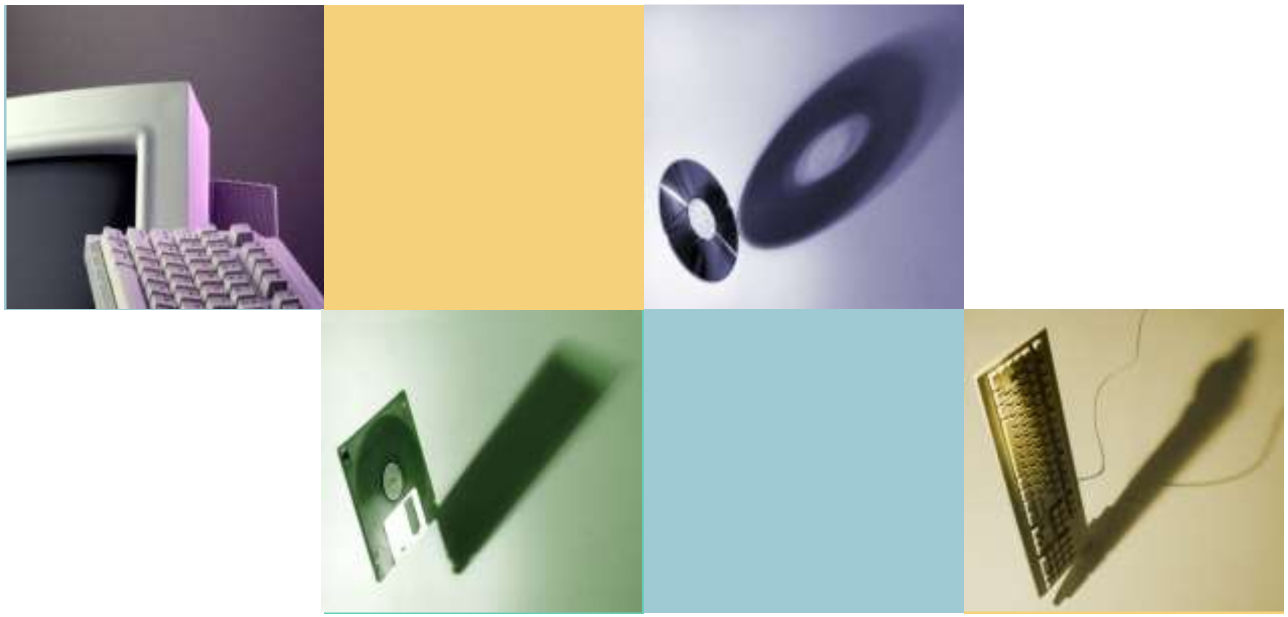
La Regla de la Cadena



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 2.2

- **Referencia:** Sección 2.4 La Regla de la Cadena, Ver ejemplos 1 al 13; Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 99;
- **Asignación 2.2**: Problemas: 20, 30, 48, 70 y use GRAPH para el problema 76.
- **Referencias del Web**:
  - Khan Academy – Introducción a la Regla de la Cadena; Hacer Ejercicios de Derivada de Triple Función.
  - Calculus Help.com – The Chain Rule
  - Visual Calculus: Tutorial on the Chain Rule. A LiveMath notebook illustrating the use of the chain rule. Drill problems for differentiation using the chain rule. Computer program that graphically illustrates the chain rule; Logarithmic Differentiation - Drill 1
  - Pauls' Online Notes – Logarithmic Differentiation

¿Puede hallar la primera derivada?

$$y = x^3 - 5$$

$$y = \sqrt{x^2 - 5}$$

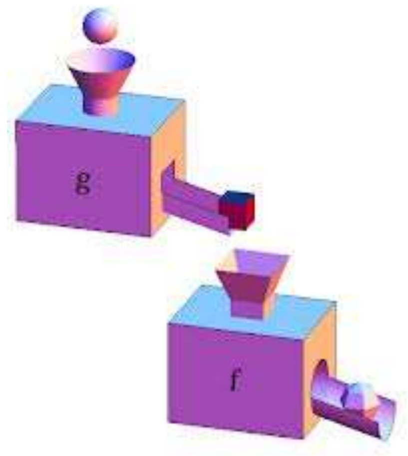
$$y = 2\cos x$$

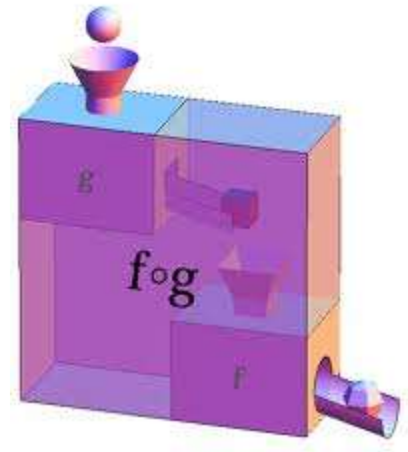
$$y = \cos 2x$$

$$y = 2e^x + 1$$

$$y = e^{2x} + 1$$

La Regla de la Cadena





$$f \circ g$$

$$(f \circ g)' = f'(g) \cdot g'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Ejemplo 1

- Calcule la derivada de $f(x)=\sqrt{x^2-5}$

$$u = x^2-5$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

$$f(x)=\left(x^2-5\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2-5\right)$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x$$

$$=(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}\cdot x$$

$$=x(x^2-5)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2-5}}\quad=\frac{x\sqrt{x^2-5}}{x^2-5}$$

Ejemplo 2

- Calcule la derivada

$$f(x) = \cos 2x$$

$$u = 2x$$

$$f'(x) = -\sin 2x \cdot \frac{d}{dx}(2x)$$

$$= -\sin 2x \cdot 2$$

$$= -2\sin 2x$$

Ejemplo 3

Calcule la derivada f ‘(1) a la milésima más cercana si $f(x) = \cos(\pi x^2 + 6)$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\cos(\pi x^2 + 6) = -\sin(\pi x^2 + 6)\frac{d}{dx}(\pi x^2 + 6)$$

$$= -\sin(\pi x^2 + 6) \cdot 2\pi x$$

$$= -2\pi x \sin(\pi x^2 + 6)$$

$$\mathrm{f}'(1) = -2\pi(1)\sin(\pi(1)^2 + 6)$$

$$= -2\pi \sin(\pi + 6)$$

$$\approx -1.755619353$$

$$\approx -1.756$$

Ejercicio #1

$$\frac{d}{dt}\sqrt[3]{1+\tan t} = \frac{d}{dt}(1+\tan t)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{1}{3}(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}} \frac{d}{dt}(1+\tan t)$$

$$= \frac{1}{3}(1+\tan t)^{-\frac{2}{3}} \sec^2 t$$

$$= \frac{\sec^2 t}{3(1+\tan t)^{\frac{2}{3}}} \cdot \frac{(1+\tan t)^{\frac{1}{3}}}{(1+\tan t)^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{\sec^2 t\,(1+\tan t)^{\frac{1}{3}}}{3(1+\tan t)} \quad ó \quad \frac{\sec^2 t\ \sqrt[3]{1+\tan t}}{3(1+\tan t)}$$

La Regla de la Potencia General

- Si n es cualquier número real, u = g(x) es derivable, entonces: $$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{d}{dx}u$$

- Ejemplos:

a) $$\frac{d}{dx}(2x^3-5)^4 = 4(2x^3-5)^3 \cdot 6x^2 = 24x^2(2x^3-5)^3$$

b) $$\frac{d}{dx}(-4x^2-8x)^5 = 5(-4x^2-8x)^4 . (-8x-8)$$
$$= 5(-4x^2-8x)^4 \cdot -8(x+1)$$
$$= -40(x+1)(-4x^2-8x)^4$$

Ejercicio #2

- Calcule:

1. $$\frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)^3 = 3(x^2 - x + 1)^2 \frac{d}{dx}(x^2 - x + 1)$$
$$= 3(x^2 - x + 1)^2 (2x - 1)$$

2. $$\frac{d}{dx}(-4x^3 - 2x)^5 = 5(-4x^3 - 2x)^4 \frac{d}{dx}(-4x^3 - 2x)$$
$$= 5(-4x^3 - 2x)^4 (-12x^2 - 2)$$
$$= 5(-4x^3 - 2x)^4 \cdot -2(6x^2 + 1)$$
$$= -10(-4x^3 - 2x)^4 (6x^2 + 1)$$

Ejemplo 4

- Calcule $$\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^5$$

Regla de la Cadena

- Solución: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^5 = 5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)$$

Regla del Cociente

$$= 5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4 \left(\frac{(2t+1)\frac{d}{dt}(t-1)-(t-1)\frac{d}{dt}(2t+1)}{(2t+1)^2}\right)$$

$$= 5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4 \left(\frac{(2t+1)-(t-1)2}{(2t+1)^2}\right) = 5\left(\frac{t-1}{2t+1}\right)^4 \left(\frac{3}{(2t+1)^2}\right) = \frac{15(t-1)^4}{(2t+1)^6}$$

Ejercicio #3

Regla de la Cadena

- Calcule

a) $$\frac{d}{dt}\left(e^{5-3x}\right) = e^{5-3x}\frac{d}{dx}(5-3x) = -3e^{5-3x}$$

Regla de la Cadena

Regla del Cociente

b) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{2x+4}{3x-1}\right]^3 = 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2\frac{d}{dt}\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)$$

$$= 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2\left(\frac{(3x-1)\frac{d}{dx}(2x+4)-(2x+4)\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}\right)$$

$$= 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2\left(\frac{2(3x-1)-3(2x+4)}{(3x-1)^2}\right) = 3\left(\frac{2x+4}{3x-1}\right)^2\left(\frac{-14}{(3x-1)^2}\right)$$

$$= \frac{-42(2x+4)^2}{(3x-1)^4}$$

Ejercicios del Texto

En los ejercicios 1 a 6, completar la tabla.

	$y = f(g(x))$	$u = g(x)$	$y = f(u)$
1.	$y = (5x - 8)^4$		
2.	$y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1}}$		
3.	$y = \sqrt{x^3 - 7}$		
4.	$y = 3\tan(\pi x^2)$		
5.	$y = \csc^3 x$		
6.	$y = \operatorname{sen}\dfrac{5x}{2}$		

En los ejercicios 7 a 36, encontrar la derivada de la función.

7. $y = (4x - 1)^3$

8. $y = 2(6 - x^2)^5$

9. $g(x) = 3(4 - 9x)^4$

10. $f(t) = (9t + 2)^{2/3}$

11. $f(t) = \sqrt{5 - t}$

12. $g(x) = \sqrt{9 - 4x}$

13. $y = \sqrt[3]{6x^2 + 1}$

14. $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 1}$

15. $y = 2\sqrt[4]{9 - x^2}$

16. $f(x) = -3\sqrt[4]{2 - 9x}$

17. $y = \dfrac{1}{x - 2}$

18. $s(t) = \dfrac{1}{t^2 + 3t - 1}$

19. $f(t) = \left(\dfrac{1}{t - 3}\right)^2$

20. $y = -\dfrac{5}{(t + 3)^3}$

21. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x + 2}}$

22. $g(t) = \sqrt{\dfrac{1}{t^2 - 2}}$

23. $f(x) = x^2(x - 2)^4$

24. $f(x) = x(3x - 9)^3$

25. $y = x\sqrt{1 - x^2}$

26. $y = \frac{1}{2}x^2\sqrt{16 - x^2}$

27. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

28. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^4 + 4}}$

En los ejercicios 45 a 66, encontrar la derivada de la función.

45. $y = \cos 4x$

46. $y = \operatorname{sen} \pi x$

47. $g(x) = 5\tan 3x$

48. $h(x) = \sec x^2$

49. $y = \operatorname{sen}(\pi x)^2$

50. $y = \cos(1 - 2x)^2$

51. $h(x) = \operatorname{sen} 2x \cos 2x$

52. $g(\theta) = \sec(\frac{1}{2}\theta)\tan(\frac{1}{2}\theta)$

53. $f(x) = \dfrac{\cot x}{\operatorname{sen} x}$

54. $g(v) = \dfrac{\cos v}{\csc v}$

55. $y = 4\sec^2 x$

56. $g(t) = 5\cos^2 \pi t$

57. $f(\theta) = \tan^2 5\theta$

58. $g(\theta) = \cos^2 8\theta$

59. $f(\theta) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 2\theta$

60. $h(t) = 2\cot^2(\pi t + 2)$

61. $f(t) = 3\sec^2(\pi t - 1)$

62. $y = 3x - 5\cos(\pi x)^2$

63. $y = \sqrt{x} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2x)^2$

64. $y = \operatorname{sen}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{\operatorname{sen} x}$

65. $y = \operatorname{sen}(\tan 2x)$

66. $y = \cos\sqrt{\operatorname{sen}(\tan \pi x)}$

En los ejercicios 67 a 74, evaluar la derivada de la función en el punto indicado. Utilizar una herramienta de graficación para verificar los resultados.

	Función	*Punto*
67.	$s(t) = \sqrt{t^2 + 6t - 2}$	$(3, 5)$
68.	$y = \sqrt[5]{3x^3 + 4x}$	$(2, 2)$
69.	$f(x) = \dfrac{5}{x^3 - 2}$	$\left(-2, -\dfrac{1}{2}\right)$
70.	$f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 3x)^2}$	$\left(4, \dfrac{1}{16}\right)$
71.	$f(t) = \dfrac{3t + 2}{t - 1}$	$(0, -2)$