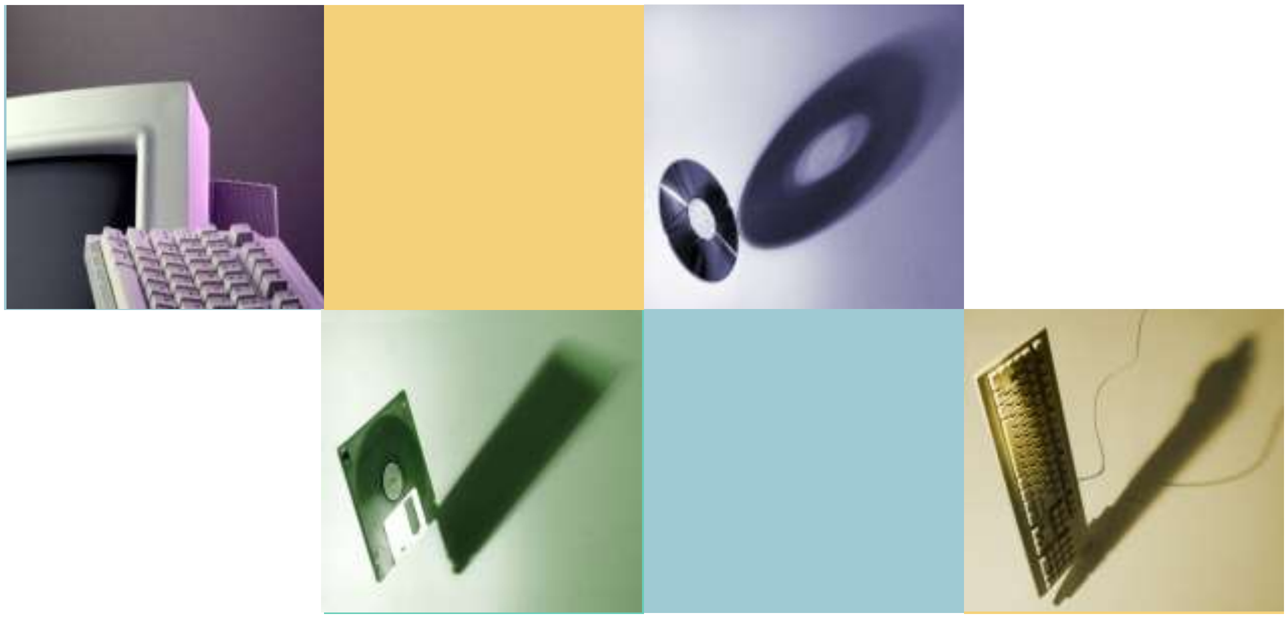
Límites infinitos



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 1.4

- **Referencia:**
  - Referencia: Sección 1.5 Límites infinitos. Ver ejemplos 1 al 5
  - Ejercicios de Práctica: Páginas 88-90: Impares 1 – 51
- **Asignación 1.4**: Páginas 88-90: 22 y 50. Use GRAPH para graficar.

- **Referencias del Web:**
- Prof. JGR Ahumada – Límites Infinitos
- Khan Academy – Límites e Infinito
- Michael Kelleys Tutorials For de Calculus Phobe – Limits and Infinity?
- Paul's Online Note – Infinite Limits

¿Infinito? … ∞

- Es una manera de representar una tendencia a un valor bien grande. No representa un número real.

$x \to +\infty$ … "x" tiende a "positivo infinito"

$x \to -\infty$ … "x" tiende a "negativo infinito"

$f(x) \to +\infty$ … "$f(x)$" tiende a "positivo infinito"

$f(x) \to -\infty$ … "$f(x)$" tiende a "negativo infinito"

Límites infinitos

- Considere $$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2}$$

  – Al construir una tabla de valores cercano a 2 por la derecha …

x	3	2.5	2.3	2.25	2.1	2.01	2.001	2.00001
$\frac{1}{x-2}$	1	2	3,33	4	10	100	1000	10000

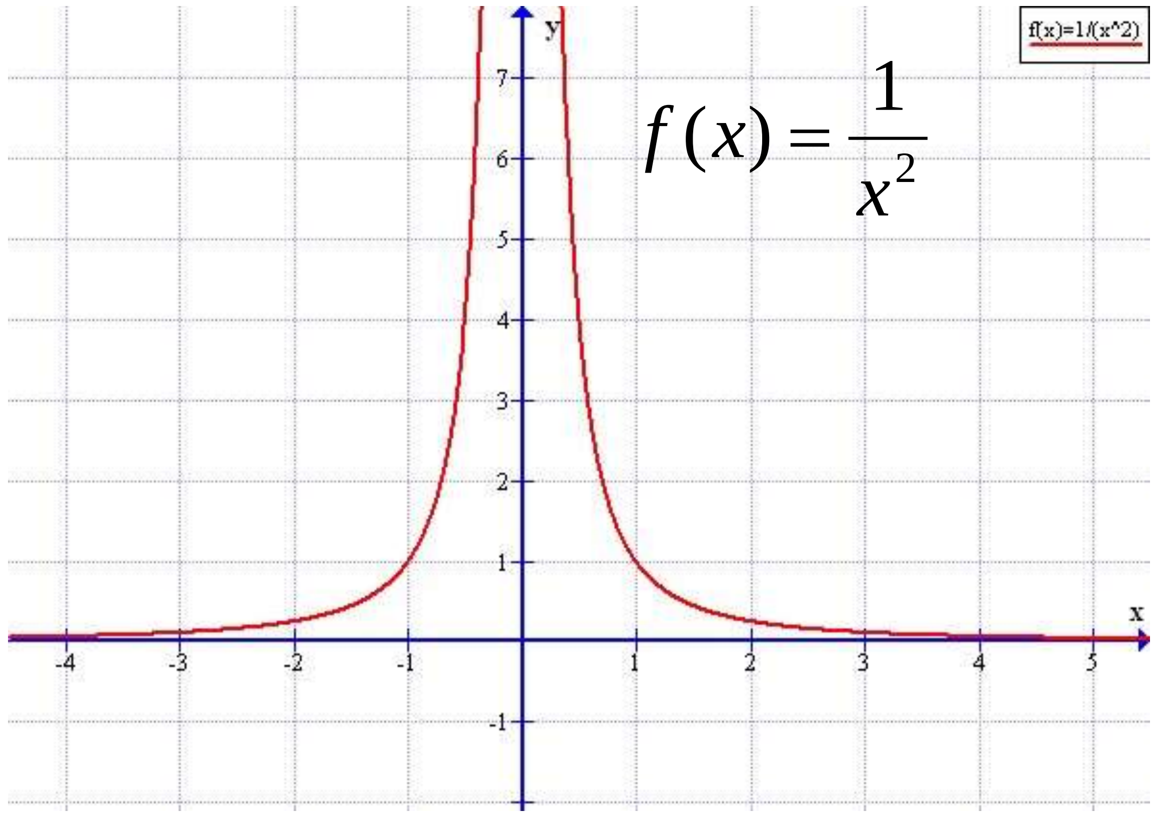
  – Se puede expresar que: $$\lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty$$

¿Existe el Límite de $1/x^2$ mientras $x \rightarrow 0$?

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

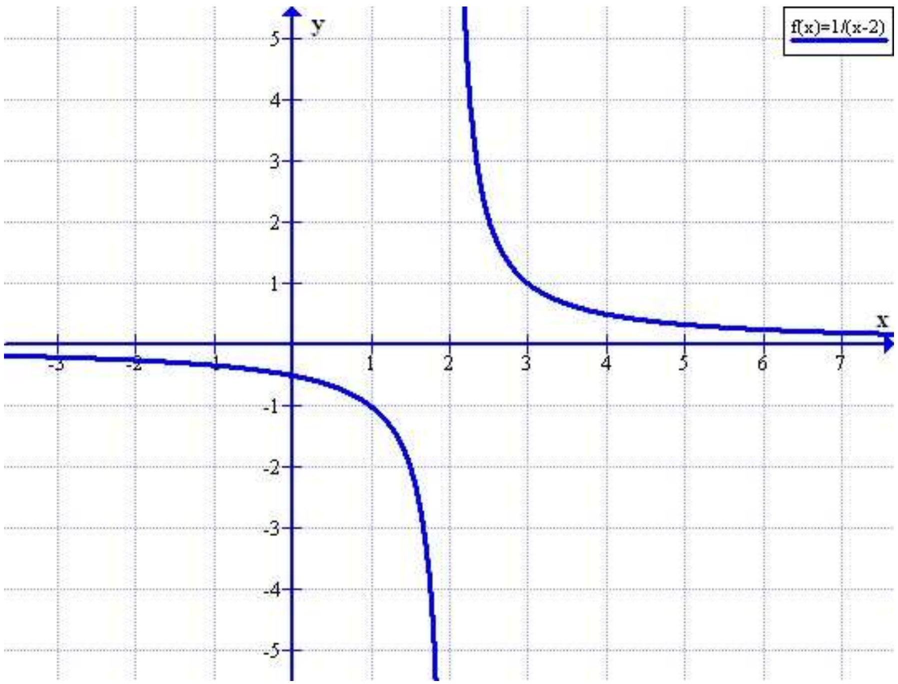


$$f(x) = \frac{1}{x^2}$$

A pesar que se puede expresar así, el límite NO existe por que infinito no es un número!

Límite "al infinito"

- Considere nuevamente



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x-2} = 0$$

El límite mientras x tiende a infinito de "$f(x)$" existe y es 0

Ejemplo 1

- Según la gráfica calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1^{+}} g(x) = +\infty$

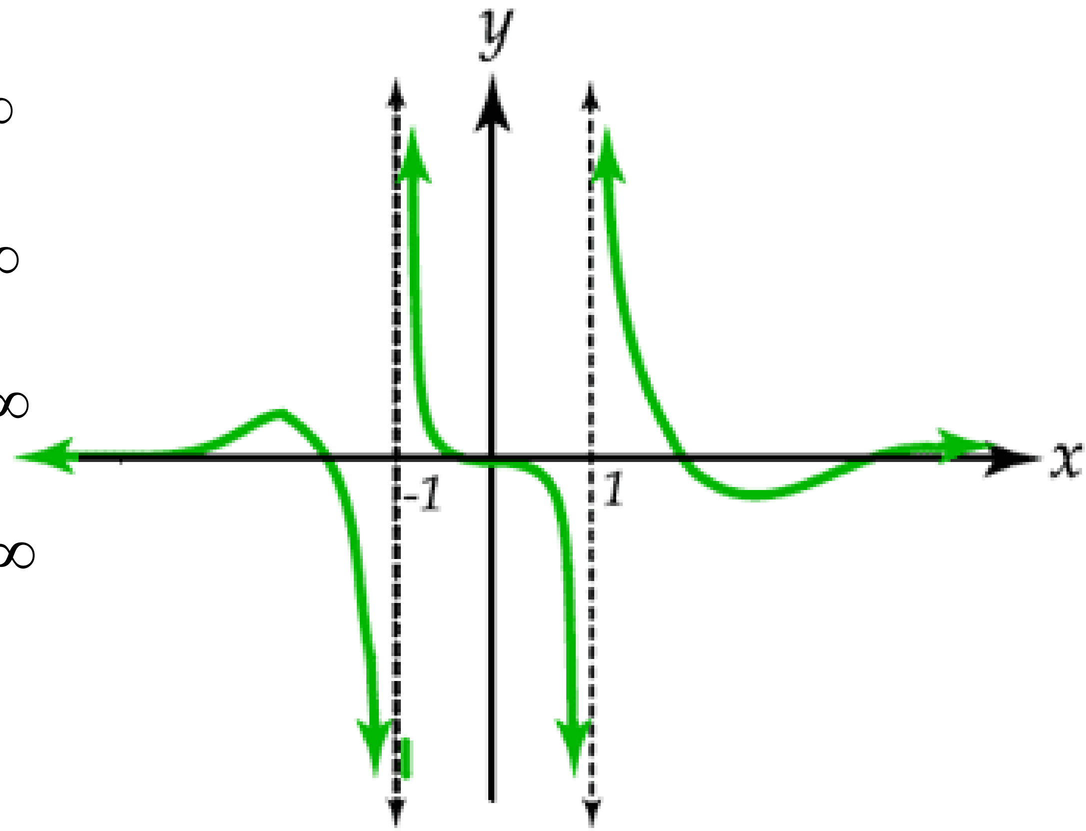
b) $\lim\limits_{x\to 1^{-}} g(x) = -\infty$

c) $\lim\limits_{x\to -1^{+}} g(x) = +\infty$

d) $\lim\limits_{x\to -1^{-}} g(x) = -\infty$

e) $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 0$

f) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = 0$



Propiedades de Los Límites Infinitos

- Sean c y L números reales, f, g dos funciones tales que:

$$\lim_{x\to c} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to c} g(x) = L$$

… entonces:

$$\lim_{x\to c} f(x) \pm g(x) = \infty$$

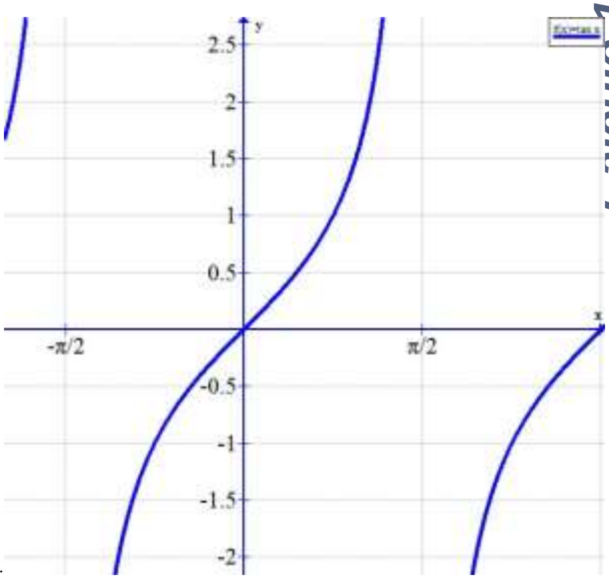
$$\lim_{x\to c} f(x) \times g(x) = \infty \quad \text{Si } L > 0$$

$$\lim_{x\to c} f(x) \times g(x) = -\infty \quad \text{Si } L < 0$$

$$\lim_{x\to c} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$$

- Ejemplos:

$$\lim_{x\to 0}(1 + \frac{1}{x^2}) = \infty \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{5}{\tan x}\right) = 0$$



Calculo 1 - MATE 3031

Ejemplo 2

- Calcule los siguientes límites:

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{9}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{1}{x+2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 5^+} \frac{7}{x-5} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x^2-9} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} \frac{-1}{x^2-9} = -\infty$$

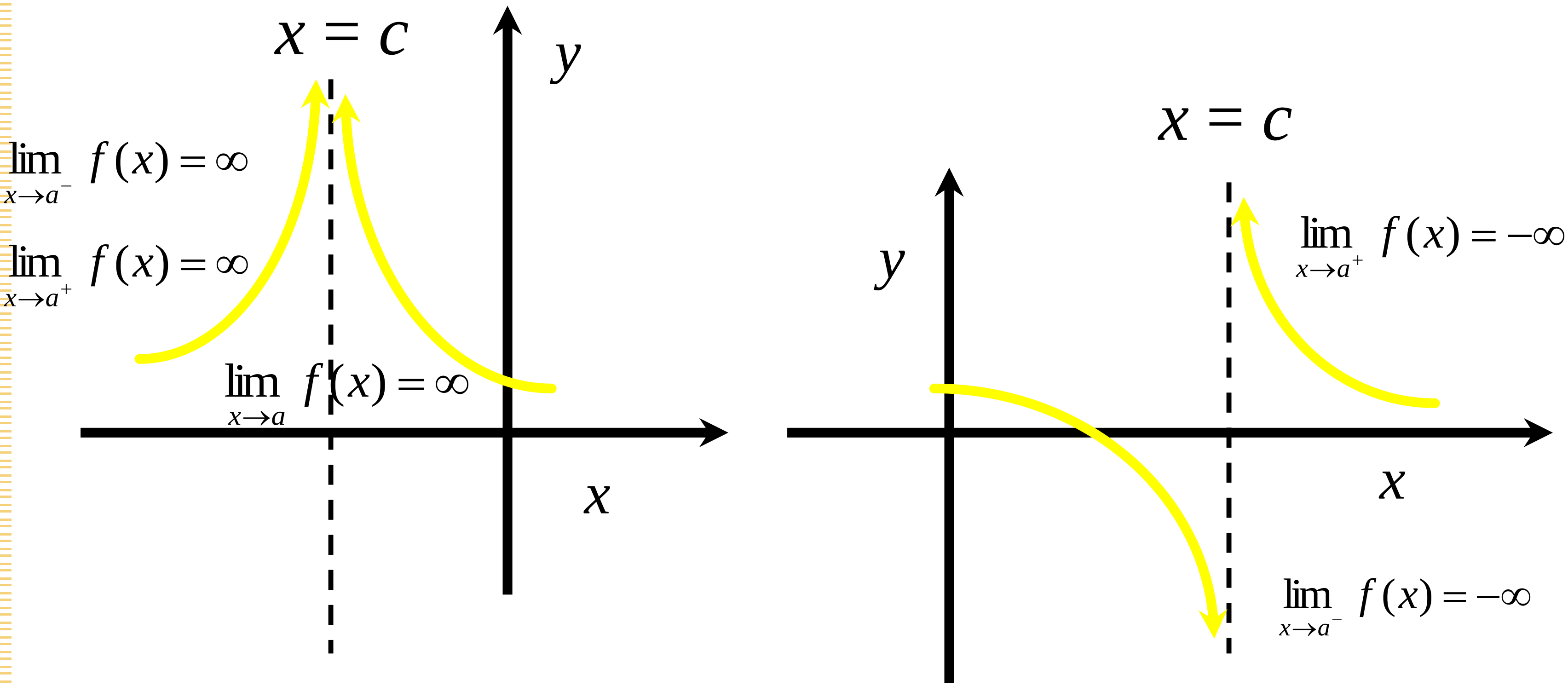
$$\lim_{x\to 4^-} \frac{7x}{x-4} = \lim_{x\to 4^-} \frac{7x}{x-4}\cdot\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to 4^-} \frac{7}{1-\frac{4}{x}}$$

$$= -\infty$$

Asintotas Verticales

- La recta x = c se llama una ***asíntota vertical*** de la gráfica de una función y = f(x) si:



Teorema (Asíntota verticales)

- Sea $R(x)$ una función racional expresada en la forma mas simple tal que:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

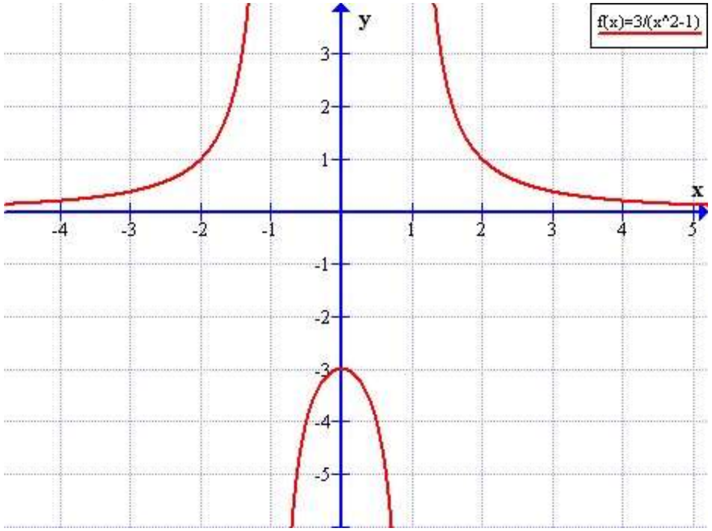
- Si r es un cero del denominador $q(x)$. Esto es, si $(x - r)$ es un factor del denominador $q(x)$.
- Entonces $R(x)$ tendrá una asíntota vertical en:

$$x = r$$

Ejemplo 3

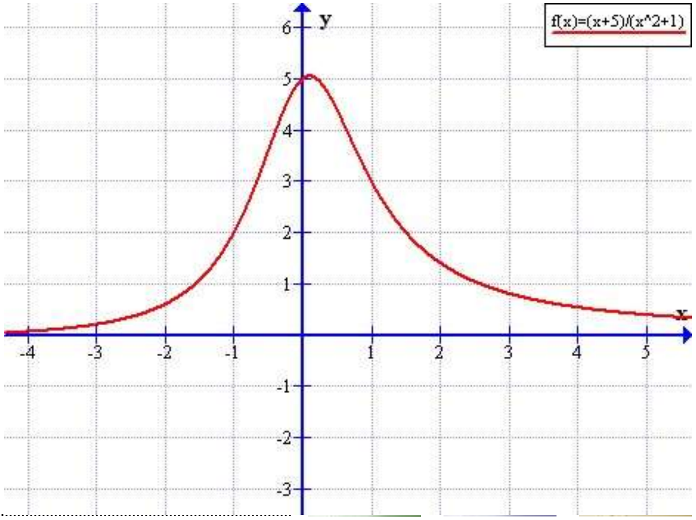
- Determine las asíntotas verticales:

$$\text{(a)}\quad R(x) = \frac{3}{x^2 - 1} = \frac{3}{(x-1)(x+1)}$$



Asíntota vertical en : x = -1 , x = 1

$$\text{(b)}\quad R(x) = \frac{x+5}{x^2+1}$$



No hay asíntotas verticales

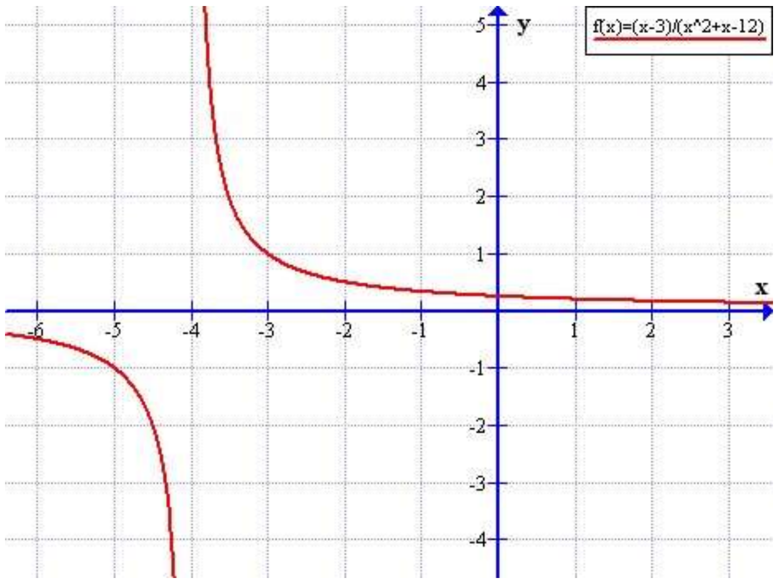
Cálculo 1 - MATE 3031

Ejemplo 3 … p2

$$\text{(c)}\quad R(x) = \frac{x-3}{x^2+x-12}$$

$$= \frac{x-3}{(x-3)(x+4)}$$

$$= \frac{1}{x+4}$$



Asíntota vertical en : x = -4

Ejercicios del Texto

En los ejercicios 13 a 32, encontrar las asíntotas verticales (si las hay) de la gráfica de la función.

13. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$

14. $f(x) = \dfrac{4}{(x-2)^3}$

15. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

16. $f(x) = \dfrac{-4x}{x^2+4}$

17. $g(t) = \dfrac{t-1}{t^2+1}$

18. $h(s) = \dfrac{2s-3}{s^2-25}$

19. $h(x) = \dfrac{x^2-2}{x^2-x-2}$

20. $g(x) = \dfrac{2+x}{x^2(1-x)}$

21. $T(t) = 1 - \dfrac{4}{t^2}$

22. $g(x) = \dfrac{\frac{1}{2}x^3 - x^2 - 4x}{3x^2-6x-24}$

23. $f(x) = \dfrac{3}{x^2+x-2}$

24. $f(x) = \dfrac{4x^2+4x-24}{x^4-2x^3-9x^2+18x}$

25. $g(x) = \dfrac{x^3+1}{x+1}$

26. $h(x) = \dfrac{x^2-4}{x^3+2x^2+x+2}$

Ejercicios del Texto

En los ejercicios 37 a 54, calcular el límite.

37. $\lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{1}{x+1}$

38. $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{-1}{(x-1)^2}$

39. $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{x}{x-2}$

40. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2+x}{1-x}$

41. $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2}{(x-1)^2}$

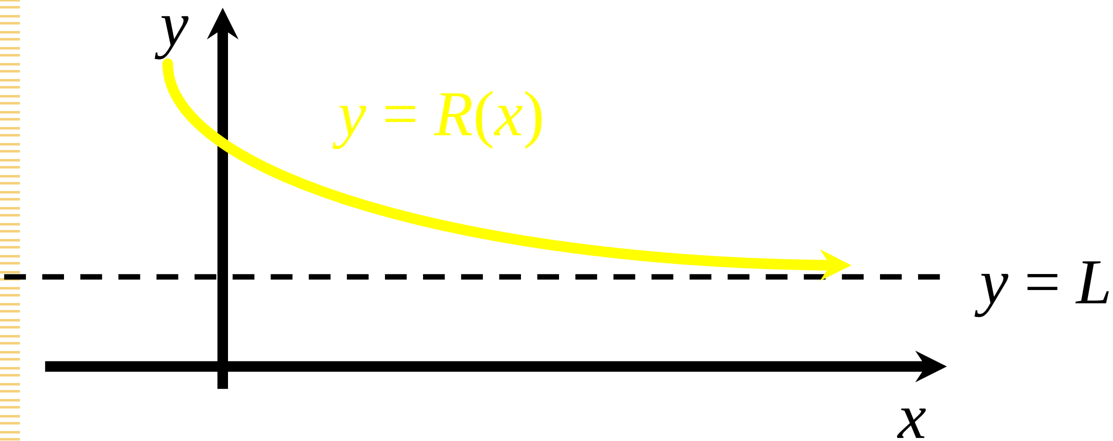
42. $\lim\limits_{x \to 4^-} \dfrac{x^2}{x^2+16}$

43. $\lim\limits_{x \to -3^-} \dfrac{x+3}{x^2+x-6}$

44. $\lim\limits_{x \to (-1/2)^+} \dfrac{6x^2+x-1}{4x^2-4x-3}$

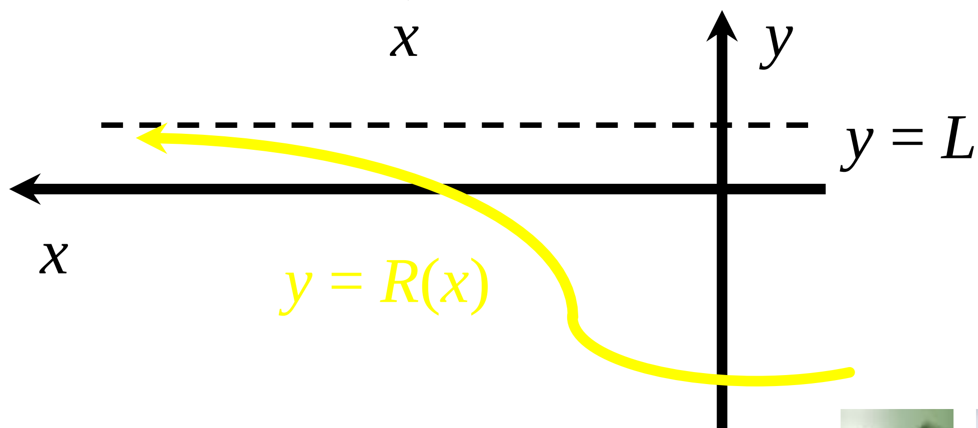
Asíntotas Horizontales

- La recta y = L se llama **asíntota horizontal** de la gráfica de y = f(x) si y solo si



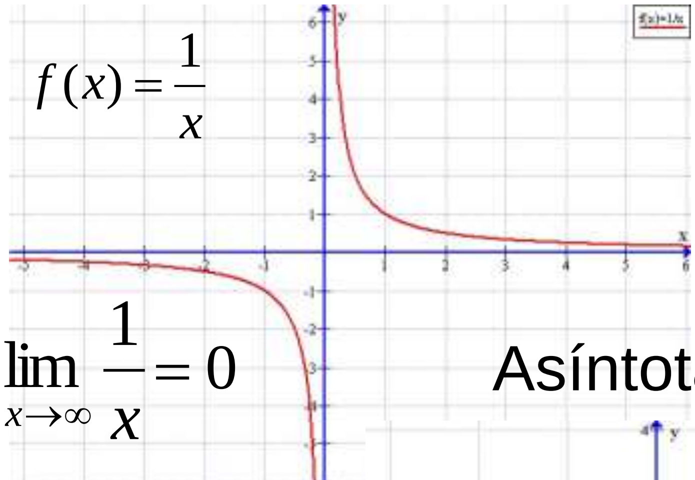
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$



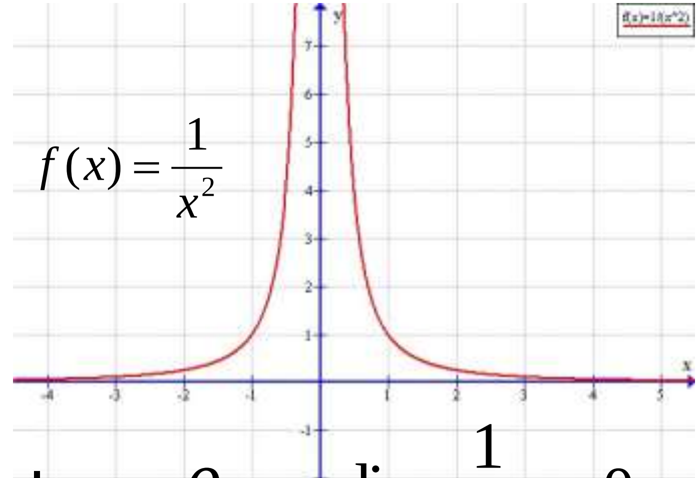
Asíntotas horizontales

- Considere las funciones:



$$f(x)=\frac{1}{x}$$

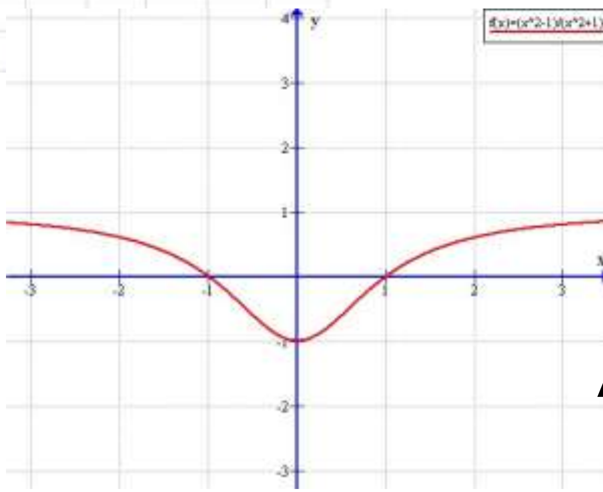
$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$



$$f(x)=\frac{1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$$

Asíntota horizontal $y = 0$



$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{x^2+1}=1$$

Asíntota horizontal $y = 1$

Teorema (Asíntota horizontal)

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

1. Si $n < m$, entonces $y = 0$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

2. Si $n = m$, entonces $y = a_n / b_m$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$ ó $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_m}$

3. If $n > m$, la gráfica de f no tiene una asíntota horizontal.

Ejemplo 4

- Encuentre las asíntotas horizontales:

$$\text{(a)}\quad R(x)=\frac{3x^2-4x+15}{x^3-4x^2+7x+1}$$

Asíntota horizontal : $y = 0$

$$\text{(b)}\quad R(x)=\frac{2x^2+4x-1}{3x^2-x+5}$$

Asíntota horizontal: $y = 2/3$

Ejemplo 5

- Encuentre los siguientes límites:
- Observe que puede aplicar el teorema para hallar asíntotas horizontales ya que son funciones racionales

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x^3+5x^2+5x-3}{x^4-2x^3+9x+5} = 0$$

$$\text{(b)} \quad \lim_{x\to\infty} \frac{3x+5}{x-4} = 3$$

$$\text{(c)} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x-1}{3x^2-x^4+5} = -1$$

Recuerde

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0 \qquad \lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\infty+\infty=\infty \qquad \infty\cdot\infty=\infty$$

Sin embargo, ….

$$\infty-\infty=\text{indefinido} \qquad \frac{\infty}{\infty}=\text{indefinido}$$

$$\frac{0}{0}=\text{indefinido}$$

En estos casos, se necesitan tratar de usar métodos algebraicos para simplificar u otras herramientas matemáticas para analizar los límites.