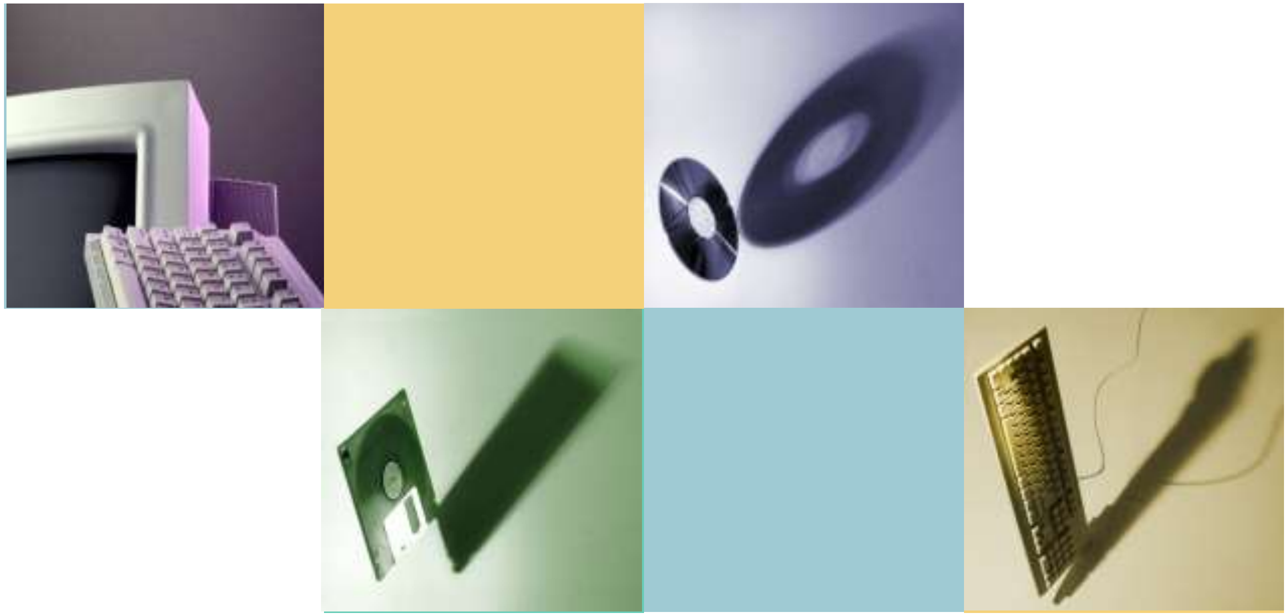
Las Reglas del Producto y el Cociente



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 2.1

- Referencia:
  - Sección 2.1 Reglas del producto, del cociente y derivadas de orden superior, Ver ejemplos 1 al 6ñ 8, 9, 10
  - Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 67
- Asignación 2.1: Problemas 28, 46; Use GRAPH para resolver problema 62. Incluya copia de la gráfica.
- Referencias del Web:
  - Khan Academy – Regla del Producto y Regla del Cociente
  - Tutorials for the Calculus Phobe – Product Rule , Quotient Rule
  - Visual Calculus: Product Rule Tutorial. Luego, practique en Drill; Quotient Rule Tutorial. Luego, practique en Drill. Para derivada de funciones trigonométricas vea Tutorial y practique con drill 1 y drill 2.
  - E-MathLab.com: Ejercicios de prática interactivos. Diferenciación básica, Regla del Producto, Regla del Cociente.

Regla del Producto

Si $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ entonces,

$$f'(x) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

Otra manera de recorder esta formula:

$$(uv)' = uv' + vu'$$

Ejemplo 1

- Calcule: $\dfrac{d}{dx}(\sin x \cdot \cos x)$

- Solución: $(uv)' = uv' + vu'$

$$\frac{d}{dx}(\sin x \cdot \cos x) = \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \sin x \cdot - \sin x + \cos x \cdot \cos x$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x \quad ó \quad \cos^2 x - \sin^2 x$$

Ejemplo 2

- Calcule: $$\frac{d}{dx}[(x^2-2x)\tan x]$$

- Solución:

$$\frac{d}{dx}[(x^2-2x)\tan x] = (x^2-2x)\frac{d}{dx}(\tan x)+\tan x\frac{d}{dx}(x^2-2x)$$

$$=(x^2-2x)\sec^2 \mathrm{x}+(2x-2)\tan x$$

Ejemplo 3

Calcule: $$\frac{d}{dx}\left[(\sqrt{x}+3)(x^2-5x)\right]=\frac{d}{dx}\left[(x^{\frac{1}{2}}+3)(x^2-5x)\right]$$

$$(uv)'=uv'+vu'$$

$$\frac{d}{dx}(uv)=(x^{\frac{1}{2}}+3)(2x-5)+(x^2-5x)(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})$$

$$=(2x^{\frac{3}{2}}-5x^{\frac{1}{2}}+6x-15)+(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{5}{2}x^{\frac{1}{2}})$$

$$=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}-\frac{15}{2}x^{\frac{1}{2}}+6x-15=\frac{5}{2}x\sqrt{x}-\frac{15}{2}\sqrt{x}+6x-15$$

Ejercicios #1

- Calcule las siguientes derivadas:

1. $$\frac{d}{dx}[(2x^3-5)\tan x] = (2x^3-5)\frac{d}{dx}\tan x + \tan x\frac{d}{dx}(2x^3-5)$$
$$= (2x^3-5)\cdot\sec^2 x + \tan x\cdot(6x^2)$$
$$= (2x^3-5)\sec^2 x + 6x^2\tan x$$

2. $$\frac{d}{dx}[\cos^2 x] = \cos x\frac{d}{dx}[\cos x] + \cos x\frac{d}{dx}[\cos x]$$
$$= \cos x(-\sin x) + \cos x(-\sin x)$$
$$= -2\cos x\sin x$$

Ejemplo 4

- Si $u(1) = 2$, $u'(1) = -7$, $v(1) = 7$, $v'(1) = 2$,

  calcule $\frac{d}{dx}(uv)|_{x=1}$

- Solución:

$$(uv)'\Big|_{x=1} = u(1)v'(1) + v(1)u'(1)$$

$$= (2)(2) + 7(-7) = -45$$

Regla del Cociente

Si $f(x) = \dfrac{u(x)}{v(x)}$ entonces,

$$f'(x) = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{\left[v(x)\right]^2}$$

Otra manera de recorder esta formula:

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Ejemplo 5

Ejemplo: Calcule la derivada de: $f(x) = \dfrac{3x-1}{5x+3}$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x+3)\frac{d}{dx}(3x-1) - (3x-1)(\frac{d}{dx}5x+3)}{(5x+3)^2}$$

$$= \frac{(5x+3)(3) - (3x-1)(5)}{(5x+3)^2}$$

$$= \frac{15x+9-15x+5}{(5x+3)^2}$$

$$= \frac{14}{(5x+3)^2}$$

Ejercicio #2

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$$

Calcule:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x-1}{4x+3}\right] = \frac{(4x+3)(2)-(2x-1)(4)}{(4x+3)^2}$$

$$= \frac{8x+6-8x+4}{(4x+3)^2}$$

$$= \frac{10}{(4x+3)^2}$$

Cálculo 1 - MATE 3031

Identidades trigonométricas básicas

Identidades del cociente

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

Identidades recíprocas

$$\csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades Pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Identidades del ángulo doble

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Ejemplo 6

- Calcule: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\cos x}{\sin x}\right]$

- Solución:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]=\frac{\sin x\dfrac{d}{dx}(\cos x)-\cos x\dfrac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

Tabla de Identidades trigonométricas

Ejercicios #3

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva de:

$y = x\cos x$ en el punto $(\pi, -\pi)$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x\cos x) = x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= -x\sin x + \cos x$$

$$pendiente = \frac{d}{dx}(x\cos x)\Big|_{x=\pi} = -\pi\sin\pi + \cos\pi \;\; = -\pi(0) + -1 = -1$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - (-\pi) = -1(x - \pi)$$

$$y + \pi = -1x + \pi$$

$$y = -x$$

Derivadas de las recíprocas de las funciones Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Ejemplo 7

- Calcule $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\tan x - 1}{\sec x}\right]$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - 1}{\dfrac{1}{\cos x}}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sin x - cox\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\sin x - \frac{d}{dx}\cos x \qquad = \cos x + \sin x$$

Ejercicios #4

- Calcule :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{e^x}\right]$$

$$= \frac{e^x \cdot -\sin x - \cos x \cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-e^x(\sin x + \cos x)}{(e^x)^2}$$

$$= \frac{-(\sin x + \cos x)}{e^x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{3(1-\sin t)}{2\cos t}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1-\sin t}{\cos t}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\cos t} - \frac{\sin t}{\cos t}\right]$$

$$= \frac{3}{2}\frac{d}{dt}[\sec t - \tan t]$$

$$= \frac{3}{2}[\sec t \cdot tan\ t - sec^2\ t]$$

$$= \frac{3}{2}\sec t\,[\tan t - \sec t]$$

Ejercicios del Texto

En los ejercicios 1 a 6, utilizar la regla del producto para derivar la función.

1. $g(x) = (x^2 + 3)(x^2 - 4x)$
2. $f(x) = (6x + 5)(x^3 - 2)$
3. $h(t) = \sqrt{t}(1 - t^2)$
4. $g(s) = \sqrt{s}(s^2 + 8)$
5. $f(x) = x^3 \cos x$
6. $g(x) = \sqrt{x} \operatorname{sen} x$

En los ejercicios 7 a 12, utilizar la regla del cociente para derivar la función.

7. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$
8. $g(t) = \dfrac{t^2 + 4}{5t - 3}$
9. $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^3 + 1}$
10. $h(s) = \dfrac{s}{\sqrt{s} - 1}$
11. $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^2}$
12. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t^3}$

En los ejercicios 13 a 18, encontrar $f'(x)$ y $f'(c)$.

	Función	*Valor de c*
13.	$f(x) = (x^3 + 4x)(3x^2 + 2x - 5)$	$c = 0$
14.	$f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x^3 - 1)$	$c = 1$
15.	$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 3}$	$c = 1$
16.	$f(x) = \dfrac{x + 5}{x - 5}$	$c = 4$
17.	$f(x) = x \cos x$	$c = \dfrac{\pi}{4}$
18.	$f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$	$c = \dfrac{\pi}{6}$

En los ejercicios 19 a 24, completar la tabla sin usar la regla del cociente.

	Función	*Reescribir*	*Derivar*	*Simplificar*
19.	$y = \dfrac{x^2 + 3x}{7}$			
20.	$y = \dfrac{5x^2 - 3}{4}$			
21.	$y = \dfrac{6}{7x^2}$			
22.	$y = \dfrac{10}{3x^3}$			
23.	$y = \dfrac{4x^{3/2}}{x}$			
24.	$y = \dfrac{5x^2 - 8}{11}$			

En los ejercicios 25 a 38, encontrar la derivada de la función algebraica.

25. $f(x) = \dfrac{4 - 3x - x^2}{x^2 - 1}$
26. $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 3}{x^2 - 1}$

Ejercicios del Texto 2

29. $f(x) = \dfrac{3x-1}{\sqrt{x}}$

30. $f(x) = \sqrt[3]{x}(\sqrt{x}+3)$

31. $h(s) = (s^3-2)^2$

32. $h(x) = (x^2-1)^2$

33. $f(x) = \dfrac{2-\frac{1}{x}}{x-3}$

34. $g(x) = x^2\left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x+1}\right)$

35. $f(x) = (2x^3+5x)(x-3)(x+2)$

36. $f(x) = (x^3-x)(x^2+2)(x^2+x-1)$

37. $f(x) = \dfrac{x^2+c^2}{x^2-c^2}$, c es una constante

38. $f(x) = \dfrac{c^2-x^2}{c^2+x^2}$, c es una constante

En los ejercicios 39 a 54 encontrar la derivada de la función trigonométrica.

39. $f(t) = t^2 \operatorname{sen} t$

40. $f(\theta) = (\theta+1)\cos\theta$

41. $f(t) = \dfrac{\cos t}{t}$

42. $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x^3}$

43. $f(x) = -x + \tan x$

44. $y = x + \cot x$

45. $g(t) = \sqrt[4]{t} + 6\csc t$

46. $h(x) = \dfrac{1}{x} - 12\sec x$

47. $y = \dfrac{3(1-\operatorname{sen} x)}{2\cos x}$

48. $y = \dfrac{\sec x}{x}$

49. $y = -\csc x - \operatorname{sen} x$

50. $y = x\operatorname{sen} x + \cos x$

51. $f(x) = x^2\tan x$

52. $f(x) = \operatorname{sen} x\cos x$

53. $y = 2x\operatorname{sen} x + x^2\cos x$

54. $h(\theta) = 5\theta\sec\theta + \theta\tan\theta$

En los ejercicios 55 a 58, usar un programa de cálculo para derivar las funciones.

55. $g(x) = \left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)(2x-5)$

56. $f(x) = \left(\dfrac{x^2-x-3}{x^2+1}\right)(x^2+x+1)$

57. $g(\theta) = \dfrac{\theta}{1-\operatorname{sen}\theta}$

58. $f(\theta) = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{1-\cos\theta}$

En los ejercicios 59 a 62, evaluar la derivada de la función en el punto que se indica. Utilizar una herramienta de graficación para verificar su resultado.

	Función	*Punto*
59.	$y = \dfrac{1+\csc x}{1-\csc x}$	$\left(\dfrac{\pi}{6}, -3\right)$
60.	$f(x) = \tan x\cot x$	$(1, 1)$
61.	$h(t) = \dfrac{\sec t}{t}$	$\left(\pi, -\dfrac{1}{\pi}\right)$
62.	$f(x) = \operatorname{sen} x(\operatorname{sen} x + \cos x)$	$\left(\dfrac{\pi}{4}, 1\right)$