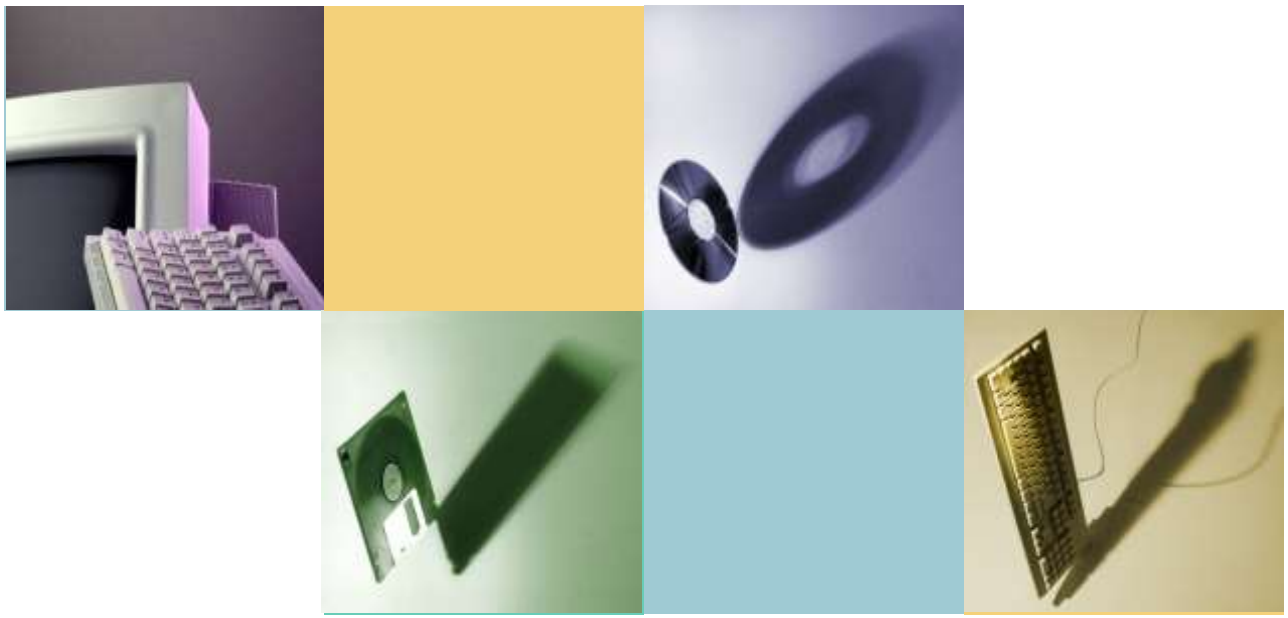
Lección 3.1



Antiderivadas y La Integral Indefinida

Actividades 3.1

- **Referencia del Texto**: Sección 4.1 Antiderivadas y la Integral Indefinida, Ver ejemplos 1 al 9
- Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 41
- Asignación 4.1: Sección 4.1 Antiderivadas y la Integral Indefinida, 18, 22, 28, 40
- Referencias del Web:
  - Khan Academy - Integrales Definidas e Indefinidas – Antiderivadas e Integrales Indefinidas, Integrales indefinidas de x elevada a una potencia, Antiderivadas de x^{-1}; Antiderivadas Trigonométricas y Exponenciales Básicas.
  - Paul's Online Note – Indefinite Integrals
  - Visual Calc - Antiderivatives / Indefinite Integrals; Tutorial sobre antiderivadas y el integral indefinido. Table of Elementary Indefinite Integrals. Ejercicios de práctica (Drill) usa Java.
  - eMathLab – Indefinite Integrals

Antiderivada

- Una función F es la **antiderivada de f** sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

- Ejemplo: $F(x) = x^2 + x - 5$
- es una antiderivada de $f(x) = 2x + 1$
- Otras son:

$$F_1(x) = x^2 + x + 1 \quad F_2(x) = x^2 + x + \pi \quad F_3(x) = x^2 + x$$

- En general, si F es una función antiderivada de f sobre un intervalo I, cualquier otra antiderivada de f será de la forma $F(x) + c$ donde c es una constante.

Integral indefinida

- La *integral indefinida* de $f(x)$ se define como el conjunto de todas las antiderivadas F de $f(x)$.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

donde c es una constante.

- Ejemplos:

$$\int (2x+1)dx = x^2 + x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo 1

1. Determine las antiderivadas de $f(x) = \sin x$

$$\int \sin x \, dx$$

- Como $\dfrac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

2. Determine $\int \sec^2 x \, dx$

- Como $\dfrac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

Otras antiderivadas ..

- Recuerde:

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int secx \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

$$\int e^{x} \, dx = e^{x} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas

$$\int k\,dx = kx + c$$

Ejemplos:

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int \pi\,dx = \pi x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ ,\ n \neq -1$$

Ejemplos:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas …

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

- Ejemplos:

$$\int 5\cos x\,dx = 5\int \cos x\,dx = 5\sin x + c$$

$$\int 6x^2\,dx = 6\int x^2\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right] + c = 2x^3 + c$$

$$\int -3\sqrt[3]{x}\,dx = -3\int x^{\frac{1}{3}}\,dx = -3\cdot\frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + c = -3\frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + c$$

$$= -9\frac{\sqrt[3]{x^4}}{4} + c = \frac{-9x\sqrt[3]{x}}{4} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas …

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

- Ejemplos:

$$\int \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x\, dx + \int 1 dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + x + c$$

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$= \tfrac{1}{3} x^3 - x^2 + x + c$$

$$\int \left(1 + \frac{-2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 1\, dx + \int -2x^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int 1\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= x - 2\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + c = x - 4\sqrt{x} + c$$

Ejercicio #1

1. $$\int\left(1-x^{3}+12x^{5}\right)dx=\int dx-\int x^{3}dx+12\int x^{5}dx$$
$$=x-\frac{1}{4}x^{4}+2x^{6}+c$$

2. $$\int\left(\sqrt[4]{x^{3}}\right)dx=\int x^{3/4}\,dx=\frac{x^{\frac{7}{4}}}{7/4}+c=\frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7}+c$$
$$=\frac{4x\sqrt[4]{x^{3}}}{7}+c$$

Ejercicio #2

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int e^{\mathrm{x}} \, dx = e^x + c$$

Ejemplo 2

- Encuentre la antiderivada de $f(x) = 4\sin x + \dfrac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$
- Solución: $f(x) = 4\sin x + \dfrac{2x^5}{x} - \dfrac{x^{1/2}}{x} = 4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$

$$\int \left(4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}\right) dx = \int 4\sin x\, dx + \int 2x^4 dx - \int x^{-1/2} dx$$

$$= 4\int \sin x\, dx + 2\int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx$$

$$= -4\cos x + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -4\cos x + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + c$$

Ejercicio #3

Encuentre

$$\int\left(3e^{x}+7\sec^{2}x\right)dx \qquad = 3\int e^{x}dx + 7\int \sec^{2}x\,dx$$

$$= 3e^{x} + 7\tan x + c$$

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\,dx \qquad = \int\left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx \;= \int\left(3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}\,dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \qquad = 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + c$$

Ecuaciones Diferenciales

Observe que si: $y = \int (3x^2 - 1)dx \;=\; x^3 - x \;+\; c$

Ésta ecuación se expresa como: $\int \frac{d}{dx}(x^3 - x + c)dx \;=\; x^3 - x + \; c$

En general, esto expresa: $\int \boldsymbol{F'(x)dx} \;=\; \boldsymbol{F(x)} + \; \boldsymbol{c}$

Una **ecuación diferencial** es una que contiene la derivada de una función.

Una **solución** de una ecuación diferencial es una función cuya derivada de la función.

Ejemplo: Resuelva $\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 1$

$$\mathrm{y} \;=\; \int \frac{dy}{dx}dx \;=\; \int (3x^2 - 1)dx \;=\; x^3 - x \;+\; c$$

La gráficas que las ecuaciones $\boldsymbol{y = x^3 - x + c}$ generan diferentes traslaciones verticales de las gráficas de $\boldsymbol{\mathrm{y} = \; x^3 - x}$.

Si se desea determina una solución en específco, se necesita al menos un punto de su gráfica.

Ejemplo 3

- Encuentre f si $f'(x) = 5 - 2x + x^2$ si $f(1) = 3$
- Solución: f es una antiderivada de $f'(x)$

$$f = \int (5 - 2x + x^2)\,dx = \int 5dx - \int 2x\,dx + \int x^2 dx$$

$$= 5x \quad - 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad + c$$

$$= 5x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 + c$$

- si $f(1) = 3$, entonces

$$f(1) = 5(1) - (1)^2 + \frac{1}{3}(1)^3 + c = 3$$

$$5 - 1 + \frac{1}{3} + c = 3$$

$$c = -\frac{4}{3}$$

$$f(x) = 5x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{4}{3}$$

Ejemplo 4

- Una bola es lanzada desde el topo de un edificio de $80\ pies$ de alto a una velocidad de $64\ {}^{pie}/_{seg}$. Encuentre la función que describa la altura s del objeto en el tiempo t. ¿Cuándo la bola llegará al piso?
- Solución:

Observe que $s(0)\ =\ 80$, $s'(0) = v_0\ = 64$

Además, por la acelaración de la gravedad es $-32\ p/s$.

$$s"(t)\ = -32$$

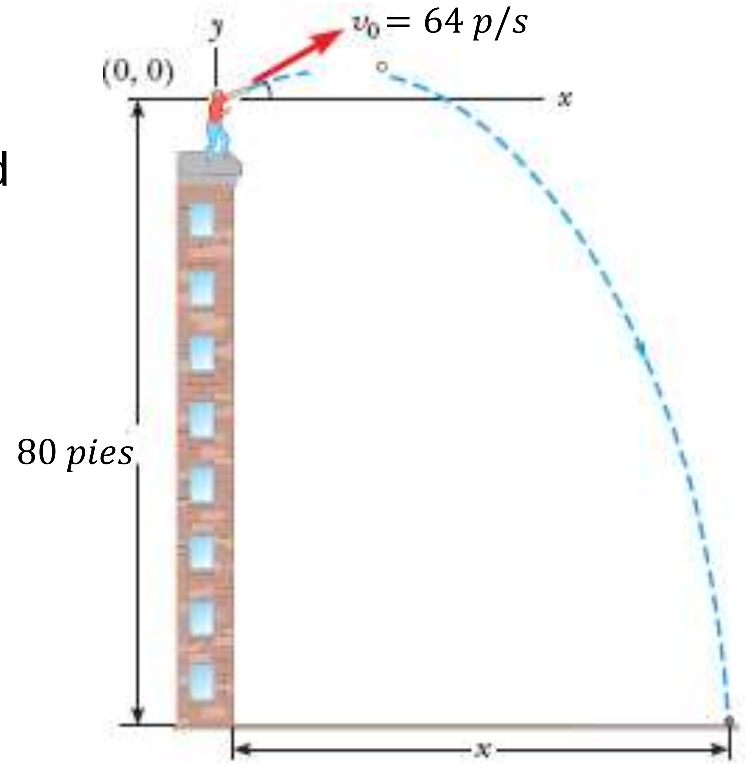
$$s'(t) = \int s"(t)\, dt = \int -32\ dt = -32t + c$$

Como $s'(0) = 64$

$$64 = -32(0) + c$$

$$64 = c$$

De modo que $s'(t) = -32t + 64$



Ejemplo 4 …

1. Encuentre la función que describa la altura s del objeto en el tiempo t.
2. ¿Cuándo la bola llegará al piso?

… Similarmete $s(t) = \int s'(t)dt$

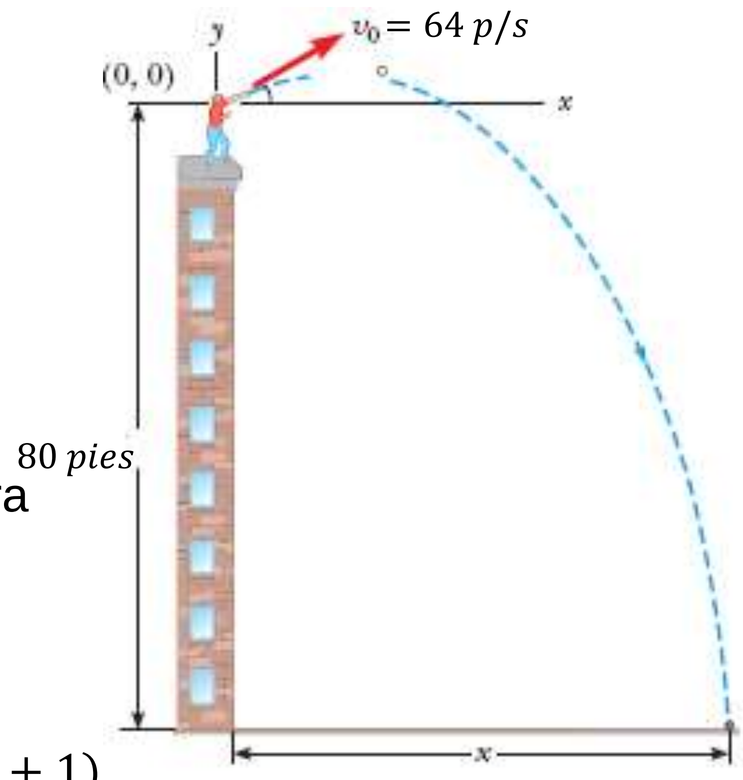
$$= \int (-32t + 64\ )\ dt$$

$$= -16t^2t + 64t + c$$

Como $s(0) = 80$

$$80 = -16t^2(0) + 64(0) + c$$

$$80 = c$$



De modo que la función que describe la altura del obeto es $\boldsymbol{s(t) = -16t^2 + 64t + 80}$

Llegará al piso cuando $s(t) = 0$

Resolviendo por $0 = -16t^2t + 64t + 80$

$$0 = t^2 - 4t - 5 = (t-5)(t+1)$$

La bola tocará el piso cuando $\boldsymbol{t = 5\ segundos}$

Fórmulas de Integración de funciones trigonométicas

- Recuerde:

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x \, du = -\ln|\csc x + cot\, x| + c$$

Resumen de Fórmulas de Integración

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln|\cos x| + c$$

$$\int \cot x \, dx = \ln|\sin x| + c$$

$$\int \sec x \, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$$

$$\int \csc x \, dx = -\ln|csc\, x + cot\, x| + c$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x + c$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

Ejercicios del Texto

7. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

8. $\int \frac{1}{4x^2}\, dx$

9. $\int \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx$

10. $\int \frac{1}{(3x)^2}\, dx$

Finding an Indefinite Integral **In Exercises 11–32, find the indefinite integral and check the result by differentiation.**

11. $\int (x + 7)\, dx$

12. $\int (13 - x)\, dx$

13. $\int (x^5 + 1)\, dx$

14. $\int (8x^3 - 9x^2 + 4)\, dx$

15. $\int (x^{3/2} + 2x + 1)\, dx$

16. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) dx$

17. $\int \sqrt[3]{x^2}\, dx$

18. $\int \left(\sqrt[4]{x^3} + 1\right) dx$

19. $\int \frac{1}{x^5}\, dx$

20. $\int \frac{3}{x^7}\, dx$

21. $\int \frac{x + 6}{\sqrt{x}}\, dx$

22. $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 5}{x^4}\, dx$

23. $\int (x + 1)(3x - 2)\, dx$

24. $\int (4t^2 + 3)^2\, dt$

25. $\int (5 \cos x + 4 \sin x)\, dx$

26. $\int (t^2 - \cos t)\, dt$

27. $\int (1 - \csc t \cot t)\, dt$

28. $\int (\theta^2 + \sec^2 \theta)\, d\theta$

29. $\int (\sec^2 \theta - \sin \theta)\, d\theta$

30. $\int \sec y (\tan y - \sec y)\, dy$

35. $f'(x) = 6x,\ f(0) = 8$

36. $g'(x) = 4x^2,\ g(-1) = 3$

37. $h'(t) = 8t^3 + 5,\ h(1) = -4$

38. $f'(s) = 10s - 12s^3,\ f(3) = 2$

39. $f''(x) = 2,\ f'(2) = 5,\ f(2) = 10$

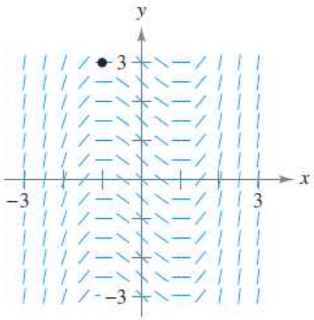
40. $f''(x) = x^2,\ f'(0) = 8,\ f(0) = 4$

41. $f''(x) = x^{-3/2},\ f'(4) = 2,\ f(0) = 0$

42. $f''(x) = \sin x,\ f'(0) = 1,\ f(0) = 6$

Slope Field **In Exercises 43 and 44, a differential equation, a point, and a slope field are given. A *slope field* (or *direction field*) consists of line segments with slopes given by the differential equation. These line segments give a visual perspective of the slopes of the solutions of the differential equation. (a) Sketch two approximate solutions of the differential equation on the slope field, one of which passes through the indicated point. (To print an enlarged copy of the graph, go to *MathGraphs.com*.) (b) Use integration to find the particular solution of the differential equation and use a graphing utility to graph the solution. Compare the result with the sketches in part (a).**

43. $\frac{dy}{dx} = x^2 - 1,\ (-1, 3)$



44. $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2},\ x > 0,\ (1, 3)$