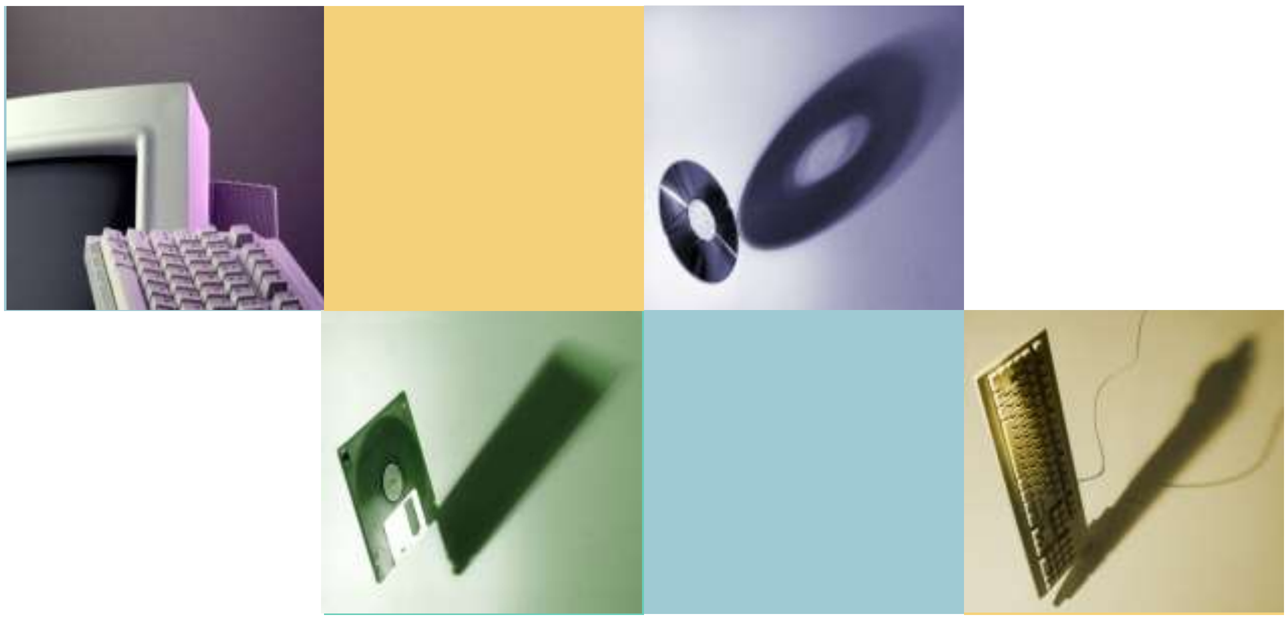
Cálculo de Límites



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 1.3

Referencia del Texto

- Sección 1.3 Cálculo analítico de Límites, Ver ejemplos 1 al 10
- Ejercicios de Práctica: Páginas 67-69: Impares 1 – 55, 63-67,75-77
- Asignación 1.3: Páginas 67-69; 26, 44, 54 y 76. En esta última use GRAPH para graficar.

Referencia del Web

- Prof. JGR Ahumada – Cálculo de Límites
- Khan Academy – Encontrando Límites algebraicamente
- Michael Kelleys Tutorials For de Calculus Phobe – How to evaluate a limit?
- Paul Online Notes – Calculus - The Limit
- Visual Calculus - Introduction to Limits

Propiedades de Límites

$$\lim_{x \to c} ax^n = ac^n$$

$$\lim_{x \to c} \left[f(x) \pm g(x) \right] = \lim_{x \to c} f(x) \pm \lim_{x \to c} g(x)$$

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right) \left(\lim_{x \to c} g(x) \right)$$

$$\lim_{x \to c} \left(f(x) \right)^n = \left(\lim_{x \to c} f(x) \right)^n$$

$$\lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} f(x)}$$

Calculando límites sustituyendo

$$\lim_{x \to 3} (3x^4 - x^3 - 5x + 10)$$

$$= 3(3)^4 - (3)^3 - 5(3) + 10$$

$$= 211$$

$$\lim_{x \to -2} (2x + 1)^5 = (2(-2) + 1)^5$$

$$= -243$$

$$\lim_{x \to 2} \sqrt[4]{3x^4 + 5x^2 + 13} = \sqrt[4]{81}$$

$$= 3$$

Límite del cociente de funciones

$$\lim_{x\to c}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} \qquad \lim_{x\to c} g(x)\neq 0$$

- Ejemplos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-1}{x+4}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x-1\right)}{\lim\limits_{x\to 2}\left(x+4\right)}=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$$

Límite del cociente de funciones

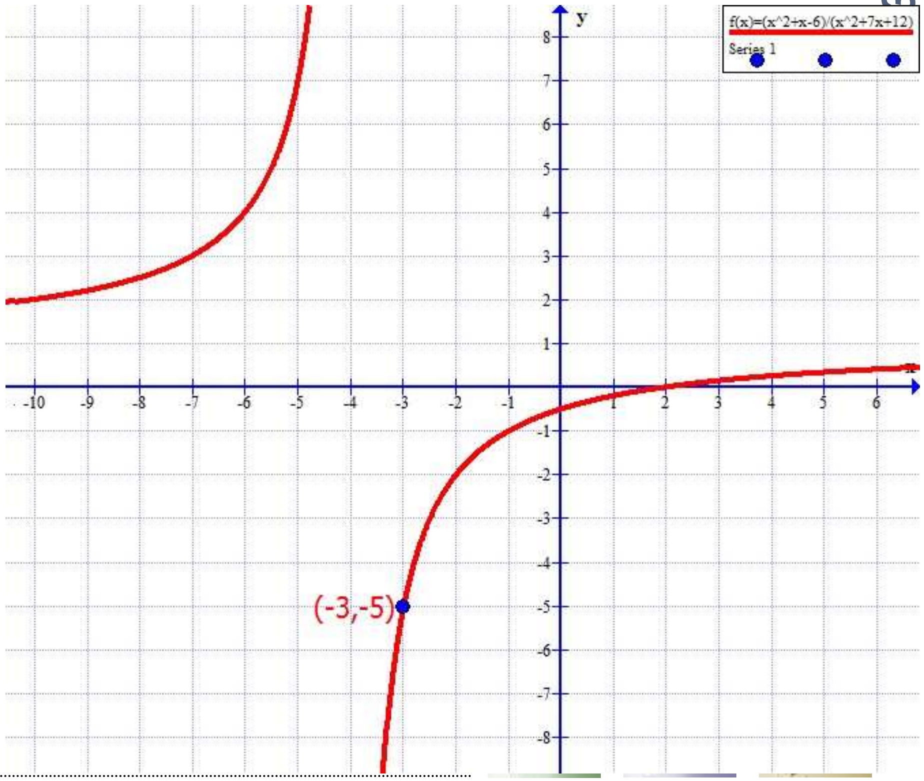
- Es $\displaystyle\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}=\frac{\displaystyle\lim_{x\to -3} x^2+x-6}{\displaystyle\lim_{x\to -3} x^2+7x+12}$?

¡NO! …. Por que el … $\displaystyle\lim_{x\to -3} x^2+7x+12=0$

¿Existe?

Aparentemente SI y es aproximadamente …

$$\lim_{x\to -3}\frac{x^2+x-6}{x^2+7x+12}\approx -5$$



Calculando límites algebraicamente

Calcule: $$\lim_{x \to -3} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 + 7x + 12} = \lim_{x \to -3} \frac{(x+3)(x-2)}{(x+3)(x+4)}$$

Trate de simplificar la expresión factorizando

$$= \lim_{x \to -3} \frac{x-2}{x+4}$$

$$= \frac{\lim_{x \to -3}(x-2)}{\lim_{x \to -3}(x+4)} = \frac{-5}{1} = -5$$

Calcule:

$$\lim_{x \to 3} \frac{2x^2 - 5x - 3}{x - 3} = \lim_{x \to 3} \frac{(x-3)(2x+1)}{(x-3)}$$

$$= \lim_{x \to 3}(2x + 1)$$

$$= 2(3) + 1 \quad = 7$$

Calculando límites algebraicamente

- Calcule $\displaystyle \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

Trate de multiplicar por una expresión que preserve el valor original de la expresión pero que elimine el factor del denominador que tiende a 0

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{(x+1)-1}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right]$$

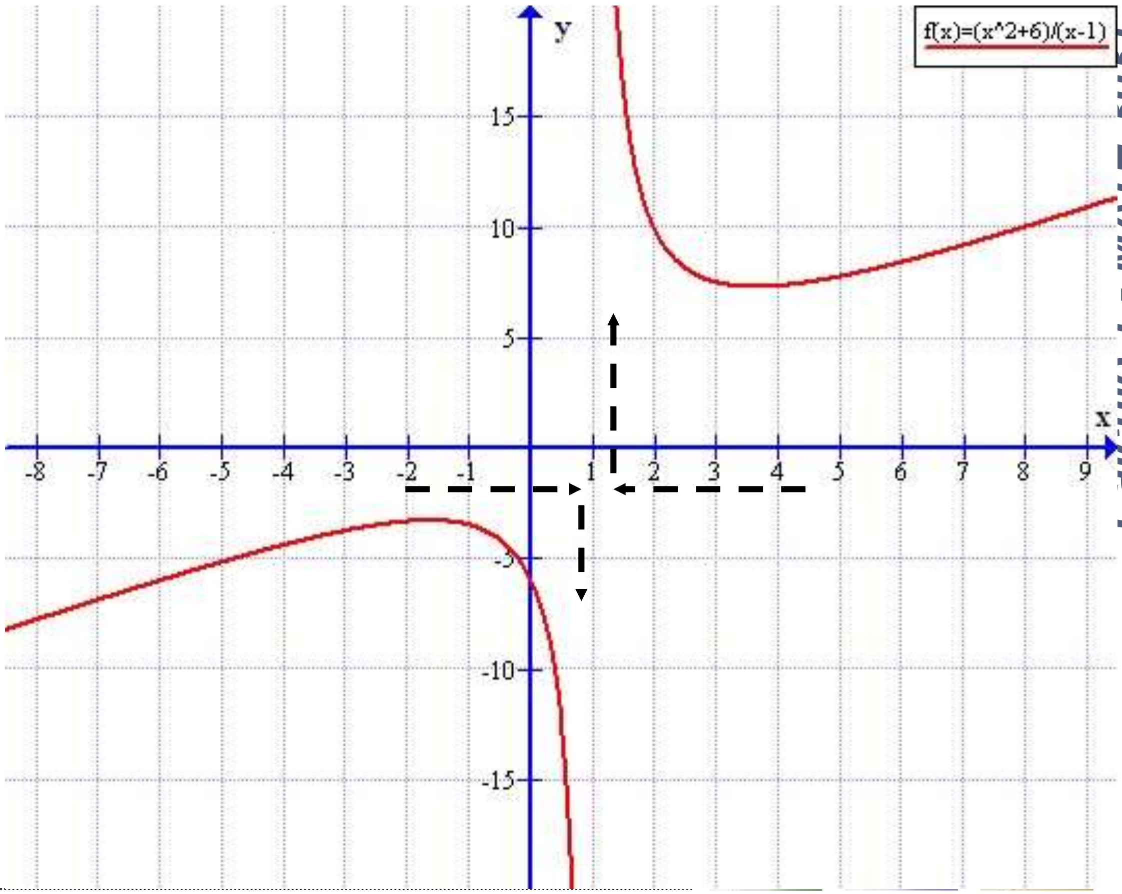
$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{x}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}\right] = \frac{1}{\sqrt{0+1}+1} = \frac{1}{2}$$

Coteje si el límite existe

- Calcule: $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^2+6}{x-1}$

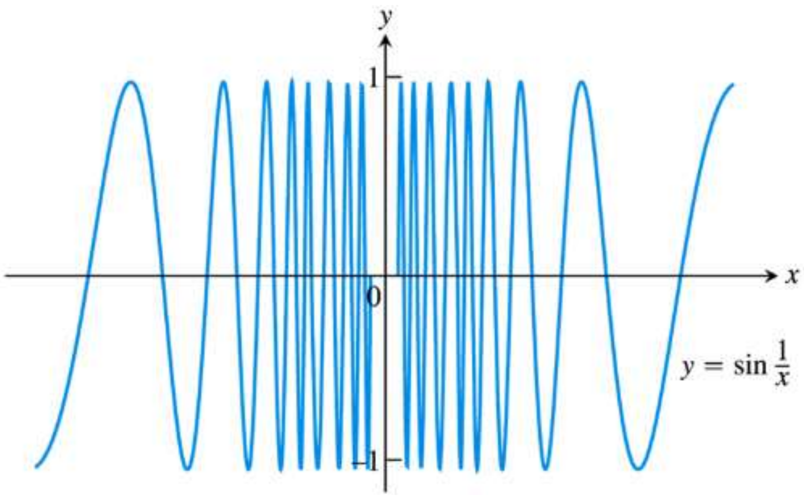
- Observe que la expresión no puede simplificarse algebraicamente. Por lo tanto, ¡grafique y vea si el límite existe!

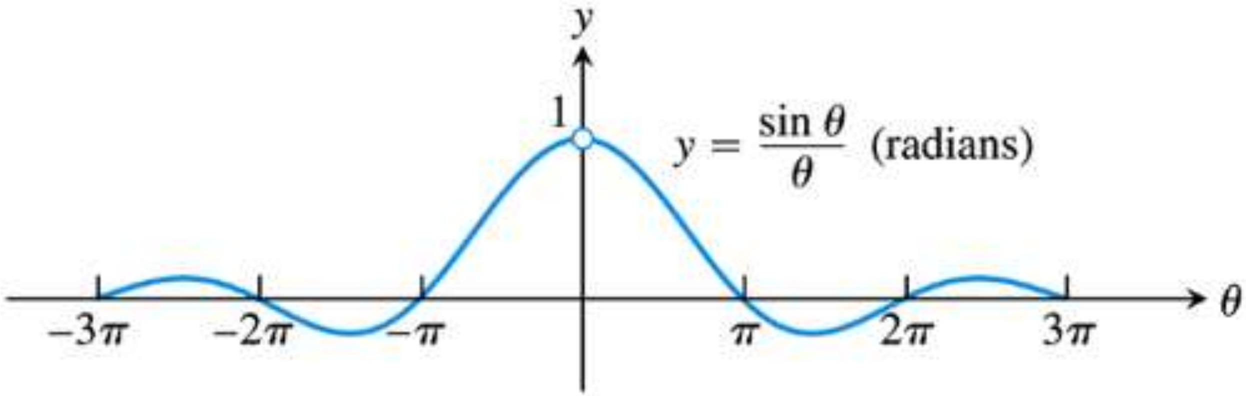


Limites especiales

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x} = \text{no existe}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$





Uso de propiedades de límites

- Calcule $\lim\limits_{\vartheta\to 0} \dfrac{\sin 5\theta}{\theta}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Solución:

$$= \lim_{\vartheta\to 0} \frac{5}{5} \cdot \frac{\sin 5\theta}{\theta}$$

$$= \lim_{\vartheta\to 0} \frac{5}{1} \cdot \frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$

$$= 5 \cdot \lim_{\vartheta\to 0} \frac{\sin 5\theta}{5\theta}$$

$$= 5 \cdot 1$$

$$= 5$$

Límites de funciones Trancendentales

- Sea c un número real en el dominio de una función transcendental. Entonces:

$$\lim_{x \to c} \sin x = \sin c \qquad \lim_{x \to c} \csc x = \csc c$$

$$\lim_{x \to c} \cos x = \cos c \qquad \lim_{x \to c} \sec x = \sec c$$

$$\lim_{x \to c} \tan x = \tan c \qquad \lim_{x \to c} \cot x = \cot c$$

$$\lim_{x \to c} b^x = b^c \qquad \lim_{x \to c} \log_b x = \log_b c$$

Resumen

- Para calcular límite de una función en un valor a :

$$\lim_{x \to a} f(x)$$

1. Si la función es continua en a calcule el valor de la función en a sustituyendo. Esto es, $f(a)$.
2. Si es un cociente de dos funciones $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ tal que $g(a) = 0$ manipule algebraicamente la expresión de manera que elimine el factor que hace $g(a) = 0$. Trate:
   - Factorizando numerador y denominador y simplifique.
   - Multiplicando el numerador y denominador para eliminar el valor indeseado.
3. Si no funciona, coteje si el límite existe.