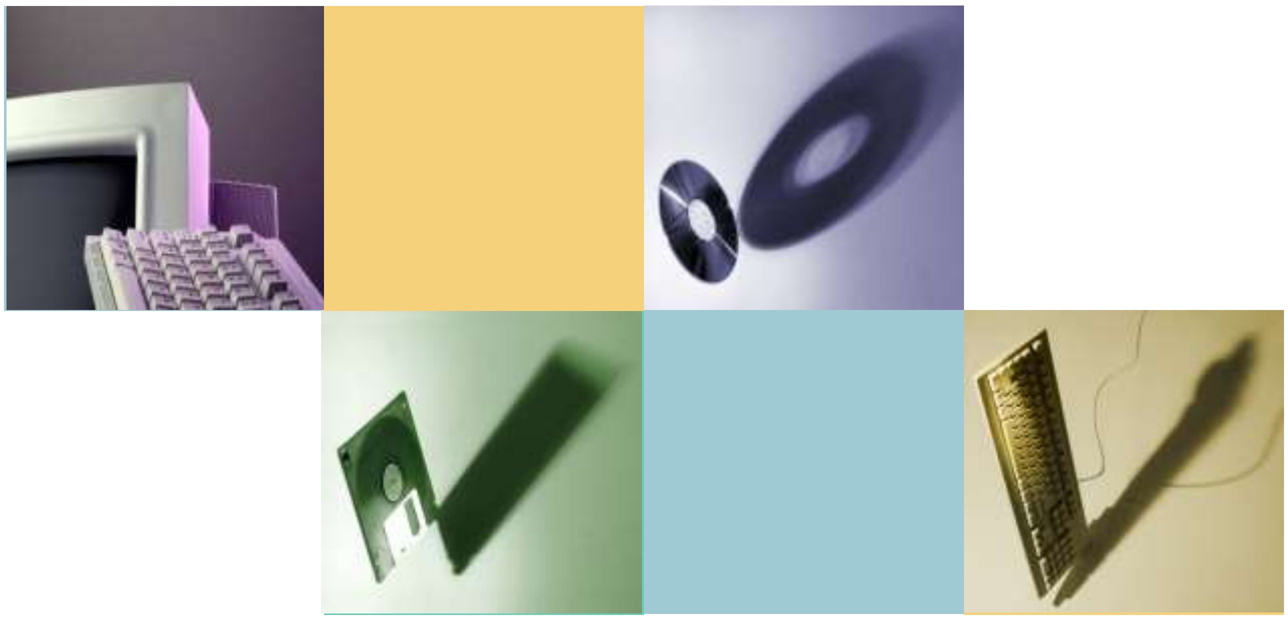
Las Derivadas de las Funciones Trigonométricas



MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 2.4

- Referencia:
  - Referencia: Sección 3.4 Derivada de las funciones trigonométricas, Ver ejemplos 1 al 4
  - Ejercicios de Práctica: Páginas 218 - 219: Impares 1 – 33
- Asignación 2.4: Páginas 218 - 219; 25, 33
- Referencias del Web:
  - Visual Calculus
- **Derivatives of the Trigonometric Functions**
  - Khan Academy – Derivadas de sen x, cos x, tan x, e^x y ln x
  - Tutorial on the calculation of the derivatives of the trigonometric functions.
  - Drill problems for differentiation using the product rule. (Emphasis on trigonometric functions).
  - Drill problems for differentiation using the quotient rule. (Emphasis on trigonometric functions).
- SOS Math -Table of Trigonometric Identities

Derivadas de las funciones Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

Ejemplo 1

- Calcule: $\dfrac{d}{dx}(\sin x \cdot \cos x)$

- Solución: $(uv)' = uv' + vu'$

$$\frac{d}{dx}(\sin x \cdot \cos x) = \sin x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(\sin x)$$

$$= \sin x \cdot -\sin x + \cos x \cdot \cos x$$

$$= -\sin^2 x + \cos^2 x \quad ó \quad \cos^2 x - \sin^2 x$$

Ejemplo 2

- Calcule: $\dfrac{d}{dx}[(x^2 - 2x)\tan x]$

- Solución:

$$\frac{d}{dx}[(x^2 - 2x)\tan x] = (x^2 - 2x)\frac{d}{dx}(\tan x) + \tan x\,\frac{d}{dx}(x^2 - 2x)$$

$$= (x^2 - 2x)\sec^2 x + (2x - 2)\tan x$$

Identidades trigonométricas básicas

Identidades del cociente $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

Identidades recíprocas $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

Identidades Pitagóricas

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad \tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$

$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Identidades del ángulo doble

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$

Ejemplo 3

- Calcule: $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\cos x}{\sin x}\right]$

- Solución:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{\sin x}\right]=\frac{\sin x\dfrac{d}{dx}(\cos x)-\cos x\dfrac{d}{dx}(\sin x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{\sin x(-\sin x)-\cos x(\cos x)}{\sin^2 x}$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=\frac{-(\sin^2 x+\cos^2 x)}{\sin^2 x}=\frac{-1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x$$

Tabla de Identidades trigonométricas

Ejercicios #1

- Calcule las siguientes derivadas:

1. $$\frac{d}{dx}[(2x^3-5)\tan x] = (2x^3-5)\frac{d}{dx}\tan x + \tan x\frac{d}{dx}(2x^3-5)$$
$$= (2x^3-5)\cdot\sec^2 x + \tan x\cdot(6x^2)$$
$$= (2x^3-5)\sec^2 x + 6x^2\tan x$$

2. $$\frac{d}{dx}[\cos^2 x] = \cos x\frac{d}{dx}[\cos x] + \cos x\frac{d}{dx}[\cos x]$$
$$= \cos x(-\sin x) + \cos x(-\sin x)$$
$$= -2\cos x\sin x$$

Ejercicios #2

Halle la ecuación de la recta tangente a la curva de:

$y = x\cos x$ en el punto $(\pi, -\pi)$

Solución:

$$\frac{d}{dx}(x\cos x) = x\frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x\frac{d}{dx}(x)$$

$$= -x\sin x + \cos x$$

$$pendiente = \left.\frac{d}{dx}(x\cos x)\right|_{x=\pi} = -\pi\sin\pi + \cos\pi \;\; = -\pi(0) + -1 = -1$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y - (-\pi) = -1(x - \pi)$$

$$y + \pi = -1x + \pi$$

$$y = -x$$

Derivadas de las recíprocas de las funciones Trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

Ejemplo 4

- Calcule $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{\tan x - 1}{\sec x}\right]$

$$= \frac{d}{dx}\left[\frac{\dfrac{\sin x}{\cos x} - 1}{\dfrac{1}{\cos x}}\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\sin x - cox\right]$$

$$= \frac{d}{dx}\sin x - \frac{d}{dx}\cos x \qquad = \cos x + \sin x$$

Ejercicios #3

- Calcule :

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\cos x}{e^x}\right]$$

$$=\frac{e^x\cdot -\sin x-\cos x\cdot e^x}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{-e^x(\sin x+\cos x)}{(e^x)^2}$$

$$=\frac{-(\sin x+\cos x)}{e^x}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{3(1-\sin t)}{2\cos t}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1-\sin t}{\cos t}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\cos t}-\frac{\sin t}{\cos t}\right]$$

$$=\frac{3}{2}\frac{d}{dt}[\sec t-\tan t]$$

$$=\frac{3}{2}[\sec t\cdot tan\ t-sec^2\ t]$$

$$=\frac{3}{2}\sec t\,[\tan t-\sec t]$$

Derivadas de la funciones trigonométricas inversas

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo 5

$$\frac{d}{dx}(x\cos^{-1}x) = x\cdot\frac{d}{dx}(\cos^{-1}x)+\cos^{-1}x\cdot\frac{d}{dx}(x)$$

$$= x\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}+\cos^{-1}x$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}+\cos^{-1}x$$

Derivadas de funciones trigonométricas

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$$

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos^{-1} x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejemplo 6

- Una masa en un resorte vibra horizontalmente sobre una superficie lisa y nivelada en un movimiento armónico simple (vea figura). Su ecuación de movimiento es

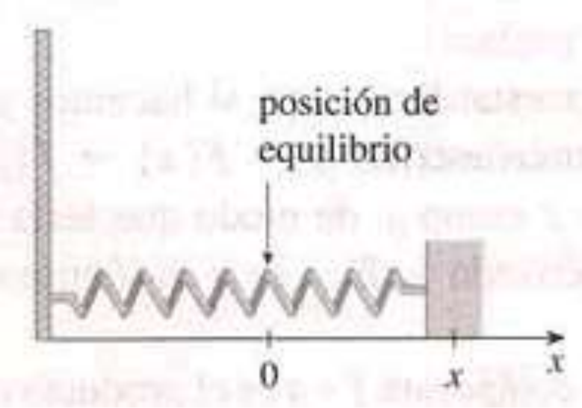
$$x(t) = 8 \sin t$$

- donde t está en segundos y s en cm. Encuentre:

a) La función que exprese su velocidad y la acelaración en el instante t.

b) La velocidad y la acelaración cuando $t = 2\pi/3$.

c) Cuando $t = 2\pi/3$, ¿en qué dirección se desplaza la masa? ¿está acelerando o decelerando?



Solución del Ejemplo 6

- Cuando la ecuación de movimiento (posición) es $x(t) = 8 \sin t$
- Velocidad en t $x'(t) = 8\cos t$
- Aceleración en t $x''(t) = -8\sin t$
- Cuando $t = \dfrac{2\pi}{3}$

$$x'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 8\cos\frac{2\pi}{3} = 8\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$$

- Como $x'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ es negativa se desplaza hacia la izquierda.

$$x''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -8\sin\frac{2\pi}{3} = -8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -4\sqrt{3}$$

- Como $x''\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ es negativa, está decelerando