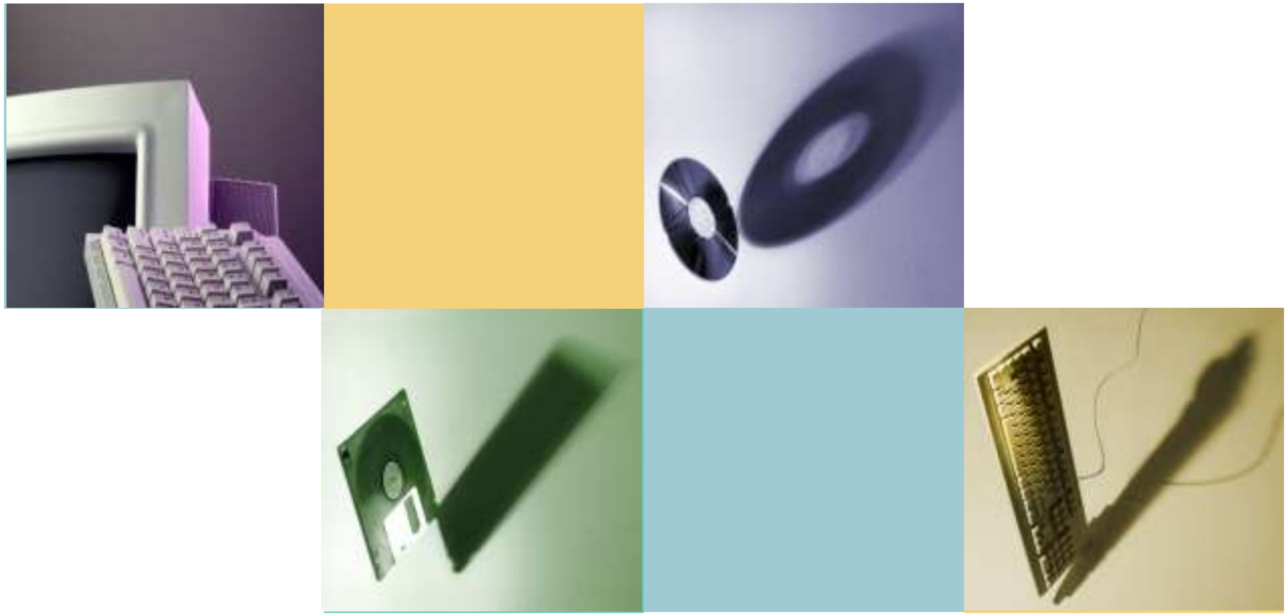
Razones de Cambio Relacionadas



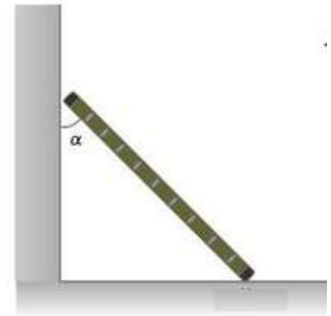
MATE 3031 – Cálculo 1

Actividades 2.4

- Referencia: Sección 2.6 Razones de cambio relacionados, Ver ejemplos 1 al 5
- Ejercicios de Práctica: Sección: Impares 1 – 17
- Asignación 2.4: Sección 2.6: 6 y 14
- Referencias del Web:
  - KhanAcademy (Video) – Razon de Cambio Relacionadas.
  - Problemas de Razones de Cambio – Esfera que expande; Envase con forma de un cono invertido; globo esférico;
  - Problemas de Razones de cambio relacionadas.
  - Pauls' Online Notes – Related Rates

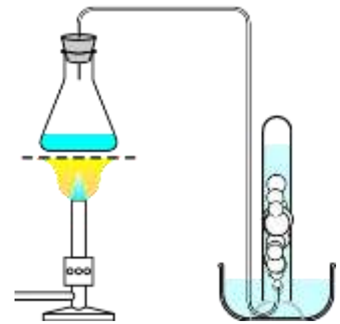
¿Qué "representa" la derivada de P con respecto a V?

- Si h representa la altura del tope de una escalera que se desliza por una pared y $\propto$ el ángulo que forma contra la pared mientras que cae



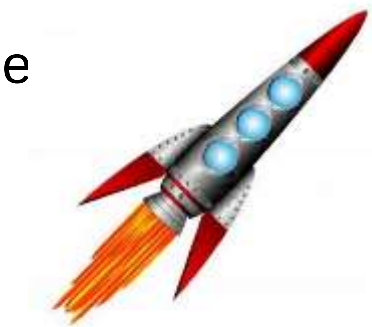
¿Qué representa $\frac{dh}{d\propto}$? ¿Qué signo tendrá $\frac{dh}{d\propto}$?

- Se calienta una solución y se mide la cantidad de oxígeno $\boldsymbol{O_2}$ que se produce y se registra el tiempo $\boldsymbol{t}$,



¿Qué representa $\frac{dO_2}{dt}$ ¿Qué signo tendrá $\frac{dO_2}{dt}$?

- Si $\boldsymbol{h}$ representa la altura que alcanza un cohete y $\boldsymbol{w}$ e peso del combustible mientras que t representa el tiempo que transcurre desde su lanzamiento,



¿Qué representa $\frac{dh}{dt}$?, ¿Qué signo tendrá?

¿Qué representa $\frac{dw}{dt}$? ¿Qué signo tendrá?



Razones de cambio

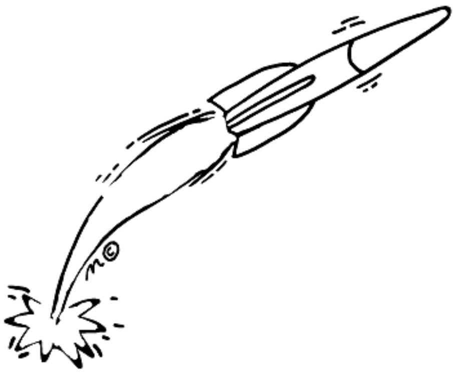
- Razones de cambio de una variable y el tiempo se conocen como **rapidez de cambio** de la variable.
- Ejemplos:
  - **distancia** y el **tiempo** (velocidad)
  - **costo** en la producción de un objeto y el **tiempo**.
  - **volumen** de un globo mientras se infla y el **tiempo**.
  - **presión** de un gas comprimido mientras se calienta y el **tiempo**.
- Si Q es una cantidad que cambia con respecto al tiempo. Entonces, la **derivada de Q con respecto a t** expresa cuán rápido cambia (crece o decrece) Q.

$$\text{Rapidez de cambio de Q} = \frac{dQ}{dt}$$

Pregunta: ¿Puede ser la rapidez de cambio constante?

Ejemplo 1

- Suponga que la ecuación representa el peso W in Kg. del combustible de un tanque de un cohete después que ha pasado t segundos de lanzamiento. Determine una ecuación que exprese cuán rápido cambia el peso del combustible.



$$W = \frac{1}{t} - \frac{4}{t^2}$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t} - \frac{4}{t^2}\right]$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{-1}{t^2} + \frac{8}{t^3}$$

Ejemplo 1 …

- ¿Cómo estaba cambiando el peso del combustible al transcurrir 10 segundos?

¿Cuál es la ***razón de cambio instantáneo en el peso del combustible con respecto al tiempo*** cuando t = 10 segundos?

⟺

¿Cuál es $\frac{dW}{dt}$ cuando t = 10 segundos?

$$\left.\frac{d}{dt}W\right|_{t=10} = \frac{-1}{10^2} + \frac{8}{10^3}$$

$$\left.\frac{d}{dt}W\right|_{t=10} = -0.002 \ \frac{kg}{s}$$

El peso del combustible estaba **disminuyendo** a razón de 0.002 **kilogramos por segundo** (2 gramos por segundo).

Razones de cambio relacionadas

- Dos o más variables relacionadas que … cambian con respecto al tiempo.
- Ejemplos,
  - Cuando el cohete se lanza, la **razón de cambio de la altura** que se encuentra y **razón de cambio del peso** de su combustible
  - Cuando se bombea el aire hacia el interior de un globo, tanto la **razón de cambio del volumen** y **razón de cambio de su radio**.
  - Cuando una fábrica produce un objeto, la **razón de cambio en el costo de producción** y la **razón de cambio en la ganancia**.

Ejemplo 2

Suponga que el *radio* $\boldsymbol{r}$ y la *circunferencia* $\mathbf{C}$ de un círculo cambian con respecto al tiempo $\boldsymbol{t}$. Escriba una ecuación que exprese la relación entre la rapidez de cambio de $\mathbf{C}$ y $\boldsymbol{r}$.

Solución:

Paso 1 - Identifique una ecuación que relacione la circunferencia C y el radio r de un círculo.

$$C = 2\pi r$$

Paso 2 - Diferencie implícitamente con respecto a t.

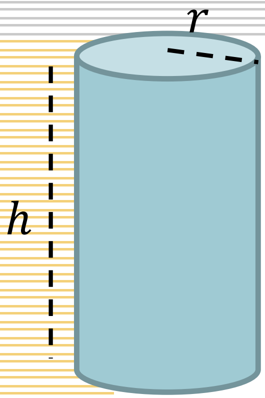
Rapidez de cambio de C

Rapidez de cambio de r

$$\frac{dC}{dt} = 2\pi \frac{dr}{dt}$$

Observe que la rapidez de cambio de la circunferencia depende en la rapidez de cambio del radio.

Ejemplo 2



Suponga que el volumen y radio de un objeto cilíndrico de altura de 3 metros, cambian con respecto al tiempo. Si la rapidez de cambio de su radio ***r*** es 2 metros por segundo. ¿cuánto sería la rapidez de cambio de su volumen V cuando el radio mide 1 metro?

Solución:

$$V = \pi r^2 h$$

$$V = 3\pi r^2$$

Rapidez de cambio de V

$$\frac{dV}{dt} = 6\pi r \frac{dr}{dt}$$

Rapidez de cambio de r

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=1} = 6\pi\ (1)(2) = 12\pi\ \frac{m^3}{s}$$

$$\approx 37.7\frac{m^3}{s}$$

El volumen cambiará a una rapidez exacta de $12\pi\frac{m^3}{s}$

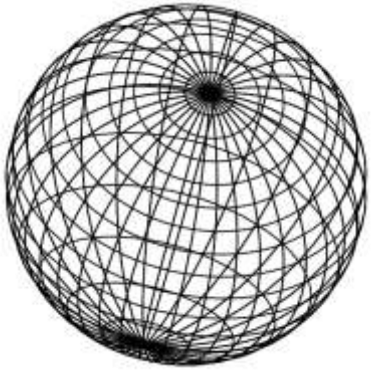
*Pregunta: Si la rapidez de cambio de su radio **r** fuera constante, ¿sería constante la rapidez de cambio del volumen V? ¿Por qué?*

Ejemplo 3

- Suponga que el radio ***r*** y el volumen ***V*** el de una esfera son funciones diferenciables de ***t***. Escriba la ecuación que relaciona la razón de cambio del volumen y la razón de cambio del radio. Luego, determine la razón de cambio del volumen cuando el radio mide 3 cm y está cambiando a una razón de 1.1 cm/s.
- Solución:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{4}{3}\pi \cdot 3r^2 \frac{dr}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$



- Si se desea la razón de cambio del volumen cuando el radio mide 3 cm y está cambiando a una razón de 1.1 cm/s

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{r=3} = 4\pi 3^2(1.1) = 39.6\pi \ \frac{cm^3}{s}$$

Problemas de Razones de Cambio relacionadas

- Se tienen dos o más variables que van cambiando con respecto al tiempo, se desea de determinar la razón de cambio de una a base de la información de las otras.
- Pasos para resolver:

1. Identifique las variables que cambian con el tiempo.
2. Identifique las razones de cambio se conocen y cuál es la razón de cambio que se desea determinar.
3. Determine una ecuación que relacione las variables.
4. Diferencie implícitamente la ecuación con respecto a t.
5. Sustituya en la ecuación anterior todos los valores conocidos de las variables y sus razones de cambio con el fin de despejar por la razón de cambio que se deseada.
6. Responda a la pregunta planteada usando las unidades de medidas correspondientes.

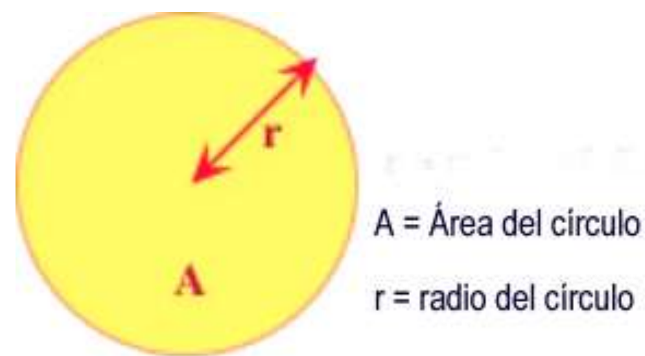
Ejemplo 4

- Suponga que se deja caer un objeto en un lago y el área del círculo que se forma cambia a una razón de 12 cm^2/s. ¿Cuán rápido el radio estaba cambiando cuando éste medía 10 cm.?
- Solución:

Paso 1 – Identifique las variables

Área (A) y radio (r) del círculo

Paso 2 - Identifique las razones de cambio se conocen y la que se desea determinar.



$$\frac{dA}{dt} = 12\,\text{cm}^2 / s \qquad \left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=10\,cm}$$

Solución del Ejemplo 4

- Paso 3 – Determine una ecuación que las relaciona.

$$A = \pi r^2$$

- Paso 4 - Diferencie implícitamente con respecto a t:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt}(\pi r^2)$$

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt}$$

Solución del Ejemplo 4 …

- Paso 5 – Despeje por la razón de cambio deseada y sustituya los valores conocidos.

$$\frac{dA}{dt} = 2\pi r \frac{dr}{dt} \qquad r = 10 \text{ cm} \quad \frac{dA}{dt} = 12 \text{ cm}^2 / s$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2\pi r} \frac{dA}{dt}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=10} = \frac{1}{2\pi(10)} \cdot (12) = \frac{3}{5\pi} \frac{cm}{s}$$

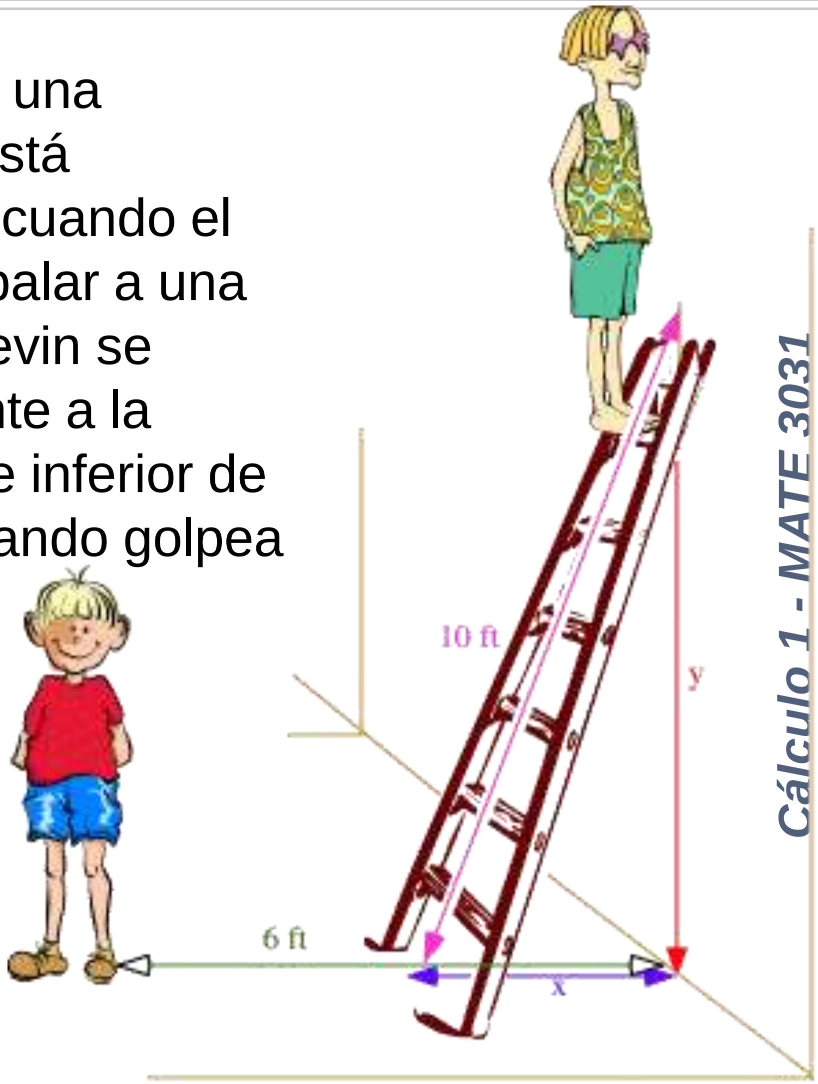
- Paso 6 – Responda a la pregunta del problema.

El radio crece a una razón de $\frac{3}{5\pi} \frac{cm}{s}$



Ejemplo 5

- Carlos está en la parte superior de una escalera de 10 pies de largo que está apoyada contra una pared vertical cuando el tope de la escalera empieza a resbalar a una razón de 4 pies por segundo. Si Kevin se encuentra a 6 pies de la pared frente a la escalera, ¿con qué rapidez la parte inferior de la escalera se aleja de la pared cuando golpea a Kevin?



Paso 1 - Identifique las variables que cambian.

- Distancia de la parte inferior de la escalera a la pared = x
- Distancia de la parte superior de la escalera al piso = y

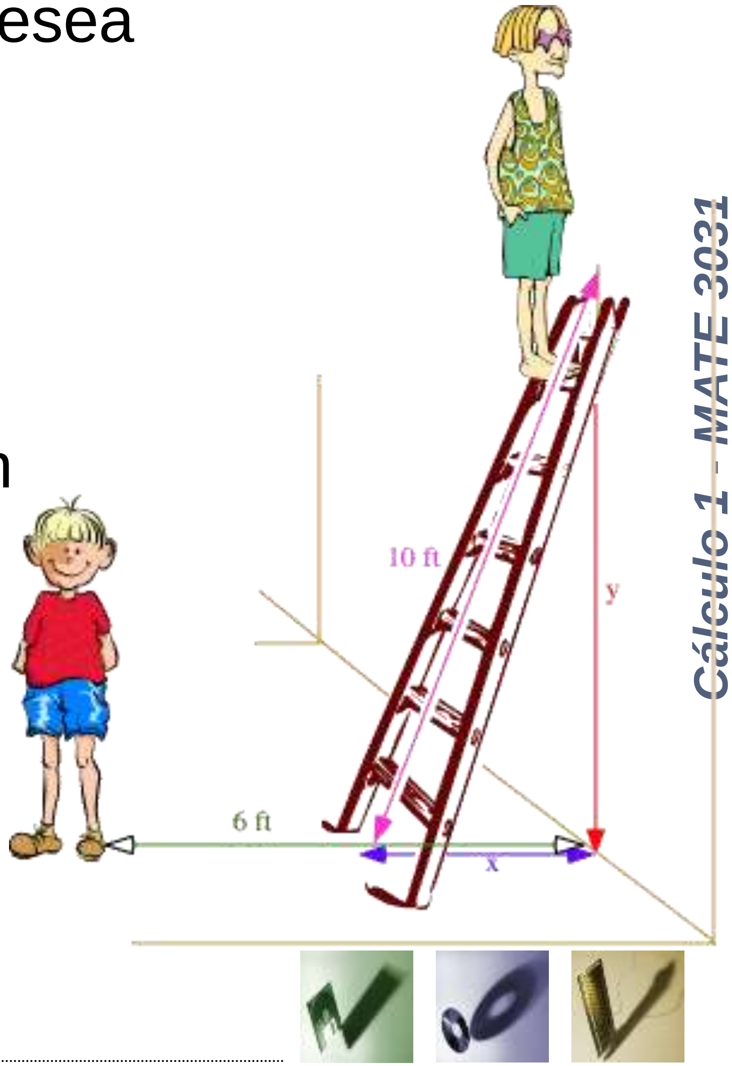
Solución Ejemplo 5 (Pasos 2 y 3)

- Paso 2 - Identifique las razones de cambio se conocen y la que se desea determinar.

$$\frac{dy}{dt} = -4 \; pies/s \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=6}$$

- Paso 3 - Determine una ecuación que las relaciona.
- Por el Teorema de Pitágoras,

$$x^2 + y^2 = 10^2$$



Solución Ejemplo 5 (pasos 4 y 5)

- Paso 4 – Diferencie implícitamente con respecto a t:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dt}(100)$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

$$2x\frac{dx}{dt} = -2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{x}\frac{dy}{dt}$$

- Paso 5 – Sustituya los valores conocidos y despeje por la razón de cambio deseada. $x = 6\ \mathrm{pies}$ $\quad \frac{dy}{dt} = -4\ pies/s$

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{y}{(3)}(-4) \quad = \frac{2y}{3}$$

Solución de Ejemplo 5 (paso 6)

- Para calcular y, resuelva la ecuación que las relaciona para x = 6 ya que éste corresponde a la base del triángulo recto que se forma cuando la parte de debajo de la escalera impacta a Keddyn.

$$x^2 + y^2 = 100$$

Tome valor y = +8 ya que representa distancia.

$$y^2 = 64$$

$$y = \pm 8$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2(8)}{3} = 5\tfrac{1}{3}\text{ p/s}$$

- Paso 6 – Responda al problema planteado.

La escalera golpea a Keddyn a una velocidad de $5\frac{1}{3}$ p/s

Ejemplo 6

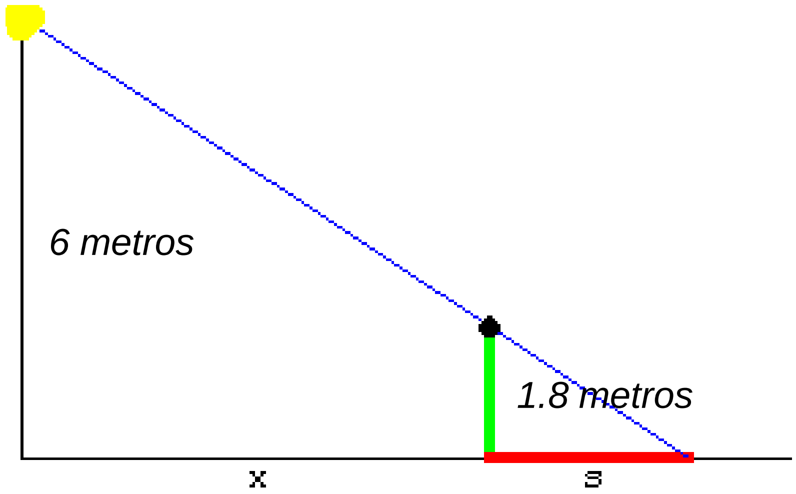
- Una persona de 1.80 metros de altura se aleja de un poste de alumbrado de 6 metros de altura con una velocidad de 1 m/s. Si se desea determinar con qué rapidez la sombra de la persona crece, **identifique las variables**, la **razón de cambio que se conoce** y **la que se desea determinar** (Paso 1 y 2).
- Paso 1 –

x = distancia de la persona y el poste

s = largo de la sombra

- Paso 2 -

$$\frac{dx}{dt} = 1\,\mathrm{m}/s \qquad \frac{ds}{dt}$$



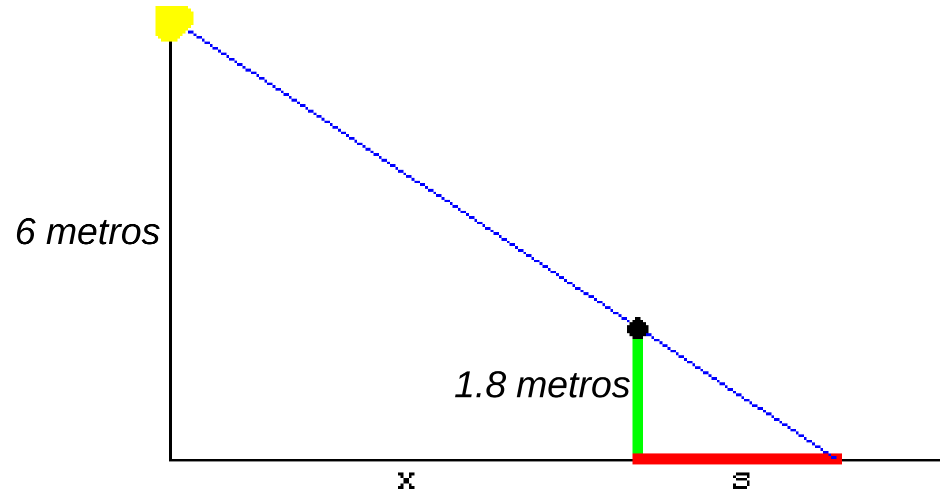
Ejemplo 7

- (Ver Ejemplo 6) Una persona de 1.80 metros de altura se aleja de un poste de alumbrado de 6 metros de altura con una velocidad de 1 m/s. **¿Con qué rapidez crece la sombra de la persona?** (Paso 3, 4, 5 y 6)
- Paso 3 –

$$\frac{s}{1.8} = \frac{x+s}{6}$$

$$6s = 1.8x + 1.8s$$

$$4.2s = 1.8x$$



- Paso 4 y 5 -

$$4.2\frac{ds}{dt} = 1.8\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1.8}{4.2}(1) \quad = 0.428 \text{ m/s}$$

Paso 6 – La sombra crece a una rapidez de 0.428 m/s

Ejercicios del Texto

Using Related Rates In Exercises 1–4, assume that x and y are both differentiable functions of t and find the required values of dy/dt and dx/dt.

Equation	Find	Given
1. $y = \sqrt{x}$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$ when $x = 4$	$\dfrac{dx}{dt} = 3$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$ when $x = 25$	$\dfrac{dy}{dt} = 2$
2. $y = 3x^2 - 5x$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$ when $x = 3$	$\dfrac{dx}{dt} = 2$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$ when $x = 2$	$\dfrac{dy}{dt} = 4$
3. $xy = 4$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$ when $x = 8$	$\dfrac{dx}{dt} = 10$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$ when $x = 1$	$\dfrac{dy}{dt} = -6$
4. $x^2 + y^2 = 25$	(a) $\dfrac{dy}{dt}$ when $x = 3, y = 4$	$\dfrac{dx}{dt} = 8$
	(b) $\dfrac{dx}{dt}$ when $x = 4, y = 3$	$\dfrac{dy}{dt} = -2$

Moving Point In Exercises 5–8, a point is moving along the graph of the given function at the rate dx/dt. Find dy/dt for the given values of x.

5. $y = 2x^2 + 1$; $\dfrac{dx}{dt} = 2$ centimeters per second

   (a) $x = -1$ (b) $x = 0$ (c) $x = 1$

6. $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$; $\dfrac{dx}{dt} = 6$ inches per second

   (a) $x = -2$ (b) $x = 0$ (c) $x = 2$

7. $y = \tan x$; $\dfrac{dx}{dt} = 3$ feet per second

   (a) $x = -\dfrac{\pi}{3}$ (b) $x = -\dfrac{\pi}{4}$ (c) $x = 0$

8. $y = \cos x$; $\dfrac{dx}{dt} = 4$ centimeters per second

   (a) $x = \dfrac{\pi}{6}$ (b) $x = \dfrac{\pi}{4}$ (c) $x = \dfrac{\pi}{3}$

Ejercicios del Texto

11. Area The radius r of a circle is increasing at a rate of 4 centimeters per minute. Find the rates of change of the area when (a) $r = 8$ centimeters and (b) $r = 32$ centimeters.

12. Area The included angle of the two sides of constant equal length s of an isosceles triangle is θ.

(a) Show that the area of the triangle is given by $A = \frac{1}{2}s^2 \sin \theta$.

(b) The angle θ is increasing at the rate of $\frac{1}{2}$ radian per minute. Find the rates of change of the area when $\theta = \pi/6$ and $\theta = \pi/3$.

(c) Explain why the rate of change of the area of the triangle is not constant even though $d\theta/dt$ is constant.

13. Volume The radius r of a sphere is increasing at a rate of 3 inches per minute.

(a) Find the rates of change of the volume when $r = 9$ inches and $r = 36$ inches.

(b) Explain why the rate of change of the volume of the sphere is not constant even though dr/dt is constant.

14. Volume A spherical balloon is inflated with gas at the rate of 800 cubic centimeters per minute. How fast is the radius of the balloon increasing at the instant the radius is (a) 30 centimeters and (b) 60 centimeters?

15. Volume All edges of a cube are expanding at a rate of 6 centimeters per second. How fast is the volume changing when each edge is (a) 2 centimeters and (b) 10 centimeters?

16. Surface Area All edges of a cube are expanding at a rate of 6 centimeters per second. How fast is the surface area changing when each edge is (a) 2 centimeters and (b) 10 centimeters?

17. Volume At a sand and gravel plant, sand is falling off a conveyor and onto a conical pile at a rate of 10 cubic feet per minute. The diameter of the base of the cone is approximately three times the altitude. At what rate is the height of the pile changing when the pile is 15 feet high? (*Hint:* The formula for the volume of a cone is $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.)

18. Depth A conical tank (with vertex down) is 10 feet across the top and 12 feet deep. Water is flowing into the tank at a rate of 10 cubic feet per minute. Find the rate of change of the depth of the water when the water is 8 feet deep.