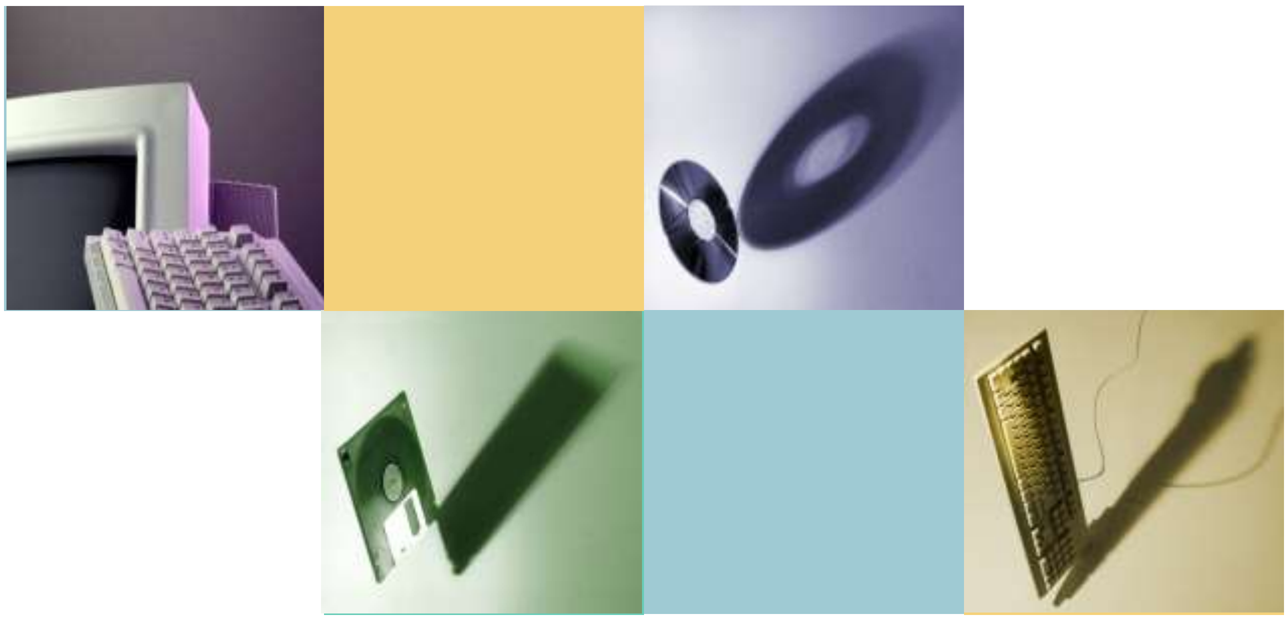
Valores Máximos y Mínimos



MATE 3031 – Cálculo 1

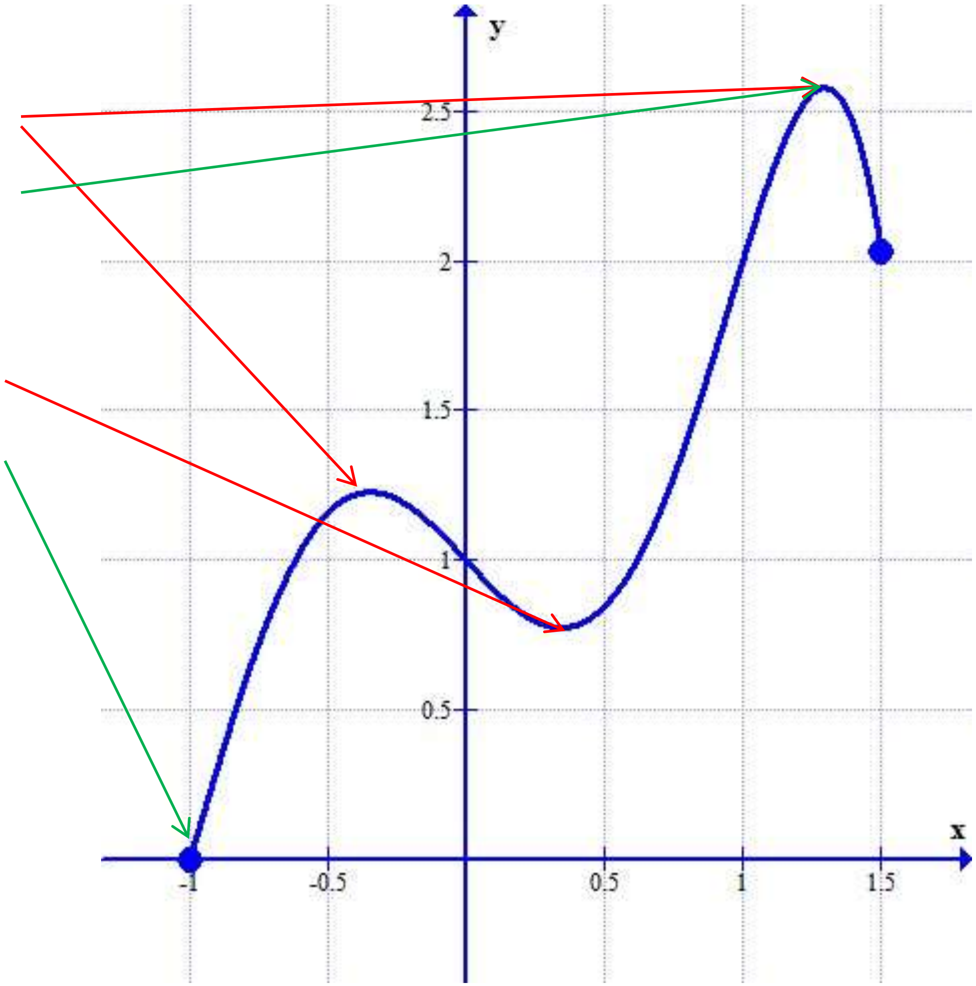
Actividades 2.5

- **Referencia: Texto**
  - Sección 3.1 Extremos en un intervalo Valores Máximos y Mínimos, Ver ejemplos 1 al 4; Ejercicios de Práctica: Impares 1-39
  - Sección 3.3 Funciones crecientes y decrecientes, Ver ejemplos 1 al 4; Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 35;
  - Sección 3.4 Concavidad y criterio de la Segunda Derivada, ver ejemplos 1-4; Ejercicios de Práctica 1- 35
- **Asignación 4.2:** Sección 3.1, problemas 20 y 28 ; Sección 3.3 problemas 22, 36, Sección 3.4, problemas 18, 34. Incluya su gráfica usando GRAPH.
- **Referencias del Web:**
  - Khan Academy – Máximos y Mínimos relativos y Absolutos.
  - TareasPlus – Máximos, mínimos, concavidad y puntos de inflexion.
  - Paul's Online note: Minimum and Maximum values.
  - SOS Mathematics - Concavity and Points of Inflections
  - HMC Mathematics Online Tutorial - Concavity and Second Derivative Test.
  - Matemática – Concavidad

Valores extremos

¿Punto máximo relativo vs. Punto máximo absoluto?

¿Punto mínimo relativo vs. Punto mínimo absoluto?



Puntos y Valores extremos

¿Punto máximo relativo vs. máximo absoluto?

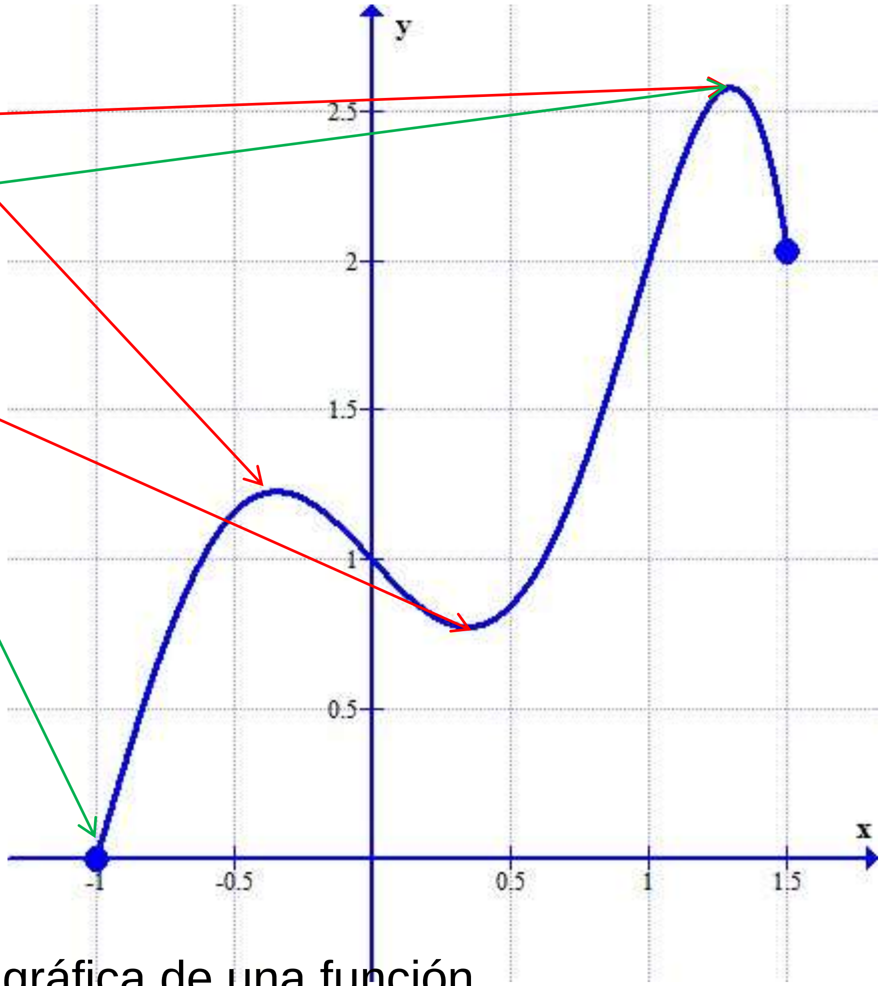
Máximo relativo:

Máximo absoluto:

¿Punto mínimo relativo vs. mínimo absoluto?

Mínimo relativo:

Mínimo absoluto:



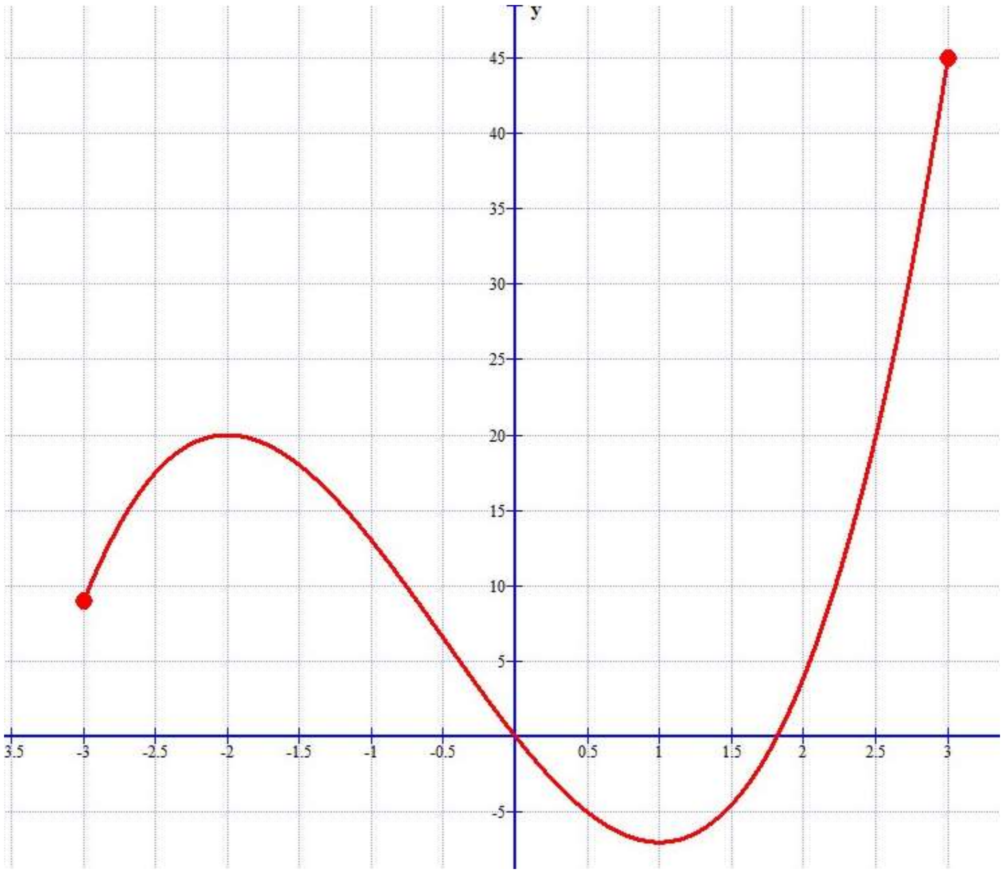
Un punto mínimo o máximo **relativo** tiene que estar en el intervalo abierto ($\boldsymbol{a, b}$).

Un punto mínimo o máximo **absoluto** puede ser un punto relativo o puede estar en uno de los puntos extremos del intervalo cerrado [$\boldsymbol{a, b}$].

Si $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}))$ es un punto extremo de la gráfica de una función $\boldsymbol{f}$, se dice que ocurre en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ y que $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a})$ es un **valor extremo** (relativo o absoluto) de $\boldsymbol{f}$.

Ejemplo 1

- De la gráfica de $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x$ aproxime dónde la función tiene un extremo relativo y absoluto en el intervalo $[-3, 3]$.

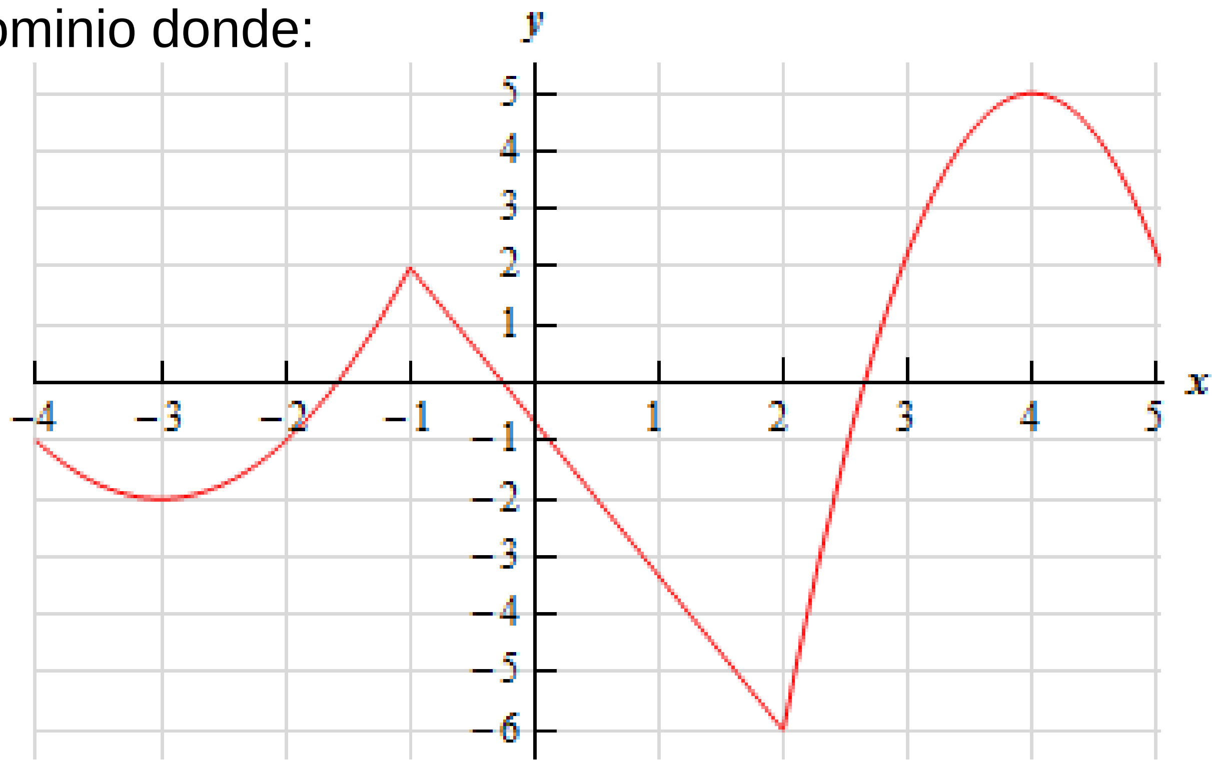


Puntos, Números y Valores críticos

- Números Críticos
  - Números del dominio donde:

$$f'(x) = 0$$

$$f'(x) \; no \; existe$$



- Valores Críticos

  Los valores de la función correspondientes a sus números críticos

Aproximadamente …

$$f(-3) = -2 \qquad f(-1) = 2 \qquad f(2) = -6 \qquad f(4) = 5$$



Ejemplo 2

Calcule el número y valor crítico de la función $f(x) = \dfrac{4x}{x^2+1}$ en el intervalo (-2,1).

Solución (analítica):

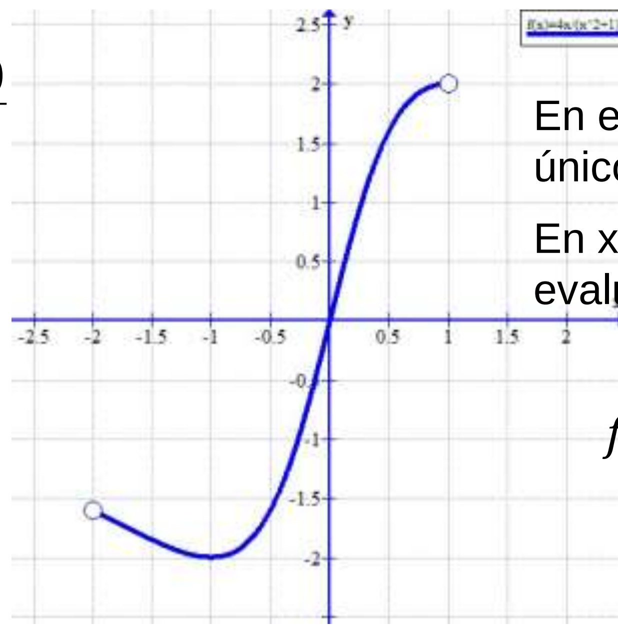
Paso 1- Calcule la función derivada f'

$$f'(x) = \frac{(x^2+1)\frac{d}{dx}(4x) - 4x\frac{d}{dx}(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4(x^2+1) - 4x(2x)}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{4x^2+4-8x^2}{(x^2+1)^2}$$

$$= \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$



Paso 2 - Identifique puntos dónde f' toma el valor de 0 o donde no está definido:

$$f'(x) = \frac{-4(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

$$0 = -4(x^2-1)$$
$$x = \pm 1$$

$$0 = (x^2+1)^2$$
$x =$ no tiene solución

En el intervalo abierto (-2,1), el único **número crítico** es x = -1

En x = -1, el **valor crítico** se calcula evaluando la función f(-1):

$$f(-1) = \frac{4(-1)}{(-1)^2+1} = -2$$



Ejercicio #1

- Encuentre los valores críticos de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x$
- Solución (analítica):
- Calcule f'(x) $$f'(x) = 3\left(\frac{x^2}{3}\right) - 2\left(\frac{x}{2}\right) - 2 = x^2 - x - 2$$
- Determine los números críticos. Esto son, valores en donde

$$f'(x) = 0 \quad \text{o} \quad f'(x)\, no\, existe$$

- Los valores críticos son:

$$0 = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$$

$$\text{Aqui} \quad f'(x)\,\text{siempre existe}$$

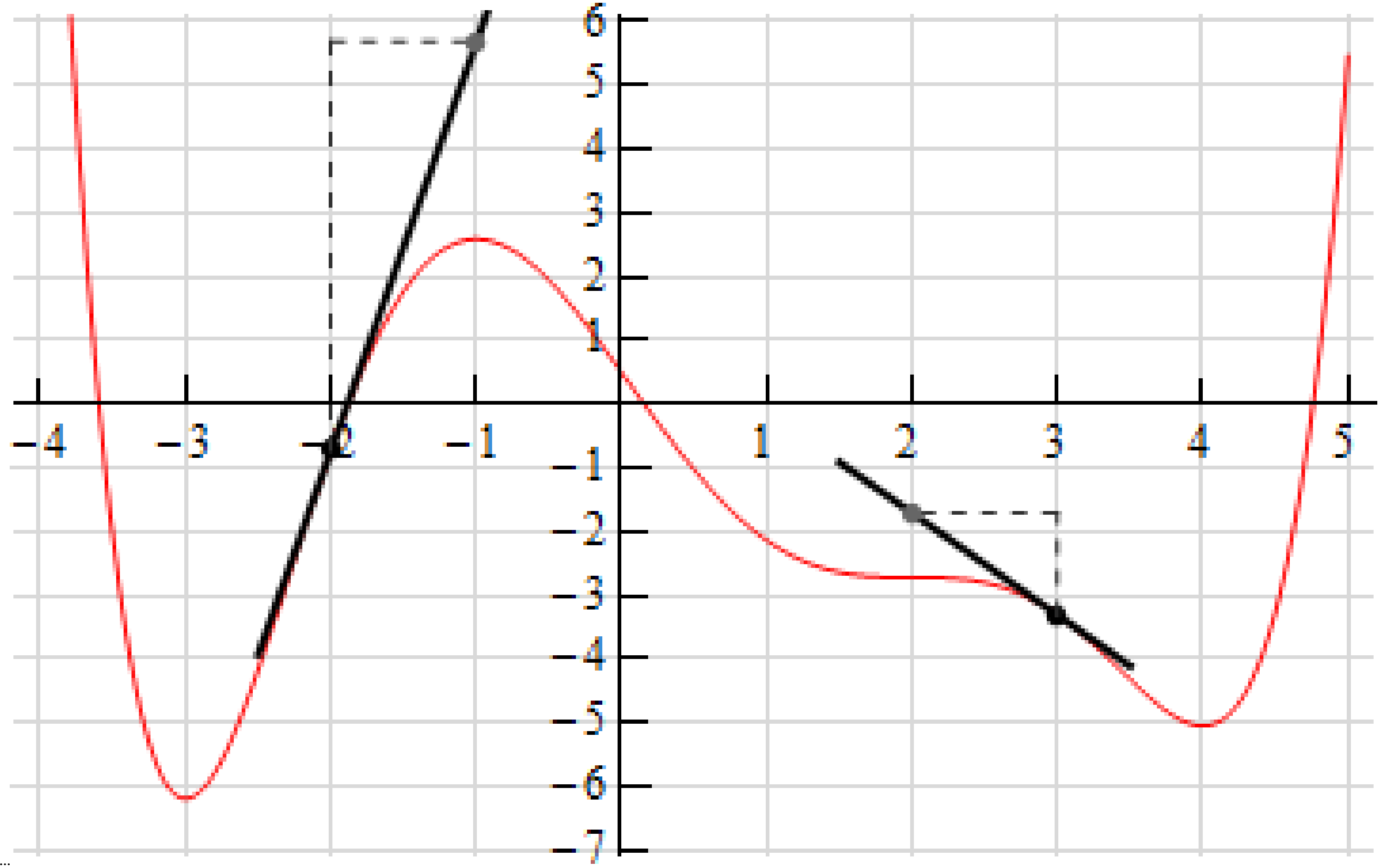
$$x = -1 \quad \text{y} \quad x = 2$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} - 2(-1) = \frac{7}{6}$$

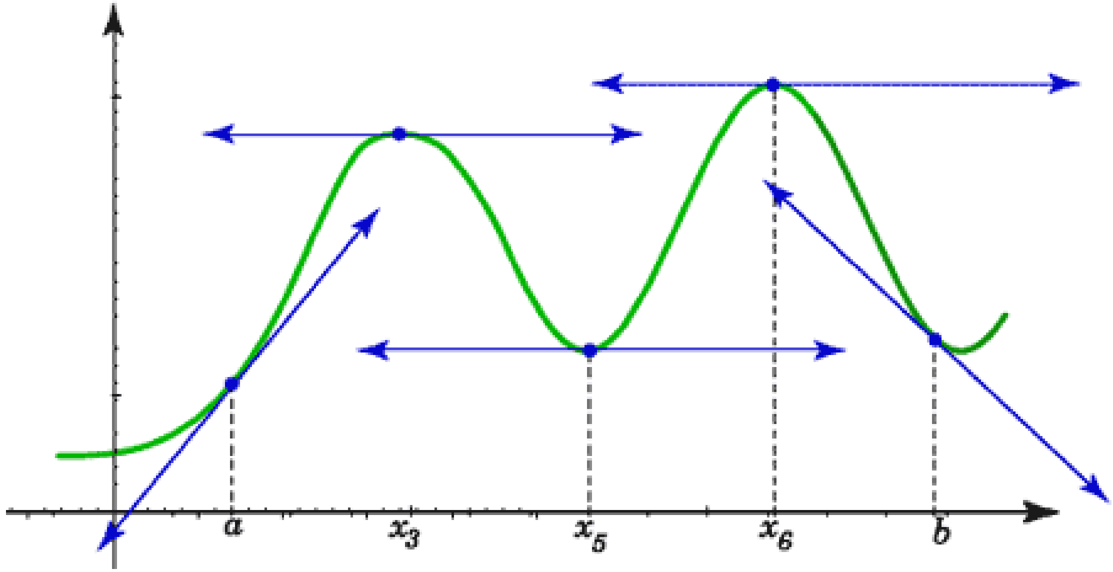
$$f(2) = \frac{-10}{3}$$

¿Cómo varía el signo de la derivada?

- ¿Dónde es la derivada …
- ¿positiva? ¿negativa? ¿0?



Prueba de la primera derivada



- *Si f'(x) > 0 para todo valor de x en (a,b), entonces f es una* ***función creciente*** *en [a,b]*
- *Si f'(x) < 0 para todo valor de x en (a,b), entonces f es una* ***función decreciente*** *en [a,b]*
- *Si f'(x) = 0 para todo valor de x en (a,b), entonces f es una* ***función constante*** *en [a,b]*

Ejemplo 3

- Determine los intervalos en donde crece o decrece la función

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$$

- Solución:
- Paso 1 – Determine los números críticos

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

Si $f'(x) = 0$ entonces,

$$0 = 2x - \frac{2}{x^3}$$

$$x^4 = 1$$

$$x = -1 \text{ o } 1$$

Si $f'(x) =$ no existe

$$2x - \frac{2}{x^3} \text{ no está definido en } x = 0$$

Los intervalos de interés son:

$$(-\infty,-1) \quad (-1,0) \quad (0,1) \quad (1,\infty)$$

Ejemplo 3 …

- Prepare tabla para analizar variación de signo de la primera derivada:
  - Para esto, seleccione un valor arbitrario en el intervalo y determine el signo de la función derivada

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x^3}$$

	$f'(x)$	Comportamiento
$(-\infty,-1)$	-	decrece
$(-1,0)$	+	crece
$(0,1)$	-	decrece
$(1,\infty)$	+	crece

  - Crece en los intervalos $(-1,0)\cup(1,\infty)$
  - Decrece en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(0,1)$

Ejercicio #2

- Para la función: $f(x) = x^4 - 4x - 1$ encuentre los intervalos sobre los cuales la función es creciente o decreciente.
- Solución
- Paso 1 - Cácule la primera $f'(x) = 4x^3 - 4$
- Paso 2 – Identifique números críticos.

$$0 = 4x^3 - 4$$

$$4x^3 = 4$$

$$x = 1$$

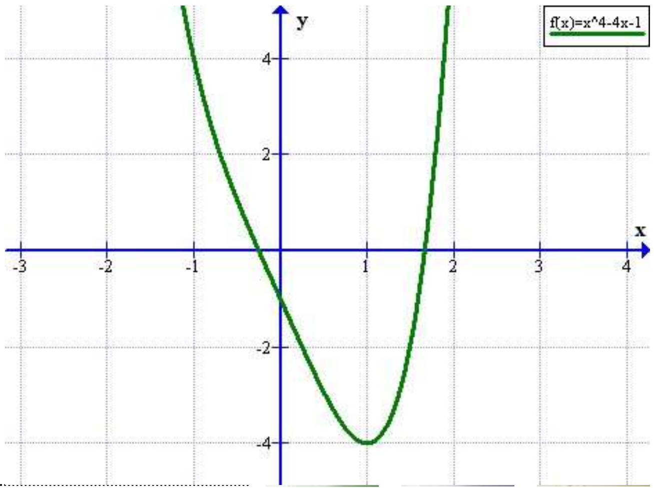
- Paso 3 – Analice la primera derivada en los intervalos alrededor de los número críticos.

$$(-\infty,1) \longrightarrow f'(x) < 0$$

$$\longrightarrow f \text{ decrece}$$

$$(1,\infty) \longrightarrow f'(x) > 0$$

$$\longrightarrow f \text{ crece}$$



¿Cómo determinar valores extremos absolutos?

Para encontrar los **valores extremos absolutos** de una función f en un intervalo cerrado [***a***,***b***] son:

1. Encuentre los valores críticos de f en (***a***,***b***).
2. Evalúe la función f en ***a*** y ***b***.
3. Compare los valores críticos con los valores de f(***a***) y f(***b***).

El valor mínimo será el el **mínimo absoluto** en [a,b].

El valor máximo será el **máximo absoluto** en [a,b].

Ejemplo 4

- Encuentre los valores extremos en [-2, 5] de $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x$

- Solución: (Ver Ejercicio #2)

1. Números críticos: $x = -1$ y $x = 2$
2. Valores críticos: $f(-1) = \dfrac{7}{6}$ y $f(2) = \dfrac{-10}{3}$
3. Valor de la función en ***a*** y ***b***.

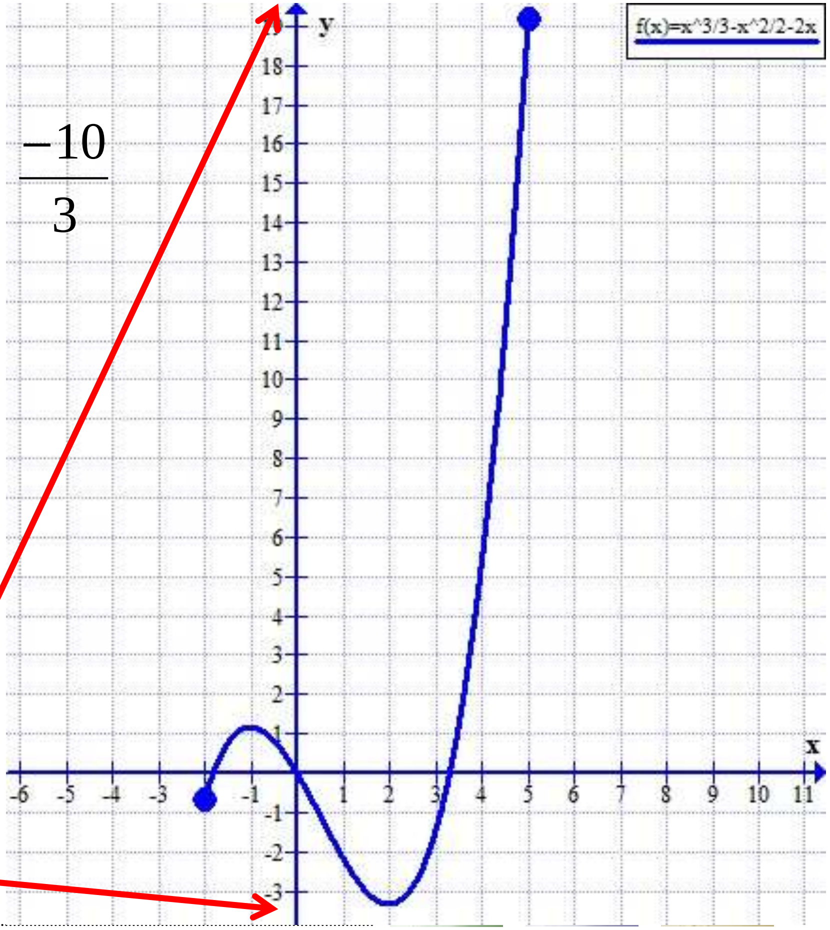
$$f(-2) = \frac{(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^2}{2} - 2(-2) = \frac{-2}{3}$$

$$f(5) = \frac{115}{6}$$

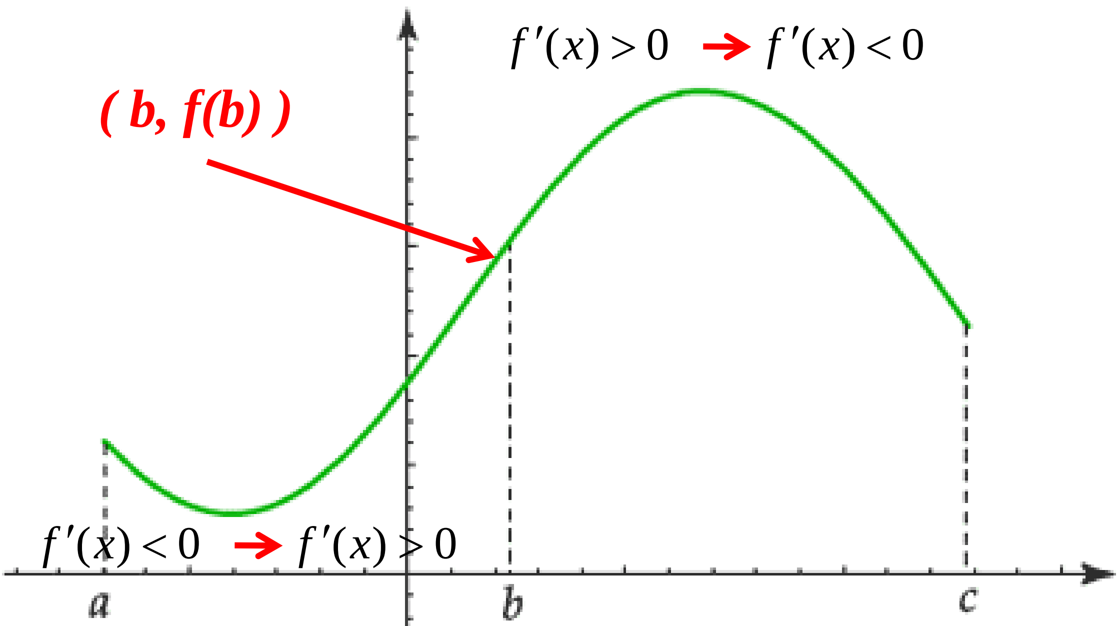
4. Compare

$f(5) = \dfrac{115}{6}$ es el máximo absoluto

$f(2) = \dfrac{-10}{3}$ es el mínimo absoluto



Prueba de la Segunda Derivada



- Una función ***f*** definida en un intervalo [a,b] es **cóncava hacia arriba** si su primera derivada ***f '*** cambia de negativo a positivo. Esto es, si la segunda derivada ***f ''*** es **positiva**.
- Una función ***f*** definida en un intervalo [a,b] es es **cóncava hacia abajo**, si ***f '*** cambio de positivo a negativo. Esto es, si la segunda derivada ***f ''*** es **negativa**.
- Se llaman **puntos de inflexión** cuando hay un cambio de concavidad.



Ejemplo 5

- Analice la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{x^4}{12}-\dfrac{x^3}{3}$ con respecto a la concavidad y a sus puntos de inflexión.
- Solución:
- Paso 1 – Cálcule la primera y la segunda derivada

$$f'(x)=\frac{x^3}{3}-x^2 \qquad\qquad f''(x)=x^2-2x$$

- Paso 2 – Identifique los intervalos de concavidad.

Identifique valores donde la segunda derivada es 0.

$$f''(x)=x(x-2)$$

$$0=x(x-2)$$

$$x=0 \qquad x=2$$

Posibles puntos de inflexión ocurren en x= 0 y en x = 2.

Intervalos para analizar variación de signos.

$$(-\infty,0) \qquad (0,2) \qquad (2,\infty)$$

Ejemplo 5 …

- Paso 3 – Construya tabla para analizar variación de signo $f''(x) = x(x-2)$

	x	x-2	f"(x)	concavidad
(-infinito, 0)	**-**	**-**	**+**	**Hacia arriba**
(0, 2)	**+**	**-**	**-**	**Hacia abajo**
(2, +infinito)	**+**	**+**	**+**	**Hacia arriba**

$$f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$$

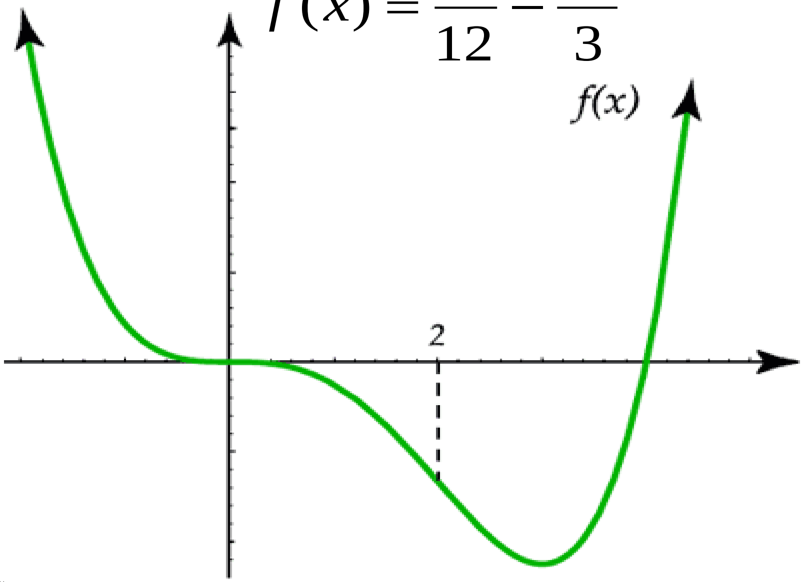
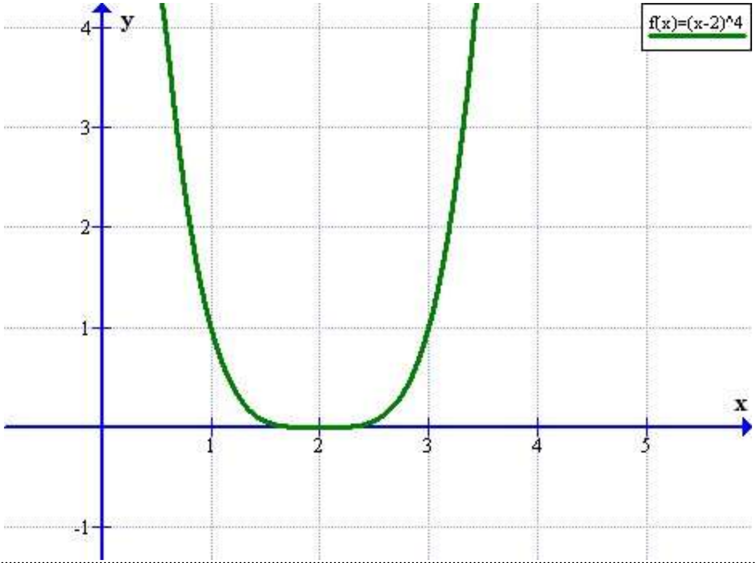


Tabla confirma puntos de inflexión en x= 0, x = 2

f''(x) = 0 no asegura puntos de inflexión

- Recuerde: $f''(c) = 0$ no garantiza que exista un punto de inflexión en $(c, f(c))$.
- Considere la función: $f(x) = (x - 2)^4$

  $f'(x) = 4(x - 2)^3 \qquad f''(x) = 12(x - 2)^2$
- Observe $f''(2) = 0$. Sin embargo, $f''(x)$ es positivo para valores menores o mayores que 2.



Es decir que el punto (2, 0) NO es un punto de inflexión,

Ejemplo 6

- Para la función: $f(x) = x \ln x$ encuentre los valores máximos y mínimos locales.
- Solución
- Paso 1 – Cálcule la primera derivada

$$f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1$$
$$f'(x) = 1 + \ln x$$

- Paso 2 – Identifique números críticos.

$$0 = 1 + \ln x$$
$$\ln x = -1$$
$$x = e^{-1}$$

- Sólo hay un número crítico

Ejemplo 6 …

- Paso 3 – Determine signo de la segunda derivada en los números críticos.

$$f''(x) = \frac{1}{x}$$

$$f''(e^{-1}) = \frac{1}{e^{-1}} = e > 0$$

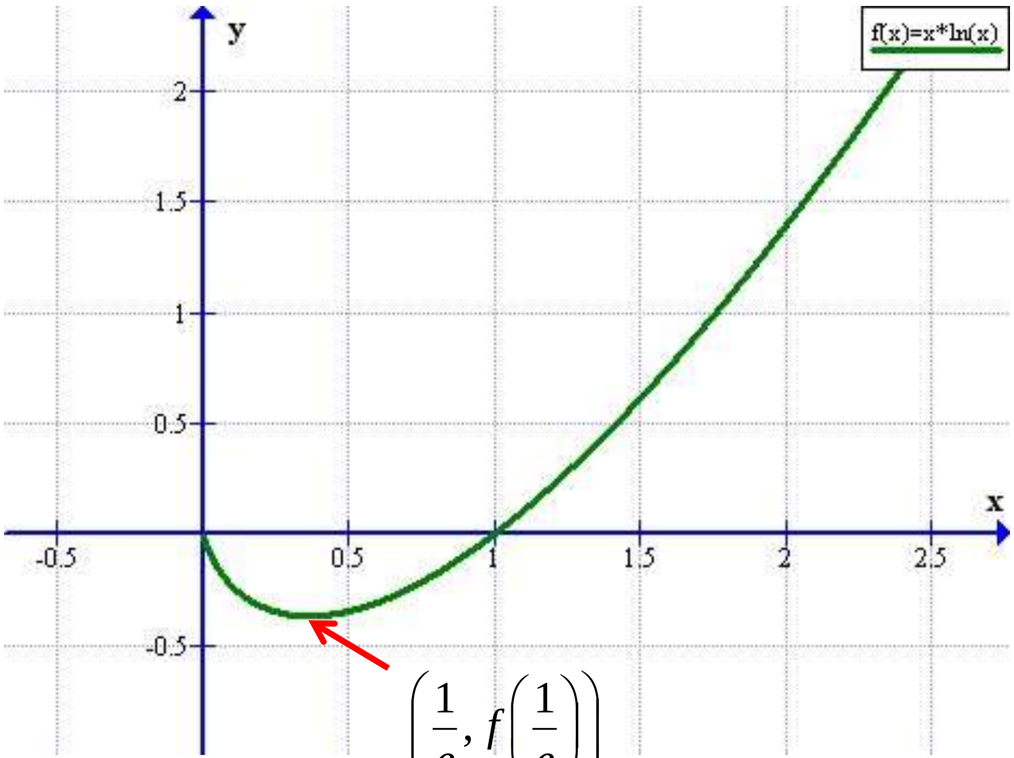
$$\downarrow$$

$$\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right) \text{ hay un mínimo}$$

El mínimo local es

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}\ln\left(\frac{1}{e}\right)$$

$$= \frac{1}{e}(-1) = -\frac{1}{e} \approx -0.368$$



$$\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$$

Ejercicio #3

- Considera la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$

a) Determine la primera y segunda derivada

b) Determine los intervalos donde la función crece o decrece

c) Determine los intervalos de concavidad.

d) Determine concavidad y puntos de inflexión.

e) Trace la gráfica

Solución:

a) $f'(x) = 12x^3 - 12x^2 \quad f''(x) = 36x^2 - 24x$

b) $12x^3 - 12x^2 = 0$

$$12x^2(x-1) = 0$$

$$x = 0,\ 1$$

Intervalos	$12x^2$	x - 1	f '(x)	
(-infinito, 0)	+	-	-	decrece
(0, 1)	+	-	-	decrece
(1, infinito)	+	+	+	crece

Ejercicio #3 …

c) Concavidad y puntos de inflexión. $f''(x) = 36x^2 - 24x$

$$36x^2 - 24x = 0$$

$$12x(3x - 2) = 0$$

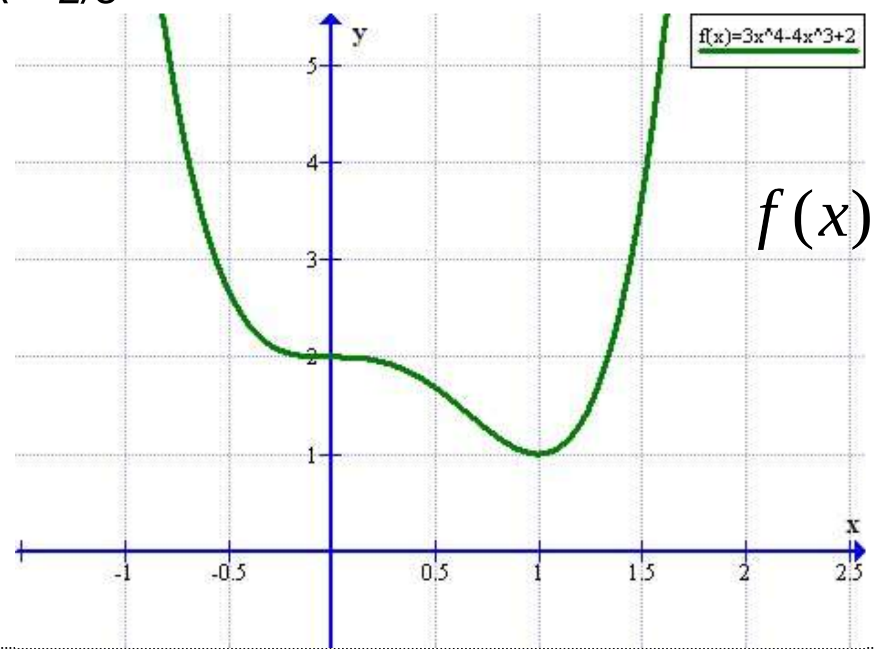
$$x = 0,\ \frac{2}{3}$$

Posibles puntos de inflexión ocurren en x= 0 y en x = 2/3

	x	x-1	f"(x)	concavidad
(-infinito, 0)	-	-	+	Hacia arriba
(0, 2/3)	+	-	-	Hacia abajo
(2/3, +infinito)	+	+	+	Hacia arriba

Tabla confirma puntos de inflexión en x= 0, x =2/3

d) Gráfica



$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2$$