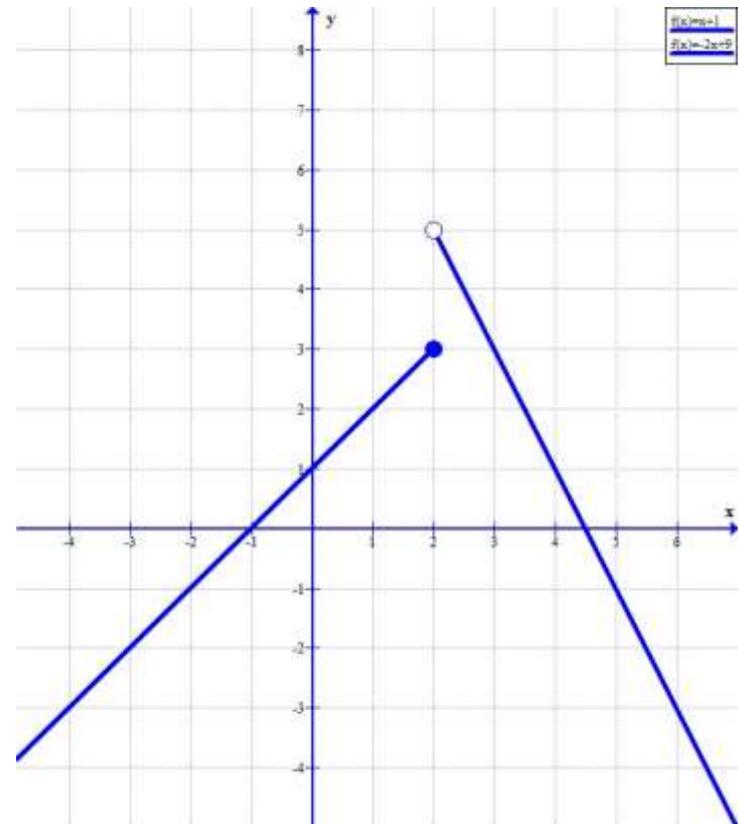
$$0 = x + 1$$

$$x = -1$$

$$0 = -2x + 9$$

$$x = 4.5$$

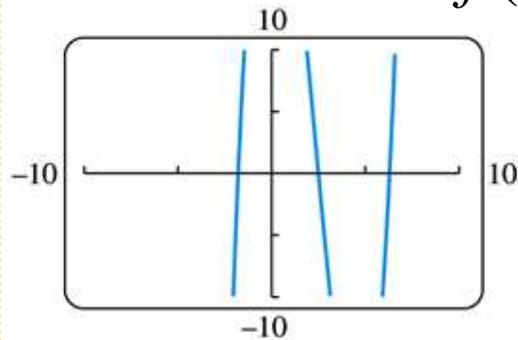
Interceptos en x son (-1, 0) , (4.5, 0)



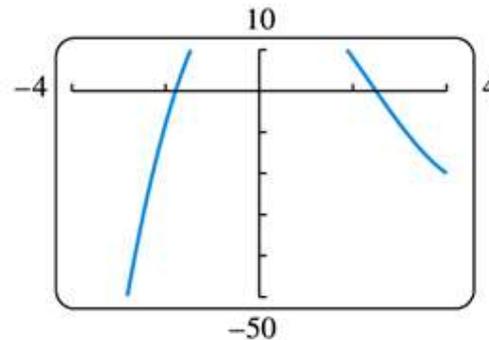
Uso de graficadores

- Ajuste escala de los ejes:

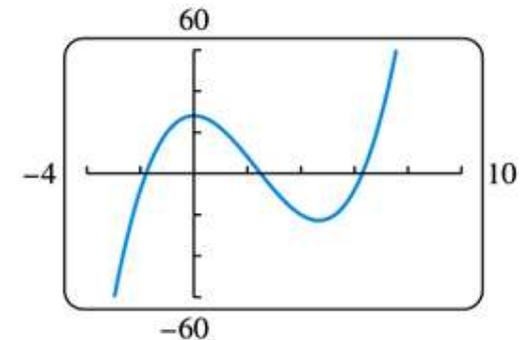
$$f(x) = x^3 - 7x^2 + 28$$



(a)

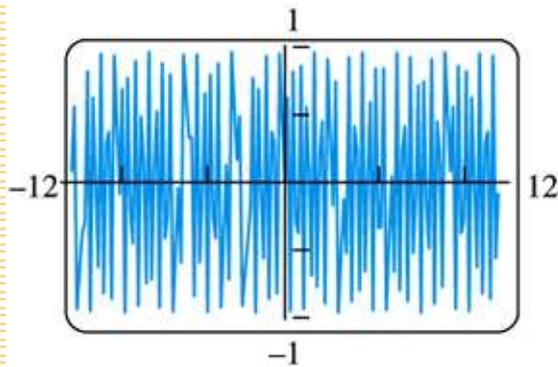


(b)

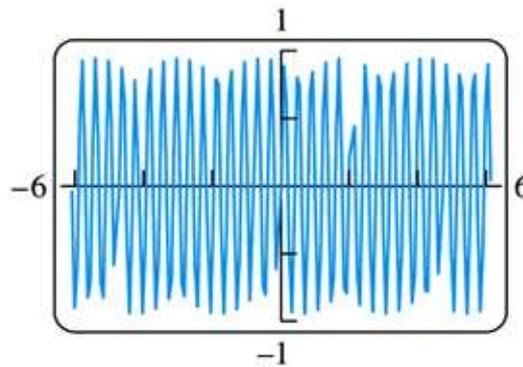


(c)

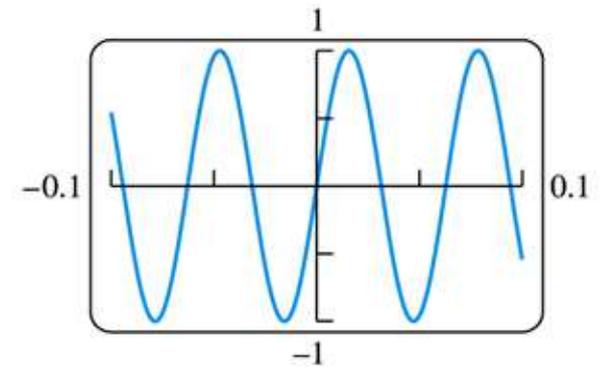
$$f(x) = \sin 100x$$



(a)



(b)



(c)