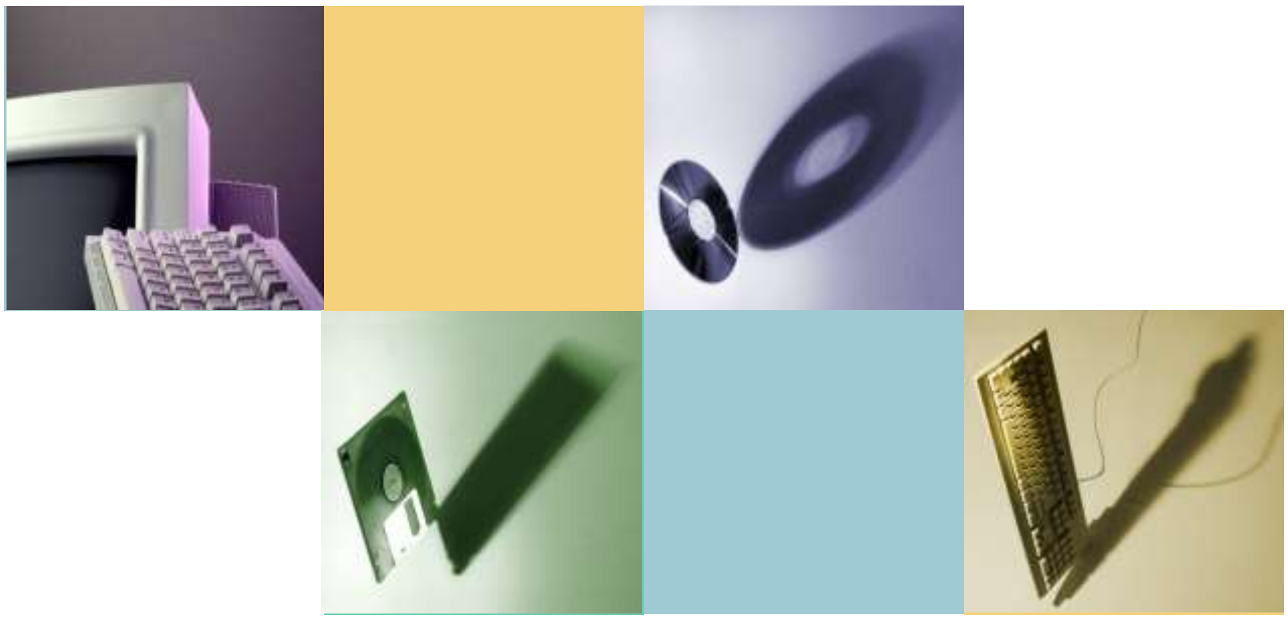
Introducción a Límites



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 1.2

- **Referencia del Texto**:
  - Referencia: Capítulo 1. Sección 1.2 Ejercicios de Práctica: Problemas impares: 1 – 9; 15-29, 51 y 53
- **Referencias del Web**:
  - Michael Kelleys Tutorials For de Calculus Phobe – What is a limit , When Does a Limit Exists (Tutoriales animados, muy bueno)
  - J G Rodríguez Ahumada - Introducción a Límites
  - Khan Academy –
    - Introducción a los Límites
    - Estimación de Límites mediante gráficas
  - Paul Online Notes – Calculus - The Limit
  - Visual Calculus - Introduction to Limits

¿Qué es un límite?

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

*El límite de f mientras que x toma valores **menores** o "por la **izquierda**" existe y es L*

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

*El límite de f mientras que x toma valores **mayores** o "por la **derecha**" existe y es L*

Ejemplo 1

$$H(x) = \begin{cases} 2x + 2 & para\ x < 1 \\ 2x - 4 & para\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$¿El \quad \lim_{x \to 1} H(x) \quad existe?$$

Ejemplo 1 …

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 2x+2 & para\ x < 1 \\ 2x-4 & para\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) = ¿\, existe?$$

$x \to 1^-$	0	0.5	0.8	0.9	0.99	0.999
$H(x)$	2	3	3.6	3.8	3.98	3.998

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) \approx 4$$

Ejemplo 1 …

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 2x + 2 & para\ x < 1 \\ 2x - 4 & para\ x \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) = ¿\,existe?$$

$x \to 1^+$	2	1.8	1.1	1.01	1.001	1.0001
$H(x)$	0	–0.4	–1.8	–1.98	–1.998	–1.9998

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) \approx -2$$

Ejemplo 1 ...

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 2x + 2 & para\, x < 1 \\ 2x - 4 & para\, x \geq 1 \end{cases}$$

- Como

$$\lim_{x \to 1^-} H(x) \approx 4$$

$$\lim_{x \to 1^+} H(x) \approx -2$$

- El

$$\lim_{x \to 1} H(x) \;\; no\ existe$$

Ejemplo 2

- Elabore una tabla de valores para determinar si el límite existe. En el evento que si, aproxímelo.

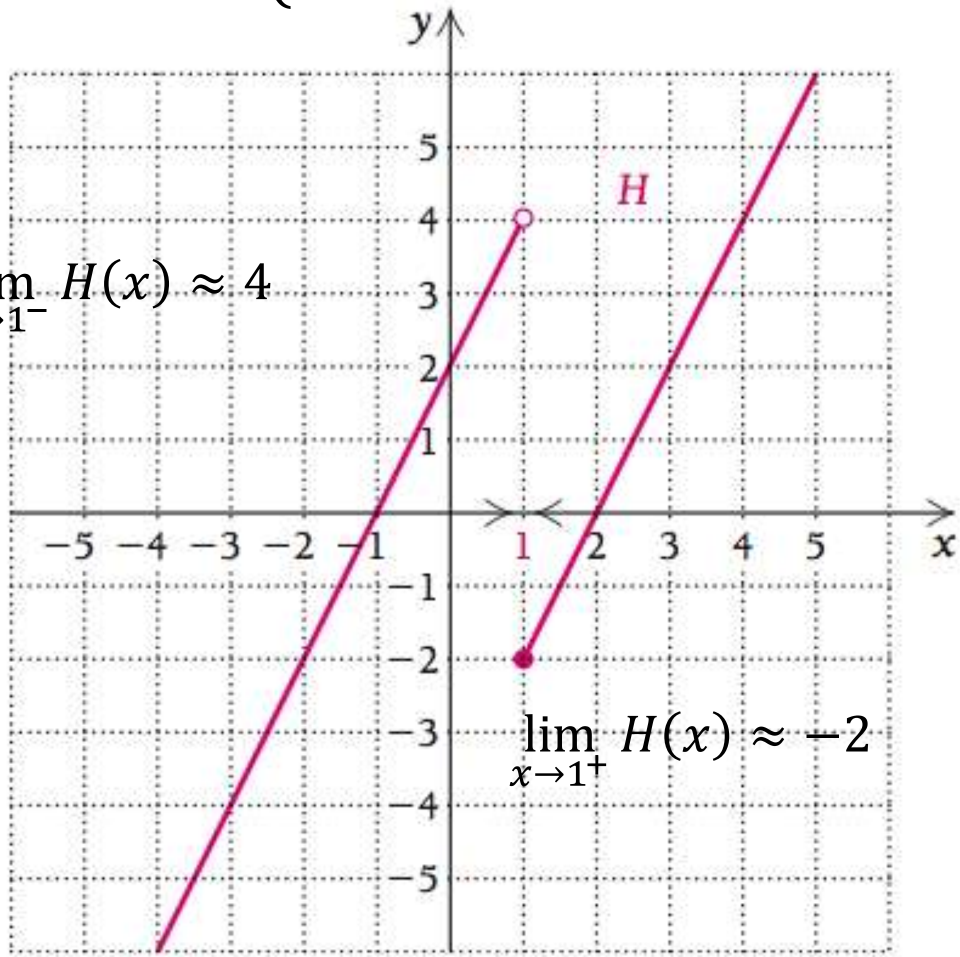
$$\lim_{x \to -3} \frac{x+3}{x^2+7x+12}$$

- Solución:
- Se ilustrará como usar *MS Excel* para generar tabla de valores.
- Observe:
  - El límite mientras x se acerca a -3 existe
  - El límite mientras x se acerca a -3 es aproximadamente 1
  - La función no está definida en -3

Ejemplo 3 (Uso de gráficas)

$$\mathrm{H}(x) = \begin{cases} 2x+2 & para\ x < 1 \\ 2x-4 & para\ x \geq 1 \end{cases}$$

$¿El \lim_{x\to 1} H(x)\ \ existe?$



$\lim_{x\to 1^-} H(x) \approx 4$

$\lim_{x\to 1^+} H(x) \approx -2$

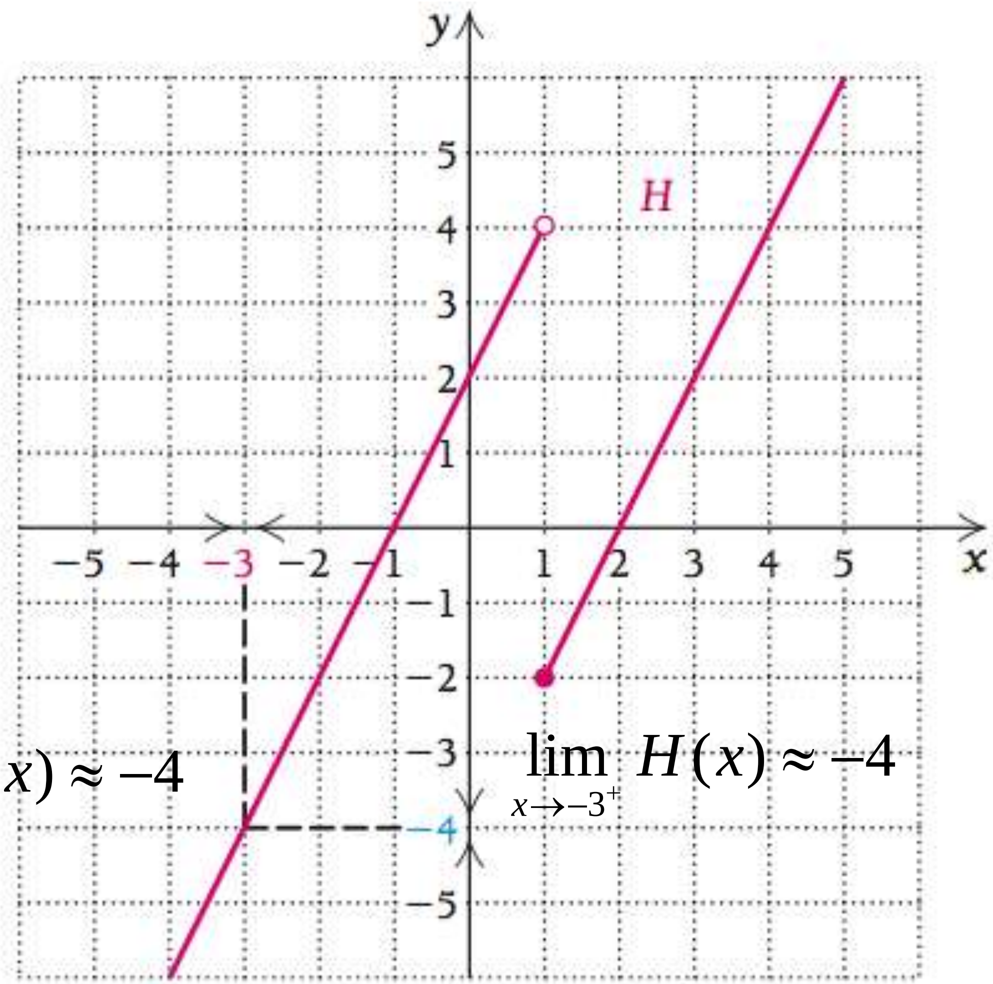
$El \lim_{x\to 1} H(x)\ no\ existe$

Cálculo 1 - MATE 3031

Ejemplo 4

$$H(x) = \begin{cases} 2x + 2 & para\ x < 1 \\ 2x - 4 & para\ x \geq 1 \end{cases}$$

$¿El \lim_{x \to -3} H(x)\ existe?$

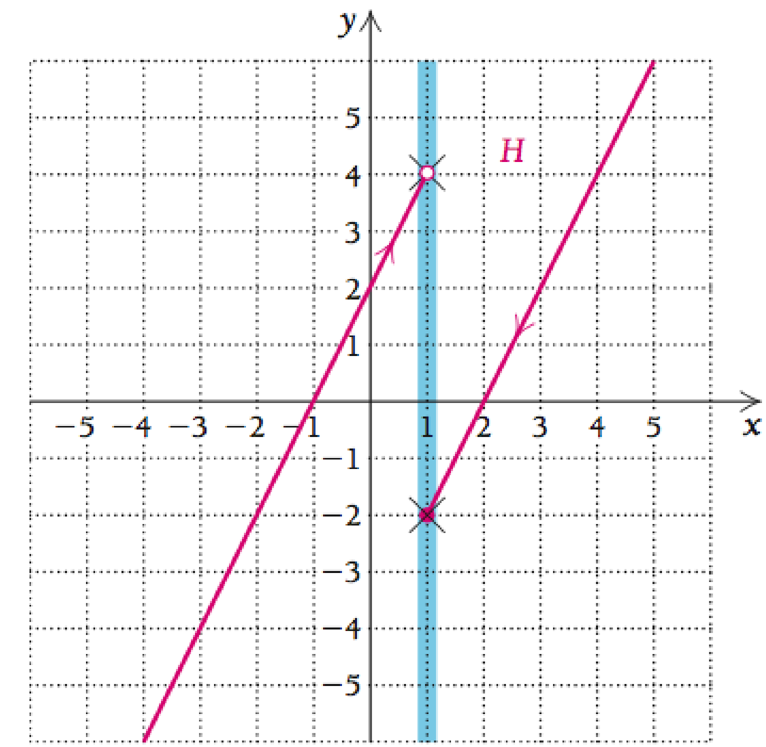


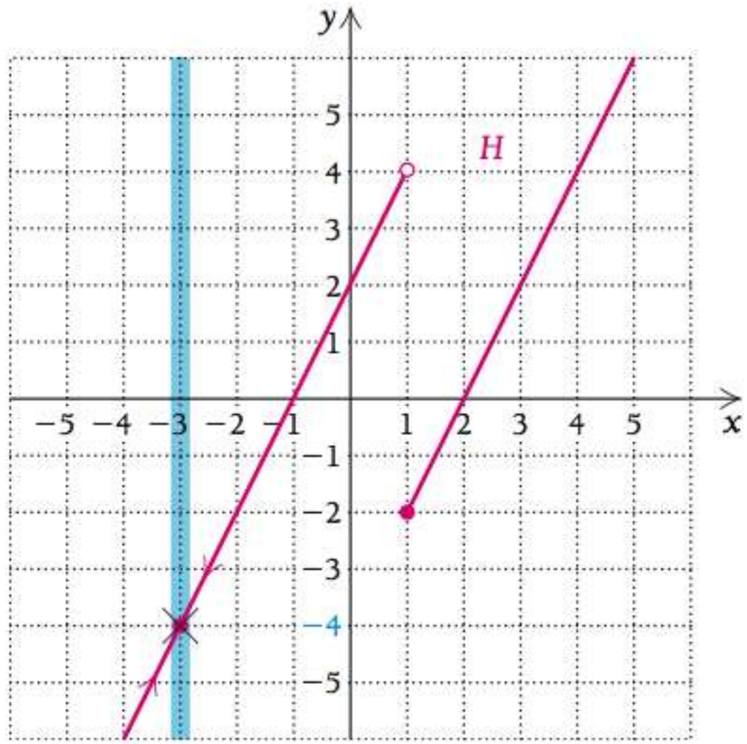
$$\lim_{x \to -3^-} H(x) \approx -4$$

$$\lim_{x \to -3^+} H(x) \approx -4$$

$$\lim_{x \to -3} H(x) \approx -4$$

Método gráfico para determinar si existe Límite



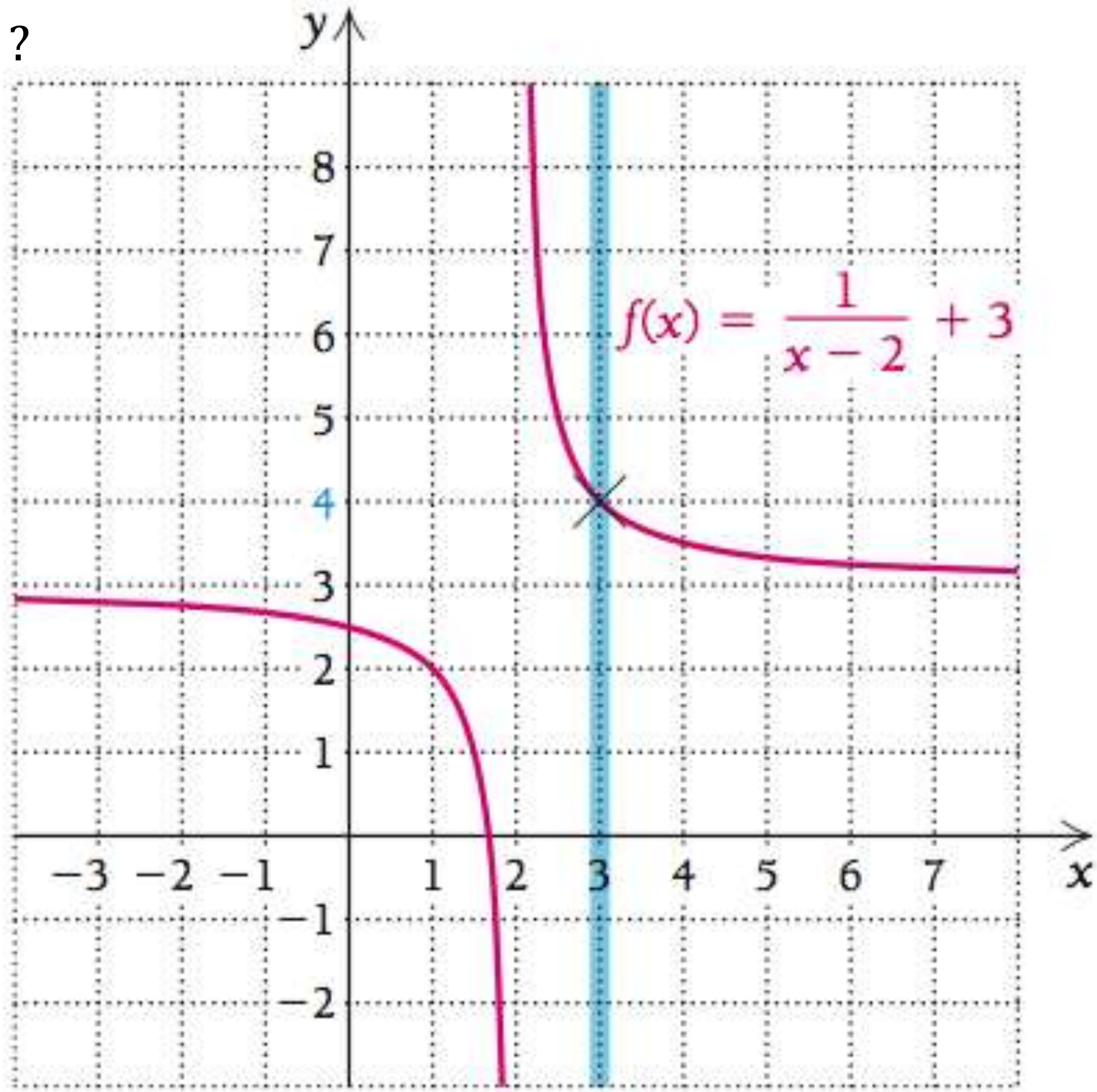


$\lim_{x \to 1} H(x)$ **no existe**

$\lim_{x \to -3} H(x) \approx -4$

Ejemplo 5

$$¿\,El\ \lim_{x\to 3}\left[\frac{1}{x-2}+3\right] existe\ ?$$

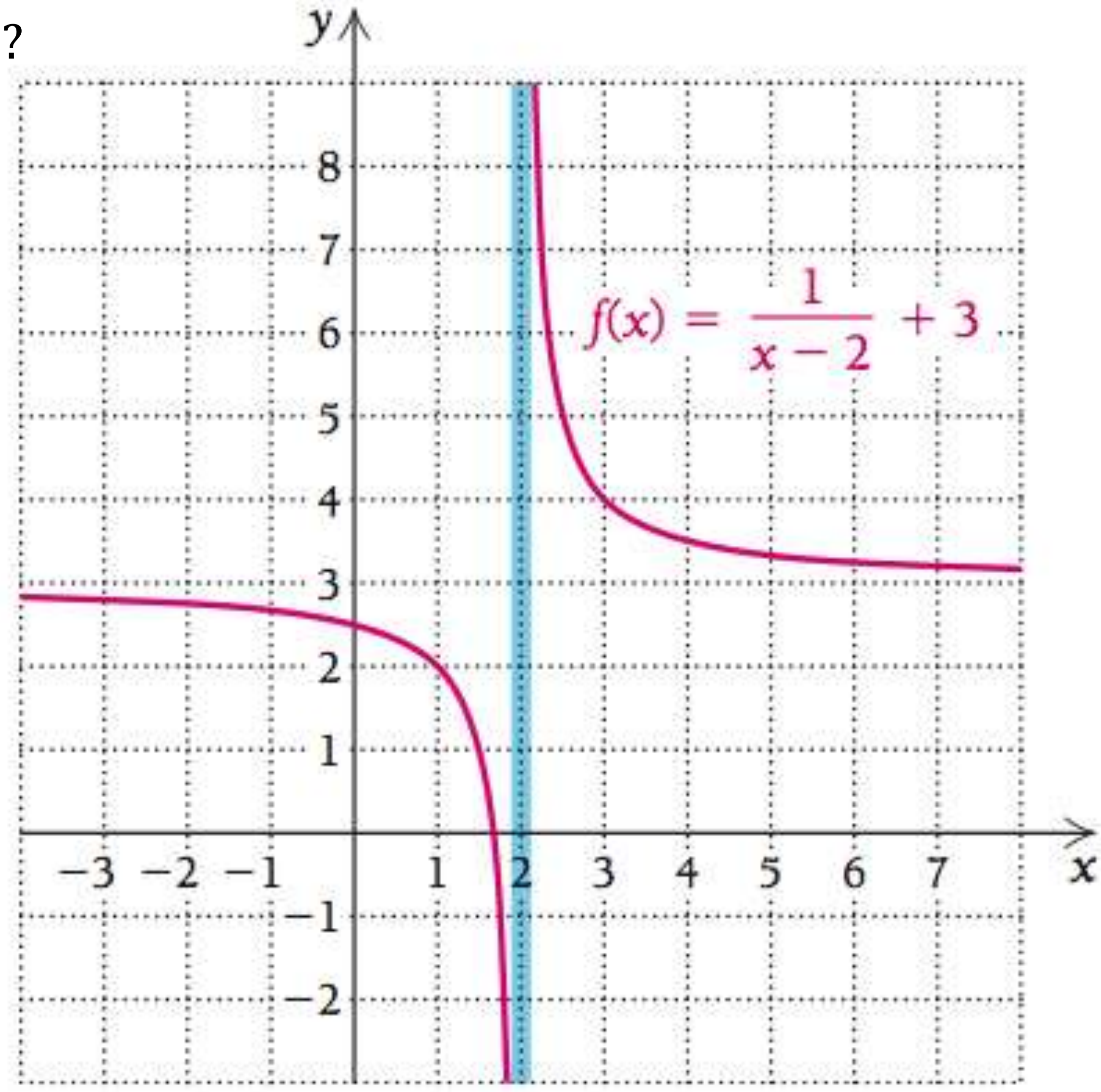


$$¡\,Si\ existe!\ \approx 4$$

Ejemplo 6

$¿\, El \lim_{x \to 2} \left[\frac{1}{x-2} + 3 \right] existe\, ?$

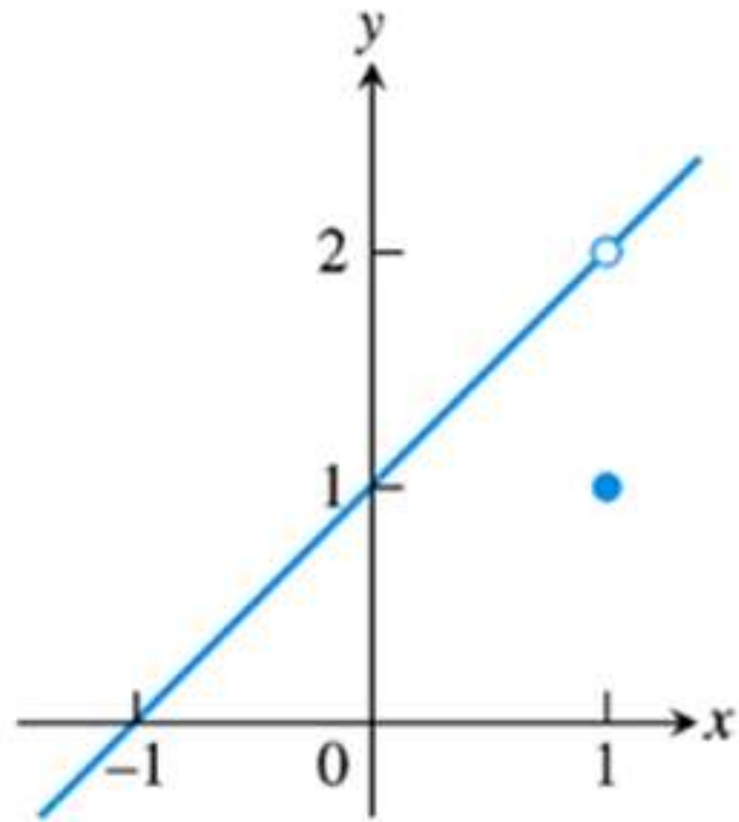
$¡\, No\ existe!$



Ejemplo 7

1. Determine g(0) y g(1)
2. ¿Existen los límites:

$$\lim_{x \to 0} g(x) \qquad \lim_{x \to 1} g(x)$$



$$\text{(b)}\quad g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Ejemplo 8

- Use un graficador para graficar:

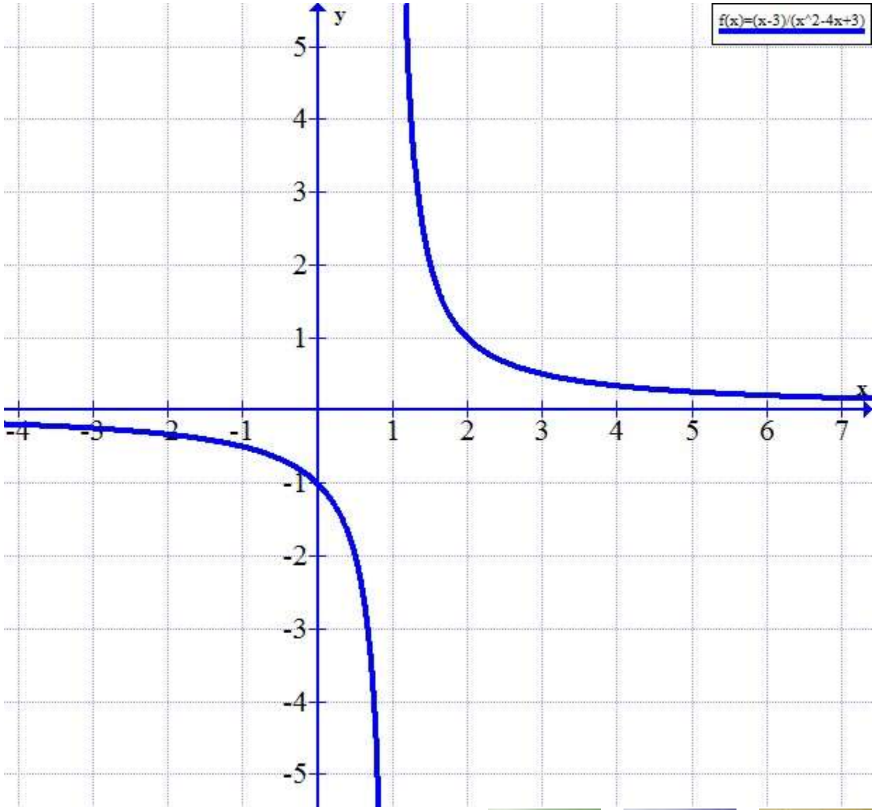
$$f(x) = \frac{x-3}{x^2-4x+3}$$

- Use la gráfica para:

a) Estimar el límite su existe.

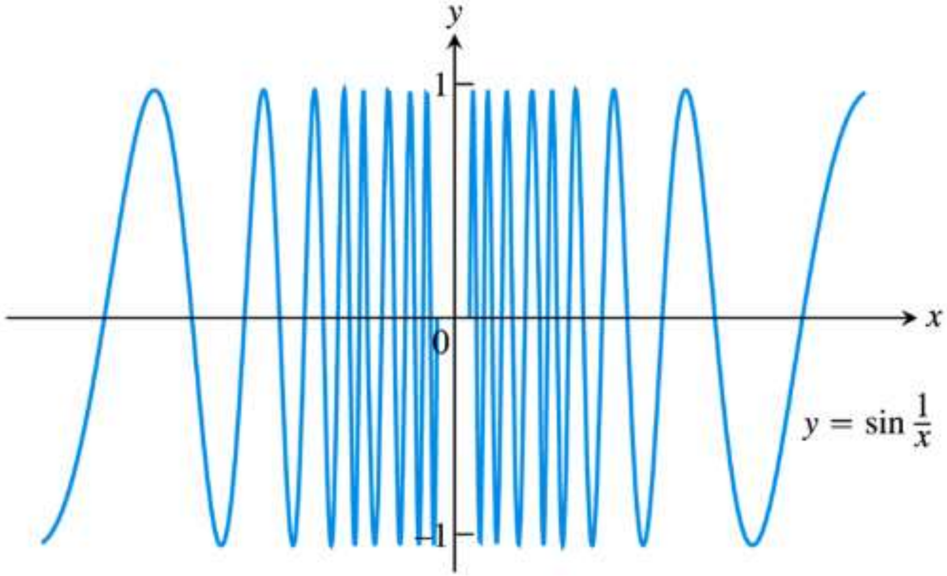
b) Determinar el dominio de la función

c) ¿Puede detectar un posible error en la determinación del dominio mediante un mero análisis de la gráfica?



Limitaciones de los métodos numéricos y gráficos para calcular límites

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \text{ no existe}$$

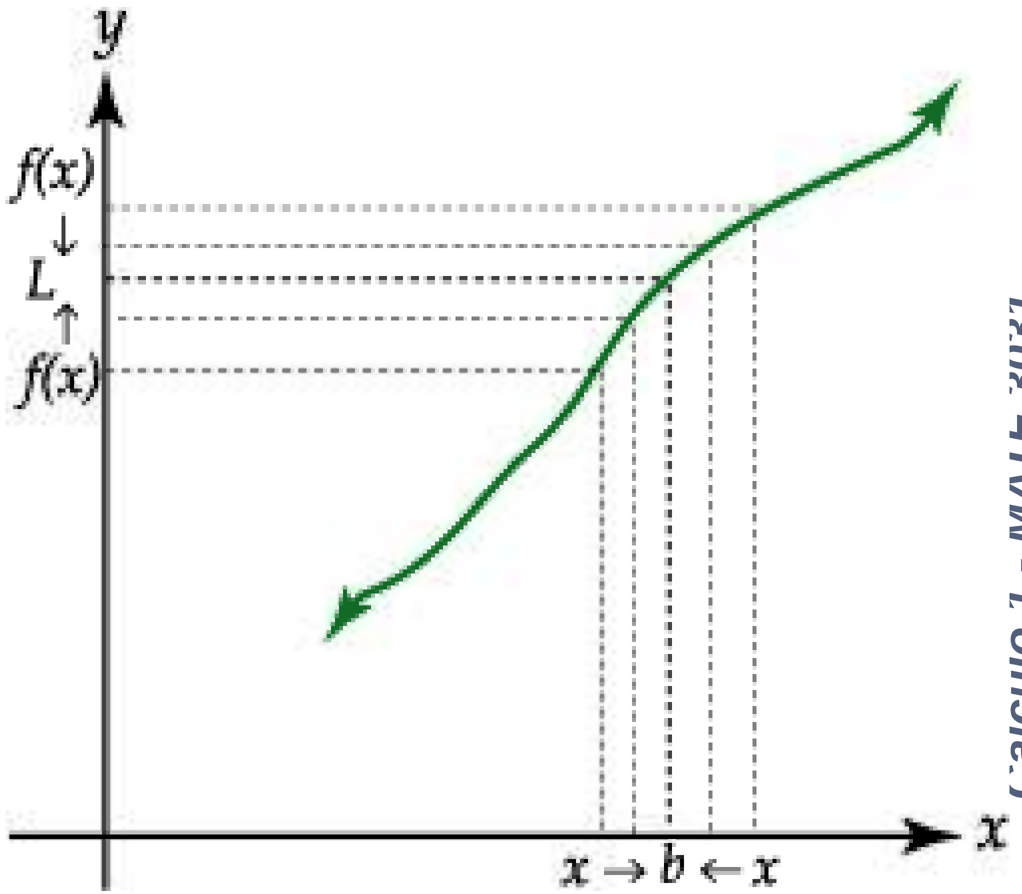


x	sin 1/x
-0.1	0.54402111
-0.01	0.50636564
-0.001	-0.8268795
-0.0001	0.30561439
-0.00001	-0.0357488
-0.000001	0.3499935
-0.0000001	-0.4205478
-0.00000001	-0.931639
-0.000000001	-0.5458433

x	sin 1/x
0.1	-0.5440211
0.01	-0.5063656
0.001	0.82687954
0.0001	-0.3056144
0.00001	0.0357488
0.000001	-0.3499935
0.0000001	0.42054779
0.00000001	0.93163903
0.000000001	0.54584335

Continuidad

- Una función es continua en un valor b en un intervalo de su dominio si su gráfica es una curva liza sin corte alguno en b.
- Una función es continua en b si y sólo si:

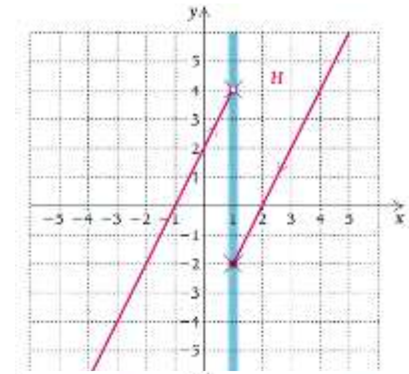


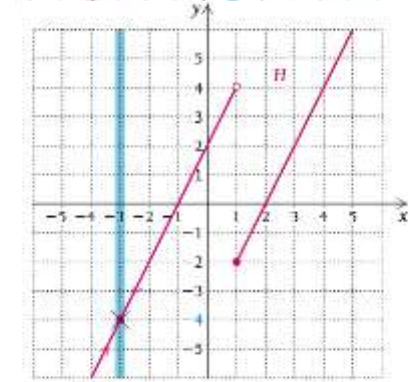
$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$

Resumen

- EL límite de un función existe y es un valor L si mientras que x toma valores "por la izquierda" o "por la derecha" a un valor $\boldsymbol{a}$ la función se acerca al valor $\boldsymbol{L}$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$





- Para determinar si el límite existe en un valor $\boldsymbol{a}$ haga una gráfica de la función. Si al trazar la recta vertical $\mathrm{x} = \boldsymbol{a}$ la gráfica se encuentra alrededor del punto asociado a $\boldsymbol{a}$. El punto NO tiene que existir.

- Una función es continua en un valor b en un intervalo de su dominio si su gráfica es una curva liza sin corte alguno en b. Esto es, si y sólo si:

$$\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$$