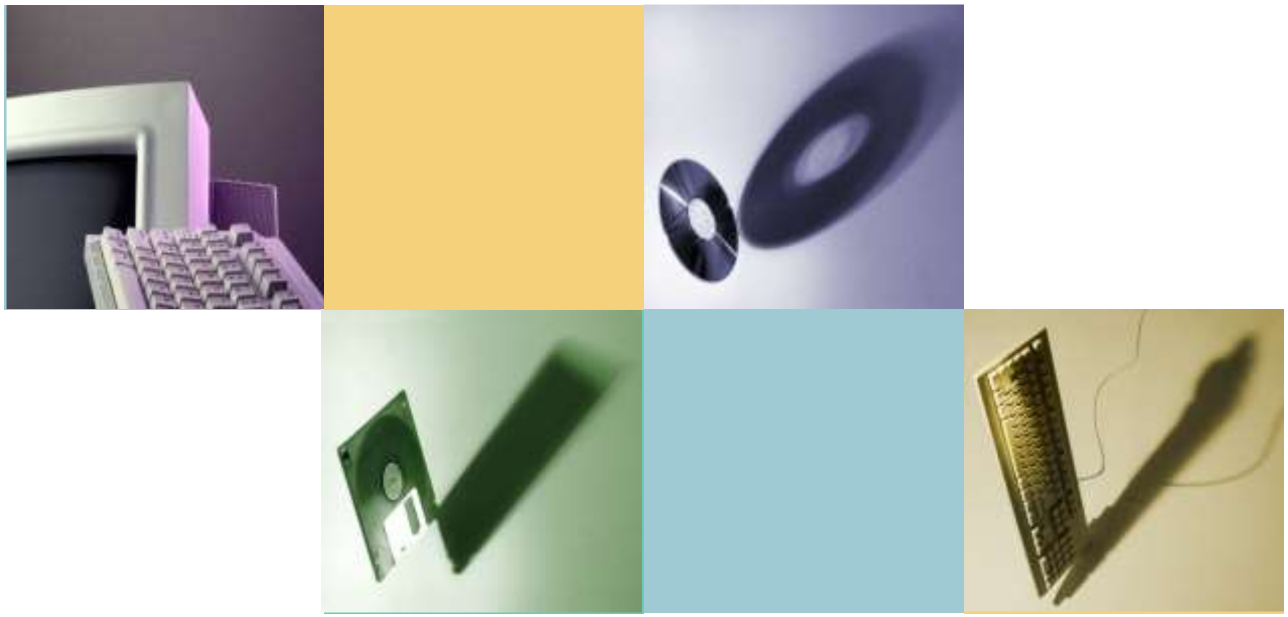
La Derivada y las Reglas Básicas de Diferenciación



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 1.5

- Referencia:
  - Sección 2.1 Derivación, Ver ejemplos 1 al 5; Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 17. Sección 2.2 Las Reglas básicas de derivación y razón de cambio; Ver ejemplos 1, 3 y 7.; Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 63.
  - Asignación: Sección 1.5: **#18**; Sección 2.2 **#32 (incluya copia de la imagen de la gráfica), 58, 60**
- Referencia en el Web:
  - Khan Academy – Introducción a las Derivadas
  - Calculus Phobe Tutorials - The Difference Quotient
  - Khan Academy – The Power Rule
  - Calculus Phobe – The Power Rule

Definición

- La derivada de una función en un número denotada por f'(a), es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

- si este límite existe. En ese caso, se dice que la función es diferenciable en a

Ejemplo 1

- Encuentre la derivada de la función f en el valor 2, donde:
- Solución: $f(x) = x^2 - 1$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h)^2 - 1] - [(2)^2 - 1]}{h}$$

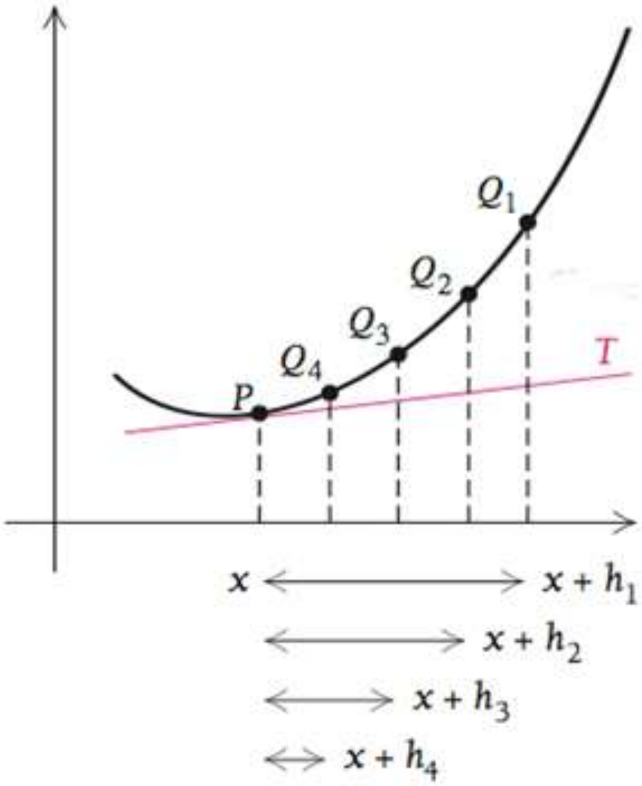
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[2^2 + 4h + h^2 - 1] - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(h+4)}{h} = 4$$

La derivada de la función f en x=2 es **4**

Interpretación Geométrica de la Derivada

- La derivada en x es la pendiente de la recta tangente a una curva en x:



$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Cálculo 1 - MATE 3031

Ejemplo 2

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función f en x = 2 dado que:

$$f(2) = -1 \qquad f'(2) = 3$$

Solución:

- La derivada de f en $x = 2$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $(\mathbf{2}, -\mathbf{1})$.
- Como $f\,'(2) = 3$, la pendiente de la tangente es **3**.

$$y - (-1) = 3(x - 2)$$

$$y + 1 = 3x - 6$$

$$y = 3x - 7$$

Interpretación de la Derivada como razón de cambio

- La **razón de cambio instantánea** de un función f cuando x = a, está dado por:

$$\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

siempre que este límite exista.

- La razón de cambio instantánea de un función cuando $x = a$ es la derivada de la función en a. Esto es, $f'(a)$.

Ejemplo 3

$$f(x) = x^2 + 5x$$

- Encuentre la **razón de cambio promedio** entre los valores -2 a 3.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(3) - f(-2)}{3 - (-2)}$$

$$= \frac{24 - (-6)}{5}$$

$$= 6$$

- Encuentre la **razón de cambio instantáneo** en **3**.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(3) = \lim_{h \to 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[(3+h)^2 + 5(3+h)] - [3^2 + 5(3)]}{h}$$

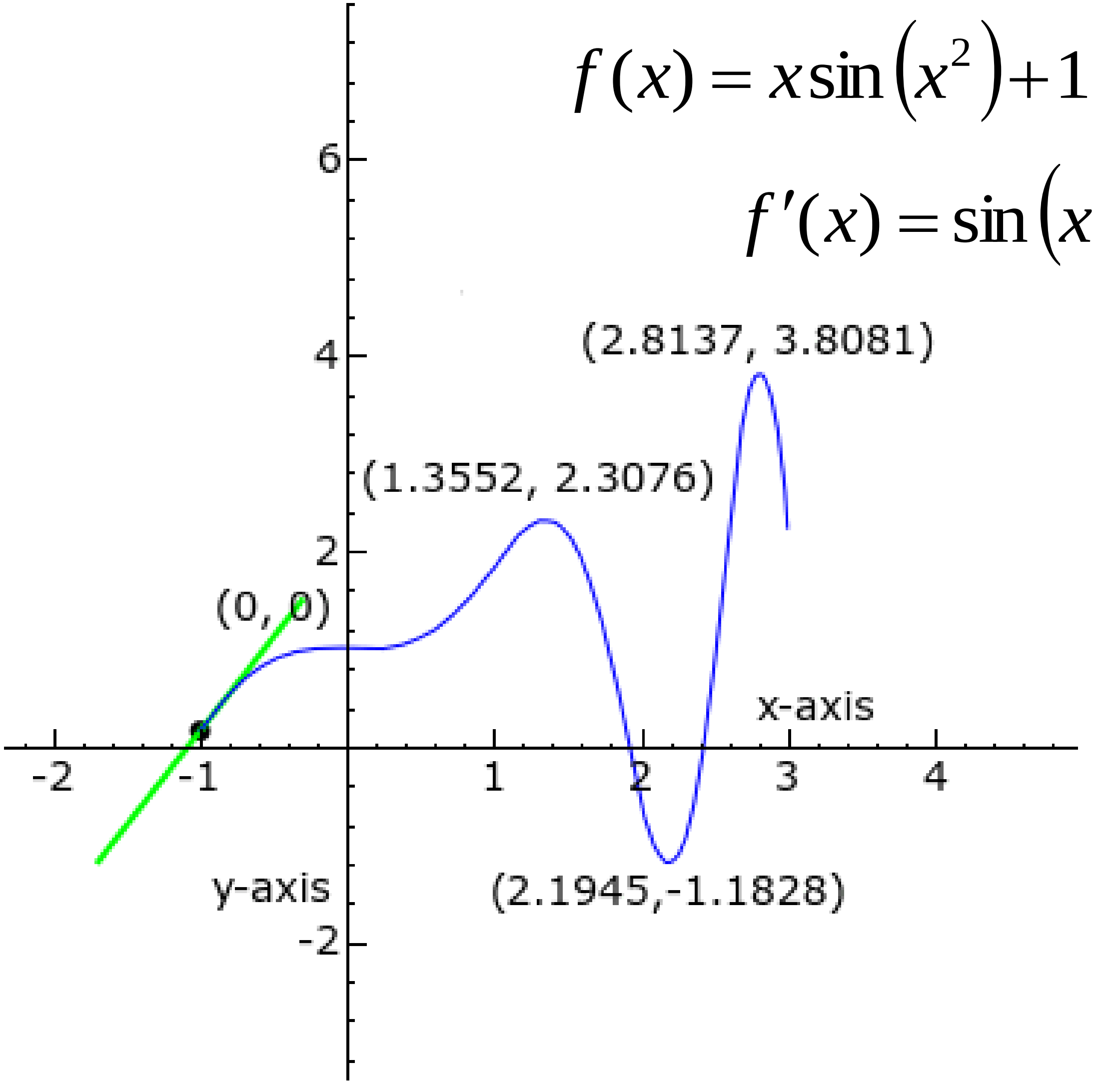
$$= \lim_{h \to 0} \frac{[9 + 6h + h^2 + 15 + 5h] - [24]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} (h + 11) = 11$$

La Derivada como función

$$f(x) = x\sin\left(x^2\right) + 1 \qquad -1 \le x \le 3$$

$$f'(x) = \sin\left(x^2\right) + 2x^2\cos\left(x^2\right)$$



Cálculo 1 - MATE 3031

Ejemplo 4

Encuentre la función $f'(x)$, si $f(x) = x^3$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 - (x)^3}{h}$$

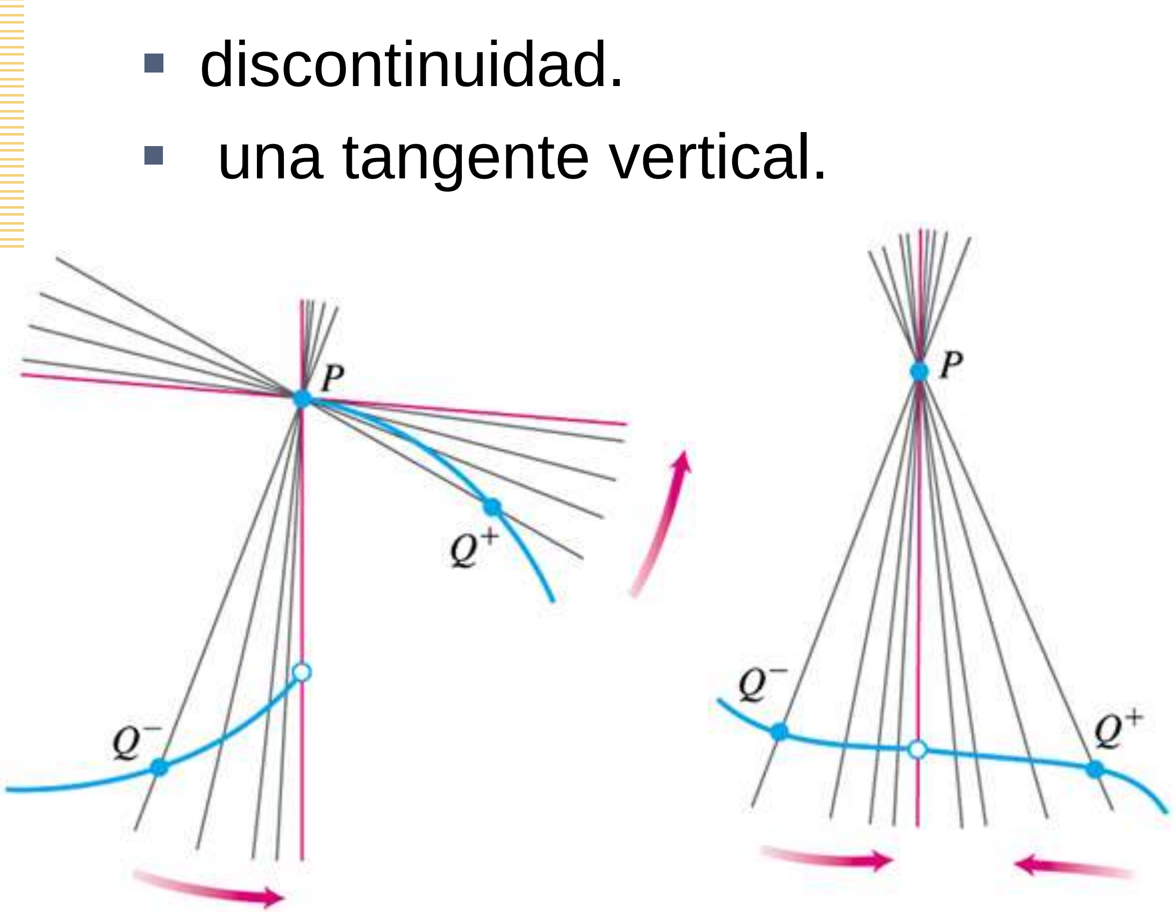
$$= \lim_{h \to 0} \frac{(x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3) - (x)^3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3}{h} \quad = \lim_{h \to 0} 3x^2 + 3xh + h^2 \quad = 3x^2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

¿Cuándo deja una función ser diferenciable?

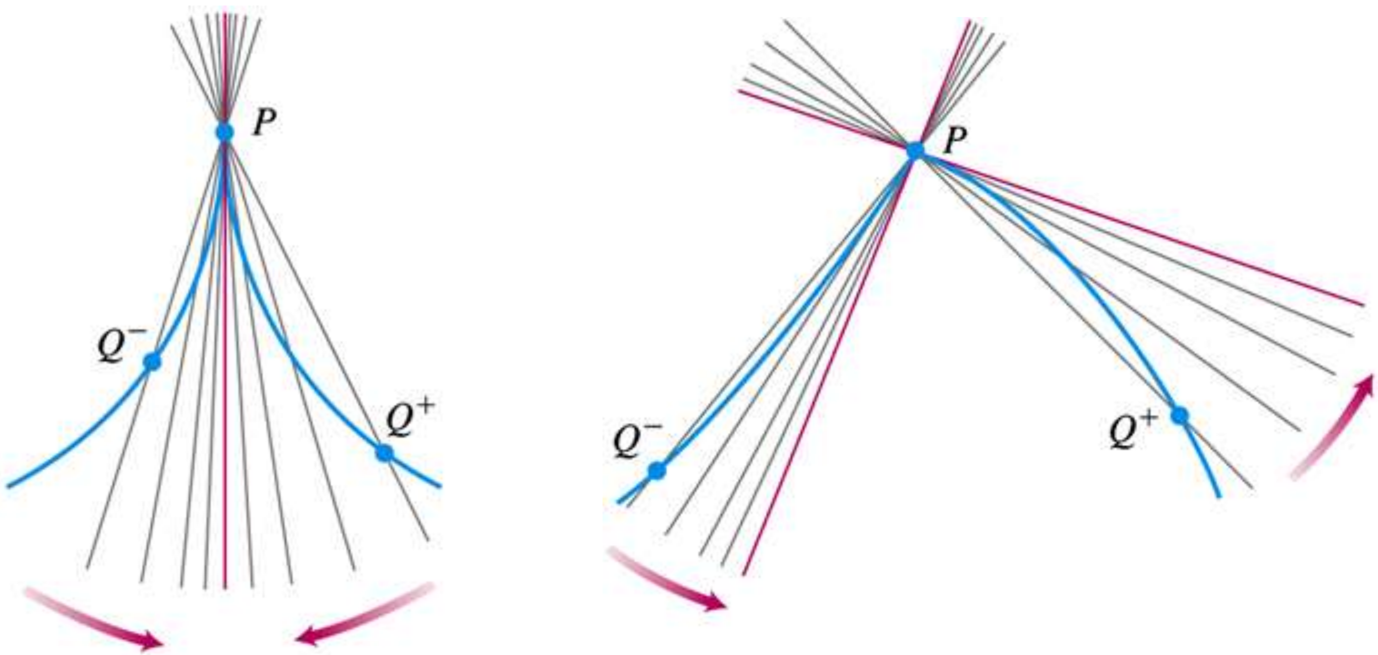
- Gráfica tiene:
  - discontinuidad.
  - una tangente vertical.



Observe: Función es continua en P. Pero no es diferenciable en P

¿Cuándo deja una función ser diferenciable?

- Gráfica termine en una esquina o pico.



Reglas de diferenciación (1)

- Si $f(x) = número$, entonces $f'(x) = 0$
- Ejemplos:

Si $f(x) = 5$, entonces $f'(x) = 0$

Si $f(x) = \pi$, entonces $f'(x) = 0$

- Si $f(x) = x^n$, entonces $f'(x) = nx^{n-1}$ para cualquier número real n diferente de 0.
- Ejemplos

Si $f(x) = x^8$, entonces $f'(x) = 8x^7$

Si $f(x) = x^{-3}$, entonces $f'(x) = -3x^{-4}$

Reglas de diferenciación (2)

- Si $f(x) = número \cdot g(x)$ entonces $f'(x) = número \cdot g'(x)$
- Ejemplo:

Si $f(x) = 3x^6$, entonces

$$f'(x) = 3 \cdot 6x^5$$
$$= 18x^5$$

Si $f(x) = 6x^{-2}$, entonces

$$f'(x) = 6 \cdot -2x^{-2-1}$$
$$= -12x^{-3}$$
$$= \frac{-12}{x^3}$$

Ejemplo 5

Determine $f'(x)$ si

$$f(x) = \frac{5}{x^2}$$

$$f(x) = 5x^{-2}$$

$$f'(x) = 5(-2)x^{(-2)-1}$$

$$= -10x^{-3}$$

$$= \frac{-10}{x^3}$$

$$f(x) = 3\sqrt{x}$$

$$f(x) = 3x^{1/2}$$

$$f'(x) = 3(\tfrac{1}{2})x^{(\frac{1}{2})-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{3}{2x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{3x^{\frac{1}{2}}}{2x} = \frac{3\sqrt{x}}{2x}$$

Ejercicios #1

Determine la función derivada:

1. $F(x) = x^4$

$$F'(x) = 4x^3$$

2. $F(x) = \sqrt{5}$

$$F'(x) = 0$$

3. $F(x) = 9x$

$$F'(x) = 9$$

4. $F(x) = -4x^3$

$$F'(x) = -12x^2$$

5. $F(x) = -4x^{-2}$

$$F'(x) = \frac{8}{x^3}$$

6. $F(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$

$$F'(x) = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1}$$

$$= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$$

$$= \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{3x}$$

Ejemplo 6

- Problema: Si $f(x) = 5x^3$ calcule la derivada de la función en $x = 2$.
- Solución:
  - Paso 1 – calcule la función derivada $f'(x)$

$$f'(x) = 5 \cdot 3x^{3-1} = 15x^2$$

  - Paso 2 – Evalúe la función derivada en $x = 2$

$$f'(2) = 15(2)^2 = 60$$

- Otras maneras de presentar el mismo problema:
  - Calcule la pendiente de la recta tangente cuando $x = 2$
  - Calcula la razón de cambio instantáneo cuando $x = 2$

Reglas de diferenciación: Adición y Sustracción

- Si $f(x) = u(x) + v(x)$ entonces:

$$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- Si $f(x) = u(x) - v(x)$ entonces:

$$f'(x) = u'(x) - v'(x)$$

Ejemplo 7

- Encuentre la función derivada de: $f(x) = 8x^3 - 5\sqrt[3]{x} + \dfrac{3}{x}$
- Solución:

$$f(x) = 8x^3 - 5x^{\frac{1}{3}} + 3x^{-1}$$

$$f'(x) = 8(3)x^{3-1} - 5\left(\frac{1}{3}\right)x^{\frac{1}{3}-1} + 3(-1)x^{-1-1}$$

$$= 24x^2 - \frac{5}{3}x^{-\frac{2}{3}} - 3x^{-2}$$

$$= 24x^2 - \frac{5\sqrt[3]{x}}{3x} - \frac{3}{x^2}$$

- Encuentre la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = 1$

$$f'(1) = 24(1)^2 - \frac{5\sqrt[3]{(1)}}{3(1)} - \frac{3}{(1)^2} = \frac{58}{3}$$

Nomenclatura

- Primera derivada ("funcíon derivada"):

$$f'(x) \qquad y' \qquad \frac{dy}{dx} \qquad \frac{df}{dx} \qquad D_x[f]$$

- La primera derivada en $x = 5$

$$f'(5) \qquad y'\Big|_{x=5} \qquad \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=5} \qquad \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=5} \qquad D_{x=5}[f]$$

- Segunda derivada

$$f''(x) \qquad y'' \qquad \frac{d^2y}{dx^2} \qquad \frac{d^2f}{dx^2} \qquad D_{x^2}[f]$$

Ejercicio #2

Determine: $a)\ \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ $\qquad b)\ \dfrac{d}{dx}\left(\sqrt[5]{x}\right)$

a)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1}=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-\sqrt{x}}{2x^{2}}$$

b)

$$\frac{d}{dx}\left(x^{\frac{1}{5}}\right)=\frac{1}{5}x^{\frac{1}{5}-1}=\frac{1}{5}x^{\frac{-4}{5}}=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}=\frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}\cdot\frac{x^{\frac{1}{5}}}{x^{\frac{1}{5}}}=\frac{\sqrt[5]{x}}{5x}$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\sin\ x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin\ x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan\ x) = \sec^2\ x$$

Ejemplo 8

1. Calcule:

$$\frac{d}{dx}(\sin x - \cos\ x + \tan x) = \frac{d}{dx}(\sin\ x) - \frac{d}{dx}(\cos\ x) + \frac{d}{dx}(\tan\ x)$$

$$= \cos x - \ (-\sin\ x) + \ (\sec^2 x)$$

$$= \cos x + \sin x + \sec^2 x$$

2. Calcule:

$$\left.\frac{dy}{dx}(sinx - cosx + tanx)\right]_{x=\pi} = \cos(\pi) + \sin(\pi) + sec^2(\pi)$$

$$= -1 \quad + \quad 0 \quad + \quad \frac{1}{cos^2\pi}$$

$$= -1 \quad + \ 0 \quad + \quad 1$$

$$= 0$$

¿Cómo se podrá describer la recta tangente por el punto $(\pi, f(\pi))$?

Recuerde: Si la derivada de una función en un valor x es igual 0, entonces la recta tangente por el punto $(x, f(x))$ será una recta horizontal.



Ejercicio #3

Aproxime a cuatro lugares decimales:

$$\frac{dy}{dx}(x^2 - \tan x)\bigg]_{x=2} = 2x - \; sec^2\, x]_{x=2}$$

$$= 2(2) - sec^2(2)$$

$$= 4 - \frac{1}{cos^2(2)}$$

$$= 4 - \frac{1}{[\cos(2)]^2}$$

$$\approx 4 - 5.774399204$$

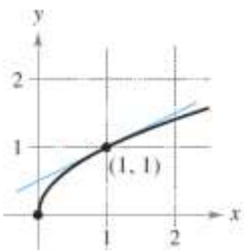
$$\approx -1.774399204$$

$$\approx -1.7744$$

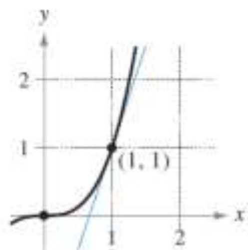
Ejercicios del Libro

En los ejercicios 1 y 2, utilizar la gráfica para estimar la pendiente de la recta tangente a $y = x^n$ en el punto $(1, 1)$. Verificar la respuesta de manera analítica.

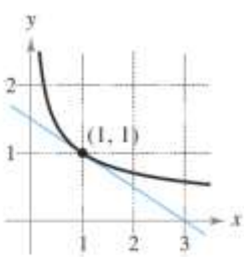
1. *a)* $y = x^{1/2}$



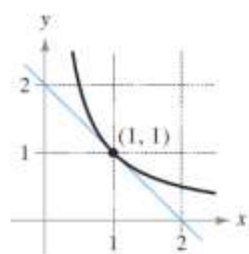
b) $y = x^3$



2. *a)* $y = x^{-1/2}$



b) $y = x^{-1}$



En los ejercicios 3 a 24, usar las reglas de derivabilidad para calcular la derivada de la función.

3. $y = 12$

4. $f(x) = -9$

5. $y = x^7$

6. $y = x^{16}$

7. $y = \dfrac{1}{x^5}$

8. $y = \dfrac{1}{x^8}$

9. $f(x) = \sqrt[5]{x}$

10. $g(x) = \sqrt[4]{x}$

11. $f(x) = x + 11$

12. $g(x) = 3x - 1$

13. $f(t) = -2t^2 + 3t - 6$

14. $y = t^2 + 2t - 3$

15. $g(x) = x^2 + 4x^3$

16. $y = 8 - x^3$

17. $s(t) = t^3 + 5t^2 - 3t + 8$

18. $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x$

19. $y = \dfrac{\pi}{2} \operatorname{sen} \theta - \cos \theta$

20. $g(t) = \pi \cos t$

21. $y = x^2 - \frac{1}{2} \cos x$

22. $y = 7 + \operatorname{sen} x$

23. $y = \dfrac{1}{x} - 3 \operatorname{sen} x$

24. $y = \dfrac{5}{(2x)^3} + 2 \cos x$

Ejercicios del Libro 2

	Función original	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
28.	$y = \dfrac{\pi}{(3x)^2}$			
29.	$y = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$			
30.	$y = \dfrac{4}{x^{-3}}$			

En los ejercicios 31 a 38, encontrar la pendiente de la gráfica de la función en el punto indicado. Utilizar la función *derivative* de una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
31.	$f(x) = \dfrac{8}{x^2}$	$(2, 2)$
32.	$f(t) = 3 - \dfrac{3}{5t}$	$\left(\frac{3}{5}, 2\right)$
33.	$f(x) = -\frac{1}{2} + \frac{7}{5}x^3$	$\left(0, -\frac{1}{2}\right)$
34.	$y = 3x^3 - 10$	$(2, 14)$
35.	$y = (4x + 1)^2$	$(0, 1)$
36.	$f(x) = 3(5 - x)^2$	$(5, 0)$
37.	$f(\theta) = 4 \operatorname{sen} \theta - \theta$	$(0, 0)$
38.	$g(t) = -2 \cos t + 5$	$(\pi, 7)$

En los ejercicios 39 a 54, encontrar la derivada de cada función.

39. $f(x) = x^2 + 5 - 3x^{-2}$

40. $f(x) = x^2 - 3x - 3x^{-2}$

41. $g(t) = t^2 - \dfrac{4}{t^3}$

42. $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$

43. $f(x) = \dfrac{4x^3 + 3x^2}{x}$

44. $f(x) = \dfrac{x^3 - 6}{x^2}$

45. $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2}$

46. $h(x) = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{x}$

47. $y = x(x^2 + 1)$

48. $y = 3x(6x - 5x^2)$

49. $f(x) = \sqrt{x} - 6\sqrt[3]{x}$

50. $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}$

51. $h(s) = s^{4/5} - s^{2/3}$

52. $f(t) = t^{2/3} - t^{1/3} + 4$

53. $f(x) = 6\sqrt{x} + 5 \cos x$

54. $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 3 \cos x$

En los ejercicios 55 a 58, *a*) encontrar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto indicado, *b*) utilizar una herramienta de graficación para representar la función y su recta tangente en el punto, y *c*) verificar los resultados empleando la función *derivative* de su herramienta de graficación.

	Función	*Punto*
55.	$y = x^4 - 3x^2 + 2$	$(1, 0)$
56.	$y = x^3 + x$	$(-1, -2)$
57.	$f(x) = \dfrac{2}{\sqrt[4]{x^3}}$	$(1, 2)$
58.	$y = (x^2 + 2x)(x + 1)$	$(1, 6)$