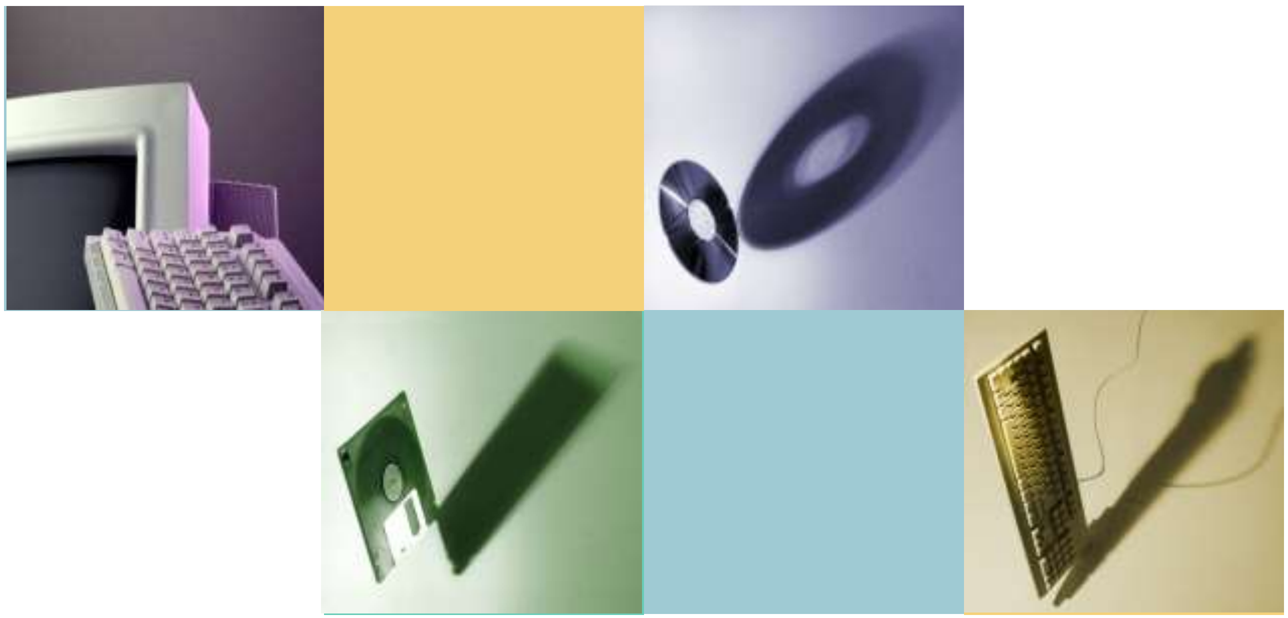
Optimización



MATE 3031 – Cálculo 1

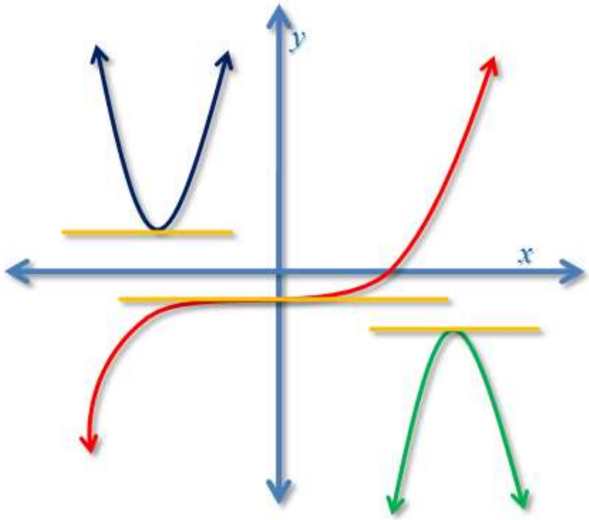
Actividades 2.6

- Referencia: Sección 3.7 Problemas de Optimización, Ver ejemplos 1 al 5; Ejercicios de Práctica: Impares 1 - 23;
- **Asignación 2.6:** Problema 18, 20 y responda a preguntas del problema 48
- Referencias:
  - Julio Profe: Problema 1 de optimización ; Problema 2 de Optiimización
  - Iescampus.com – Optimización
  - Math2Me.com –
    - Concepto de la optimización en cálculo diferencial
    - Optimización del área de un rectángulo
    - Optimización del volume de una caja sin tapa (parte 1), Parte 2
  - Cibermatex – Problema de Optimización Resuelto Paso a Paso

¿Optimizar?

Es el proceso de:

- Buscar la mejor manera de realizar una actividad (Word Reference. Com)
- Determinar los valores de las variables que intervienen en un proceso o sistema para que el resultado que se obtiene sea el mejor posible (The FreeDictionary.com).
- Encontrar los mínimos y máximos de una función (Wikipedia)



Ejemplo 1

- Determine dos números positivos cuya suma sea 10 y cuyo producto tenga el mayor valor posible.
- Solución:
- Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -
  - Sea x, y los dos números y P su producto.
  - Se desea maximizar el producto P.
- Paso 2 - Identifique o establezca ecuación principal.

$$P = xy$$

Ejemplo 1 …

- Paso 3 - Identifique o establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.
  - Como la suma de los números es 10, entonces:

$$x + y = 10$$

- Paso 4 - Utilice las ecuaciones auxiliares para expresar la ecuación principal como una función de la variable que se desea optimizar.
  - Como $y = 10 - x$

$$P = xy$$

$$P = x(10 - x)$$

$$P(x) = x(10 - x)$$

Ejemplo 1 …

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$P'(x) = 10 - 2x$$

- Calcule los números críticos:

$$0 = 10 - 2x$$

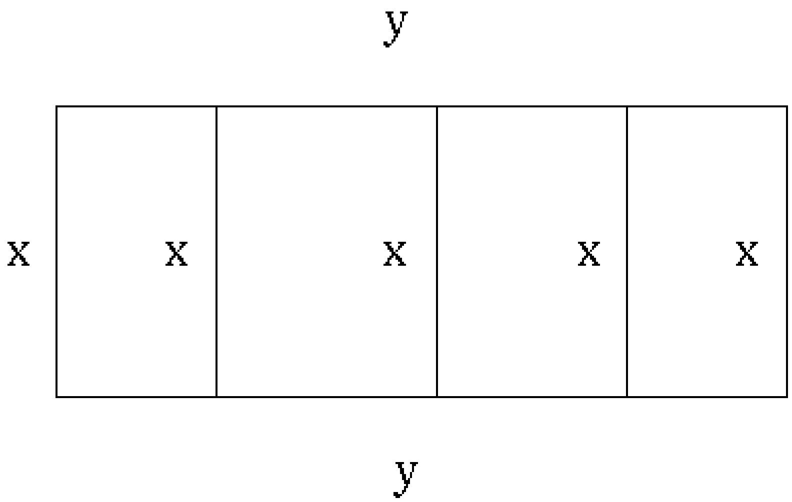
$$x = 5$$

  – Como $P''(x) = -2$, entonces $P''(5) < 0$. Esto es, en $x = 5$ la función tiene un valor máximo.

- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  – Para maximizar el producto x = 5, y = 5. Es decir, ambos números tienen que ser 5.

Ejemplo 2

- Con 500 pies de *cyclone fence* se construye un área rectangular con tres particiones paralelas. ¿Cuál será las dimensiones que maximizará el área total?
- Solución:



Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

Sea x, y las dimensiones del área rectangular A.
Se desea maximizar el área A.

Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$A = xy$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.

$$5x + 2y = 500$$

Ejemplo 2 …

- Paso 4 - Utilice las ecuaciones auxiliares para expresar la ecuación principal como una función de la variable que se desea optimizar.

$$5x + 2y = 500$$

$$2y = -5x + 500$$

$$y = \frac{-5}{2}x + 250$$

$$A = xy$$

$$A(x) = x\left(\frac{-5}{2}x + 250\right)$$

$$A(x) = \frac{-5}{2}x^2 + 250x$$

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$A'(x) = -5x + 250$$

$$0 = -5x + 250$$

$$x = 50$$

$$A''(x) = -5$$

$$\text{En } x = 50 \text{ hay un máximo.}$$

- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  - Para maximizar área x = 50 pies, y = 125 pies.

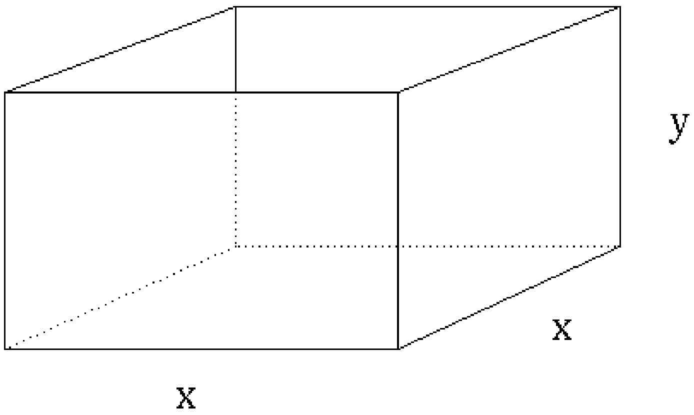


Ejemplo 3

- Una caja rectangular abierta con una base cuadrada se construirá de 48 ft.^{2} de un material. (a) ¿Cuáles dimensiones resultarán en una caja con el volumen mayor posible? (b) ¿Cuál será el volumen mayor posible?

Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

x – ancho de la base
y – altura
V – volumen (maximizar)



Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$V = x^2 y$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.

$$48\ ft^2 = \acute{a}rea\ de\ base + 4\ (\acute{a}reas\ de\ un\ lado)$$

$$48 = x^2 + 4xy \quad \Rightarrow \quad \frac{48 - x^2}{4x} = y$$

Ejemplo 3 …

Paso 4 – Establezca función que se desea optimizar.

$$V = x^2 y \quad = x^2\left(\frac{48 - x^2}{4x}\right) \quad = \frac{x(48 - x^2)}{4} \; = 12x - \frac{x^3}{4}$$

$V(x) = 12x - \frac{1}{4}x^3$ Observe que dominio de $V(x)$ es $\left(0, \sqrt{48}\right) = (0, 4\sqrt{3}) \approx (0, 6.93)$

Paso 5 – Cálculo números críticos. $V'(x) = 12 - \frac{3}{4}x^2$

Si V'(x)=0, entonces.

$$0 = 12 - \frac{3}{4}x^2$$

$x^2 = \pm\sqrt{16} \; = \pm 4$ El único valor posible es 4

Si $V''(x) = -\frac{3}{2}x$, entonces $V''(4) = -\frac{3}{2}(4) < 0$ En 4 V es alcance un **máximo** valor

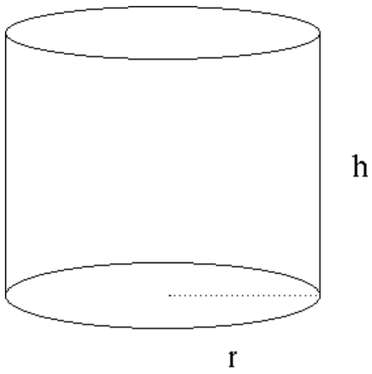
Paso 6 – Responder al problema.

Las dimensiones de la caja que resultarán con el volumen mayor posible serán cuando base sea de **4 pies por 4 pies y tenga un ancho de 2 pies**.

El volumen mayor posible será de **32 pies cúbicos**.

Ejercicio #1

- Un contenedor cilíndrico circular sin tapa tiene un área de superficie de $3\pi\ ft.2$ Si se deseara determiner cuál es la altura h y el radio r de la base que maximizará su volume, ¿cuál será la función volumen con respecto a su radio $V(r)$ que necesita optimizar?



Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

r – el radio de la base
h – altura
V – volumen (maximizar)

Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$V = \pi r^2 h$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares) que relacionan las variables con datos conocidos.

$$3\pi = \pi r^2 + 2\pi r h$$

Paso 4 – Establezca función que se desea optimizar.

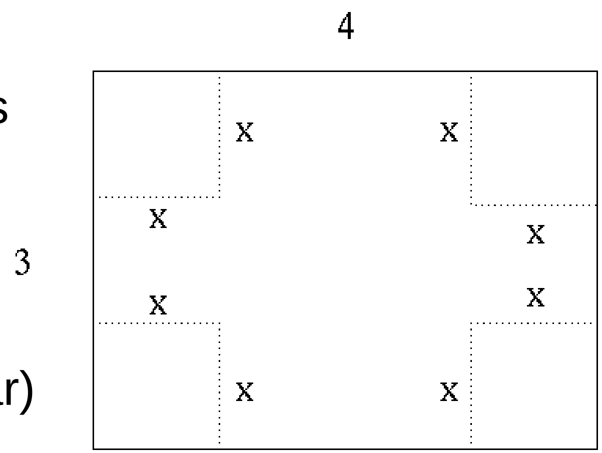
$$V(r) = \frac{3}{2}\pi r - \frac{1}{2}\pi r^3$$

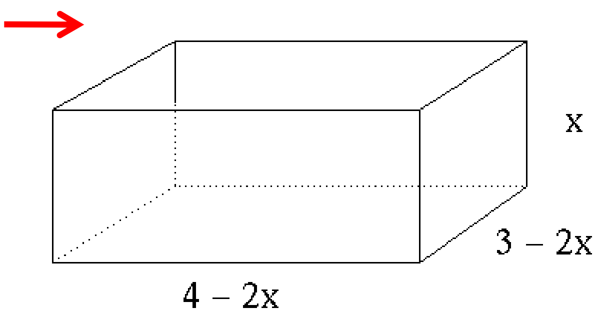
Ejemplo 3

- Una hoja de cartón de 3 ft. por 4 ft. se convertirá en una caja cortando de las esquinas cuadrados iguales y doblándolas por los lados resultantes. ¿Cuál será las dimensiones de la caja con el volumen mayor?

Paso 1 - Identifique las variables y la que se desea maximizar -

x – altura de la caja
V – volumen (maximizar)





Paso 2 – Identifique la ecuación con variable que se desea optimizar.

$$V = (4 - 2x)(3 - 2x)x$$

Paso 3 – Establezca las ecuaciones (auxiliares). - No aplica

$$V(x) = 12x - 14x^2 + 4x^3$$

Paso 4 – Establezca función que se desea optimizar.

Ejemplo 3 …

- Paso 5 - Calcule los valores máximos o Mínimos de la función que se desea optimizar.

$$V'(x) = 12 - 28x + 12x^2$$

$$0 = 12 - 28x + 12x^2$$

$$0 = 3 - 7x + 3x^2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(3)(3)}}{2(3)} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$$

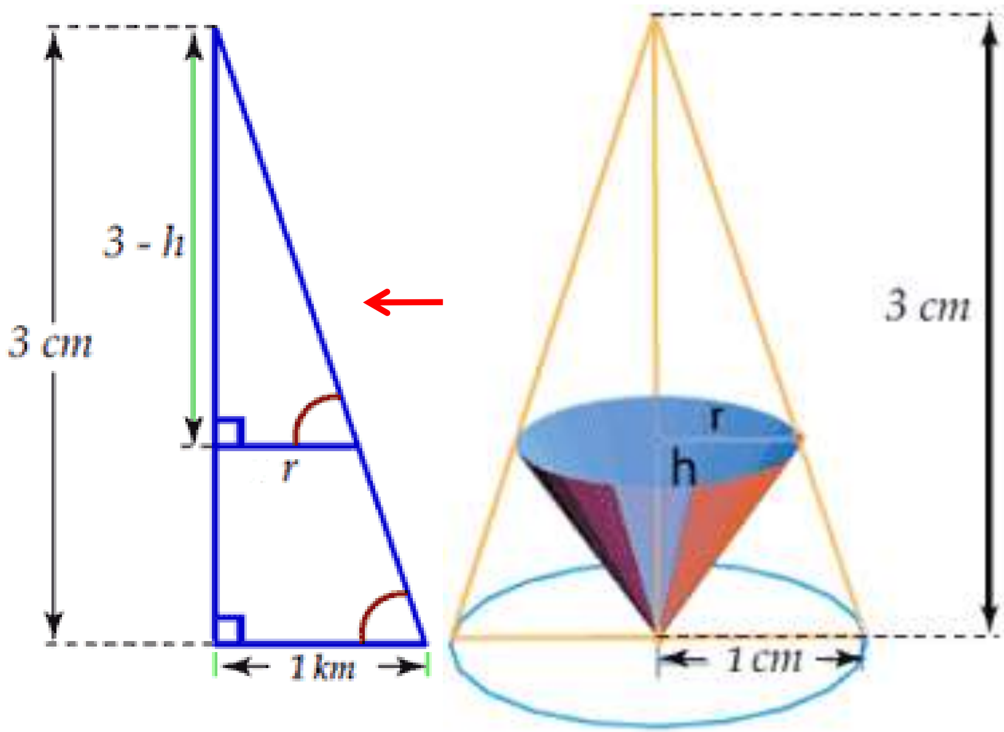
$$x \approx 0.57 \text{ ó } 1.77$$

Observe que $x = 1.77$ no puede ser un valor posible

- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  - Para maximizar volumen las dimensiones de la caja deben ser aproximadamente de 0.57 pies (grueso) x 1.86 pies (ancho) x 2.86 pies (largo).

Ejemplo 4

- Determinar las dimensiones del cono de mayor volumen que puede inscribirse en un cono circular recto de radio 1cm y altura 3cm, como se muestra en la figura siguiente:



Fórmula del volumen de un cono circular

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Por la simetría de triángulos:

$$\frac{3-h}{r} = \frac{3}{1}$$

$$3 - h = 3r$$

$$3 - 3r = h$$

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi r^2 (3 - 3r)$$

$$V(x) = \pi r^2 (1 - r)$$

Ejemplo 4 …

- Paso 5 - Calcule los valores óptimos de la función.

$$V(r) = \pi r^2 (1 - r)$$

$$V'(r) = 2\pi r - 3\pi r^2$$

$$0 = 2\pi r - 3\pi r^2$$

$$0 = \pi r\left(2 - 3r\right)$$

$$r = 0,\ \frac{2}{3}$$

- Paso 6 - Responda a la pregunta planteada:
  - Para maximizar V, r = 2/3 pies.

$$h = 3 - 3r \; = 3 - 3\left(\frac{2}{3}\right) = 1$$

  - Las dimensiones del cono mayor que se puede inscribir serán de.

$$\text{radio} = \frac{2}{3}\,\text{cm y altura} = 1\,\text{cm}$$

Ejercicios del Texto

1. **Numerical, Graphical, and Analytic Analysis** Find two positive numbers whose sum is 110 and whose product is a maximum.

   (a) Analytically complete six rows of a table such as the one below. (The first two rows are shown.)

First Number, x	Second Number	Product, P
10	$110 - 10$	$10(110 - 10) = 1000$
20	$110 - 20$	$20(110 - 20) = 1800$

   (b) Use a graphing utility to generate additional rows of the table. Use the table to estimate the solution. (*Hint:* Use the table feature of the graphing utility.)

   (c) Write the product P as a function of x.

   (d) Use a graphing utility to graph the function in part (c) and estimate the solution from the graph.

   (e) Use calculus to find the critical number of the function in part (c). Then find the two numbers.

2. **Numerical, Graphical, and Analytic Analysis** An open box of maximum volume is to be made from a square piece of material, 24 inches on a side, by cutting equal squares from the corners and turning up the sides (see figure).

Finding Numbers **In Exercises 3–8, find two positive numbers that satisfy the given requirements.**

3. The sum is S and the product is a maximum.
4. The product is 185 and the sum is a minimum.
5. The product is 147 and the sum of the first number plus three times the second number is a minimum.
6. The second number is the reciprocal of the first number and the sum is a minimum.
7. The sum of the first number and twice the second number is 108 and the product is a maximum.
8. The sum of the first number squared and the second number is 54 and the product is a maximum.

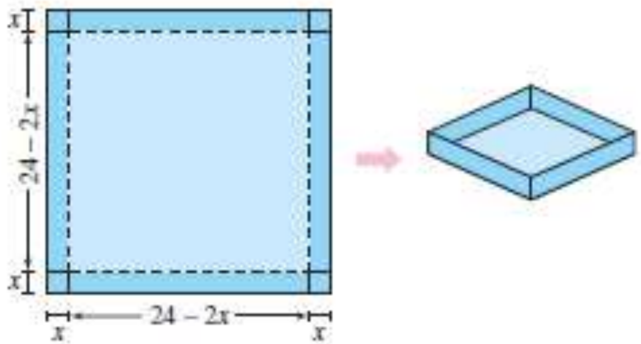
Maximum Area **In Exercises 9 and 10, find the length and width of a rectangle that has the given perimeter and a maximum area.**

9. Perimeter: 80 meters
10. Perimeter: P units

Minimum Perimeter **In Exercises 11 and 12, find the length and width of a rectangle that has the given area and a minimum perimeter.**

11. Area: 32 square feet
12. Area: A square centimeters

Minimum Distance **In Exercises 13–16, find the point on**



(a) Analytically complete six rows of a table such as the one below. (The first two rows are shown.) Use the table to guess the maximum volume.

Height, x	Length and Width	Volume, V
1	$24 - 2(1)$	$1[24 - 2(1)]^2 = 484$
2	$24 - 2(2)$	$2[24 - 2(2)]^2 = 800$

(b) Write the volume V as a function of x.

(c) Use calculus to find the critical number of the function in part (b) and find the maximum value.

(d) Use a graphing utility to graph the function in part (b) and verify the maximum volume from the graph.

Minimum Distance **In Exercises 13–16, find the point on the graph of the function that is closest to the given point.**

13. $f(x) = x^2, \left(2, \frac{1}{2}\right)$

14. $f(x) = (x - 1)^2, (-5, 3)$

15. $f(x) = \sqrt{x}, (4, 0)$

16. $f(x) = \sqrt{x - 8}, (12, 0)$

17. Minimum Area A rectangular page is to contain 30 square inches of print. The margins on each side are 1 inch. Find the dimensions of the page such that the least amount of paper is used.

18. Minimum Area A rectangular page is to contain 36 square inches of print. The margins on each side are $1\frac{1}{2}$ inches. Find the dimensions of the page such that the least amount of paper is used.

19. Minimum Length A farmer plans to fence a rectangular pasture adjacent to a river (see figure). The pasture must contain 245,000 square meters in order to provide enough grass for the herd. No fencing is needed along the river. What dimensions will require the least amount of fencing?