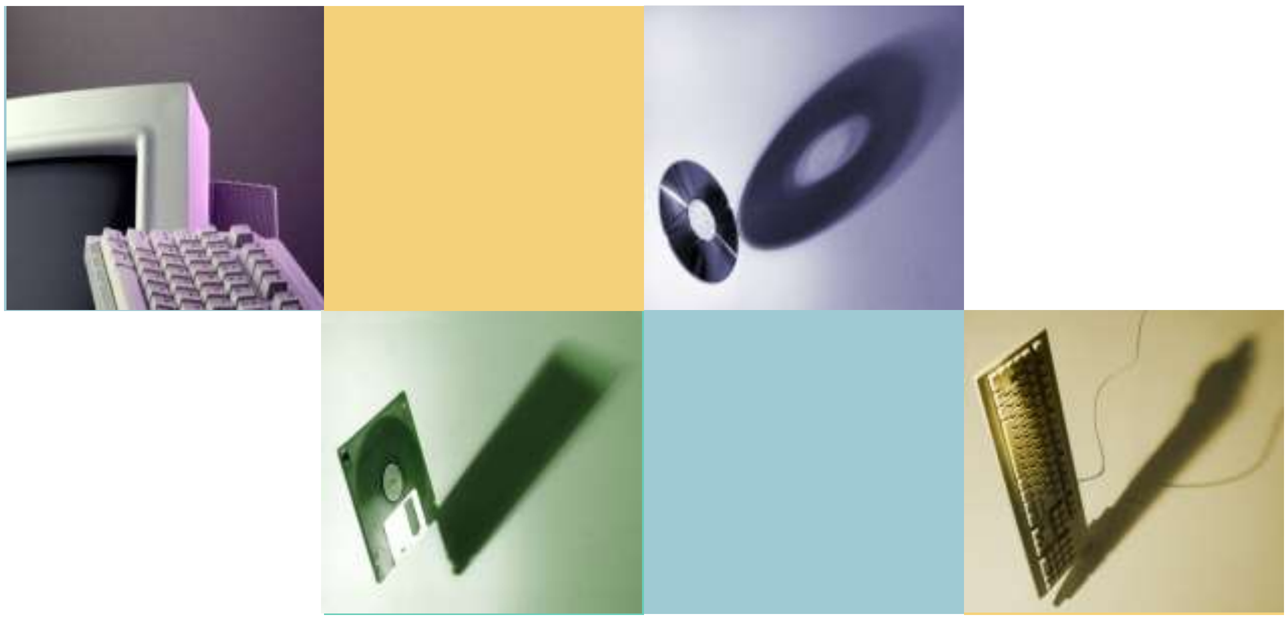
Unidad 3



La Integral Definida

Actividades 3.2

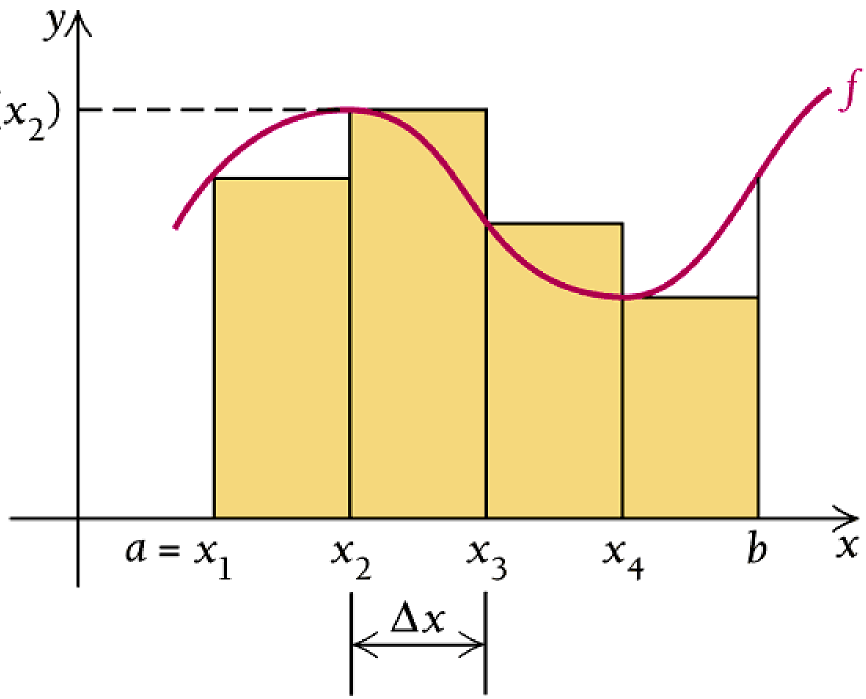
- **Referencia del Texto**: Sección 4.2 Área – Ver ejemplos 1 – 4. Ejercicios de práctica: Impares del 1 – 19. Sección 4.3 La Suma de Riemann y La Integral Definida, Ver ejemplos 1, 4, 5 y 6. Ejercicios de práctica: Impares 13 - 45
- **Asignación 3.2:** Sección 4.2 Área – problema 16, Sección 4.3 La Suma de Riemann y La Integral Definida: problemas 22 (Use GRAPH para hacer una copia de su gráfica y área a calcular), 38 y 42
- **Referencias del Web**:
  - Khan Academy – Aproximación simple de Riemann usando rectángulos; Sumas e Integrales de Riemann
  - Paul's Online Note – The Definition of the Definite Integrals
  - Visual Calc – The Definite Integral ;Tutorial el integral definido. Ilustración de cómo se evalúa el integral definido usando su definición [Flash].

Área bajo una curva

- Aproxime área bajo la curva
- Observe que se puede dividir el intervalo [a,b] en cuatro subintervalos cada uno con ancho:

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

- El largo o altura de cada rectángulo son: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$,



$$A \approx f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_4)\Delta x$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$$

Ejemplo 1

- Considere la gráfica de la siguiente función sobre el intervalo [0, 600]:

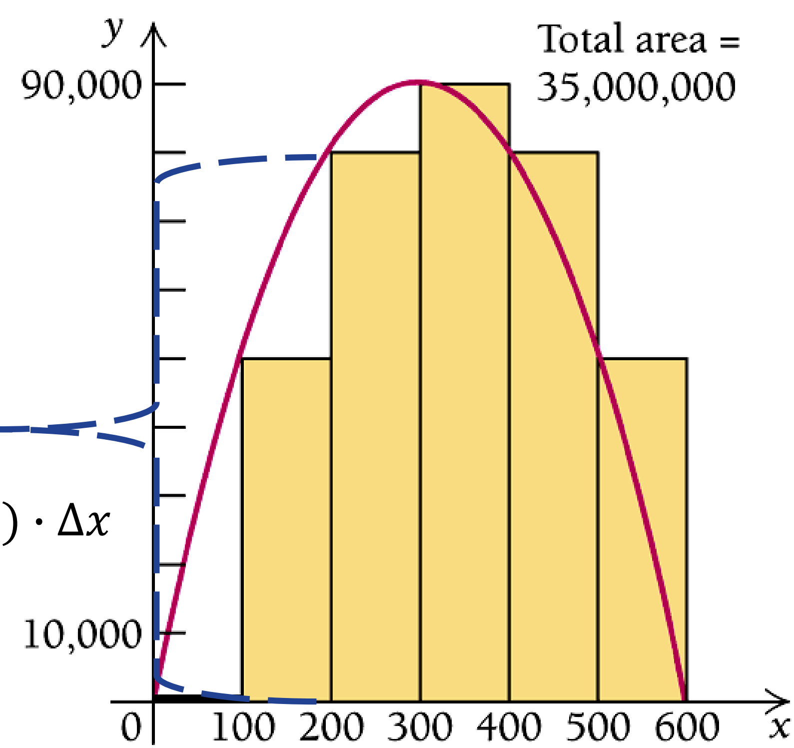
$$f(x) = 600x - x^2$$

- a) Aproxime el área dividiendo en 6 subintervalos.
- b) Aproxime el área dividiendo en 12 subintervalos.

Solución del Ejemplo 1(a)

- Divida el intervalo [0, 600] en 6 intervalos del mismo tamaño con x_i entre $x_1 = 0$ y $x_6 = 500$.
- Observe que: $\Delta x = \dfrac{600 - 0}{6} = 100,$

$f(200)$



Área del rectángulo entre 200 y 300 = $f(200) \cdot \Delta x$

Área bajo la gráfica entre 200 y 300 ≈

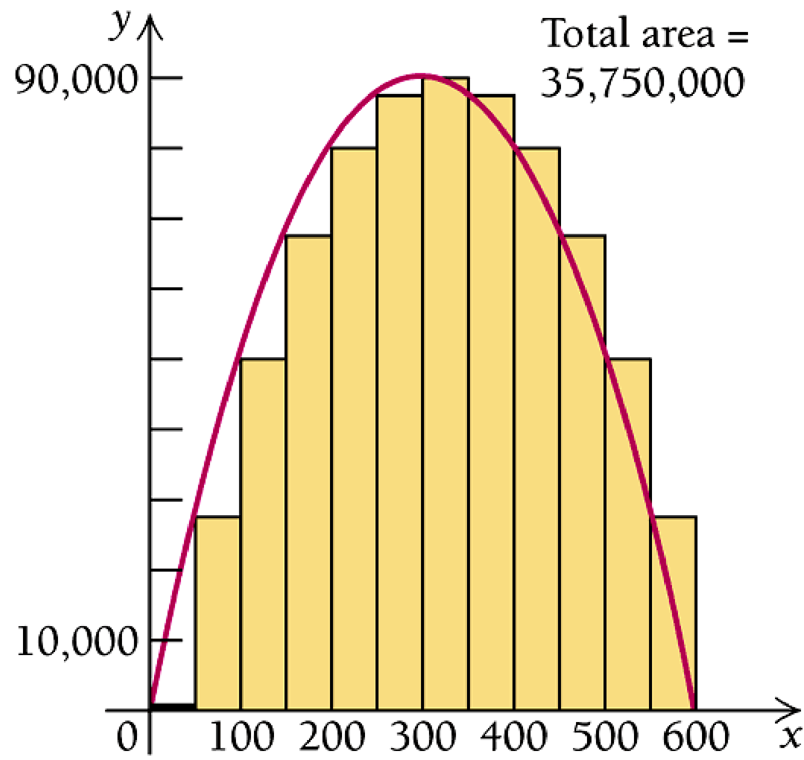
$$f(0) \cdot \Delta x + f(100) \cdot \Delta x + f(200) \cdot \Delta x + f(300) \cdot \Delta x + f(400) \cdot \Delta x + f(500) \cdot \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) \cdot \Delta x \approx 35{,}000{,}000$$

Solución del Ejemplo 1(b)

- Divida el intervalo [0, 600] en 12 intervalos del mismo tamaño con x_i entre $x_1 = 0$ y $x_{12} = 550$.
- En este caso: $\Delta x = \dfrac{600 - 0}{12} = 50,$

$$\sum_{i=1}^{12} f(x_i) \cdot \Delta x \approx 35{,}750{,}000$$



Notación Sigma

- Se usa para abreviar la suma de términos en una sucesión.

$$\sum_{x=1}^{5}(x^2-1) = (1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1)+(5^2-1)$$

$$= (0) + (3) + (8) + (15) + (24)$$

$$= 50$$

$$\sum_{i=1}^{10}(2i-5) = \sum_{i=1}^{10}(2i) - \sum_{i=1}^{10}(5)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{10}(i) - 5(10)$$

$$= 2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) - 50$$

$$= 110 - 50 = 60$$

Ejemplo 2

- Calcule

$$\sum_{x=1}^{3}(x^2 - \cos(\pi x)) = \left((1)^2 - \cos(\pi(1))\right) + \left((2)^2 - \cos(\pi(2))\right) + \left((3)^2 - \cos(\pi(3))\right)$$

$$= (1 - \cos(\pi) + (4 - \cos(2\pi)) \ + (9 - \cos(3\pi))$$

$$= (1 - (-1) \ + (4 - (1)) + (9 - (-1))$$

$$= (2) \qquad + (3) \quad + (10)$$

$$= 15$$

Integral definida

- Si f es una función continua definida en el intervalo [a,b], dividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$ y se elige un punto en cada intervalo x_i . Entonces, la integral definida de f, desde a a b es:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

La Suma de Riemann

- **Teorema Fundamental del Cálculo**: Si F es una antiderivada de f. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 3

- Evalúe el integral

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx = \frac{x^3}{3}+x\Big]_{-1}^{2}$$

$$=\left[\frac{(2)^3}{3}+(2)\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3}+(2)\right]-\left[-\frac{1}{3}+(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{14}{3}\right]-\left[-\frac{4}{3}\right]=\left[\frac{18}{3}\right]=6$$

Ejercicio #1

a) $$\int_0^3 e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

b) $$\int_{-1}^{4} \left(x^2 - x\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{4}$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2}\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{85}{6} \quad \text{ó} \quad 14\frac{1}{6}$$

Ejemplo 4

- Evalúe el integral. Luego, aproxime a la milésima más cercana y trace la gráfica del integrando.

$$\int_1^e \left(1 + 2x - \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= \left(x + x^2 - \ln|x|\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(e + e^2 - \ln|e|\right) - \left(1 + 1^2 - \ln|1|\right)$$

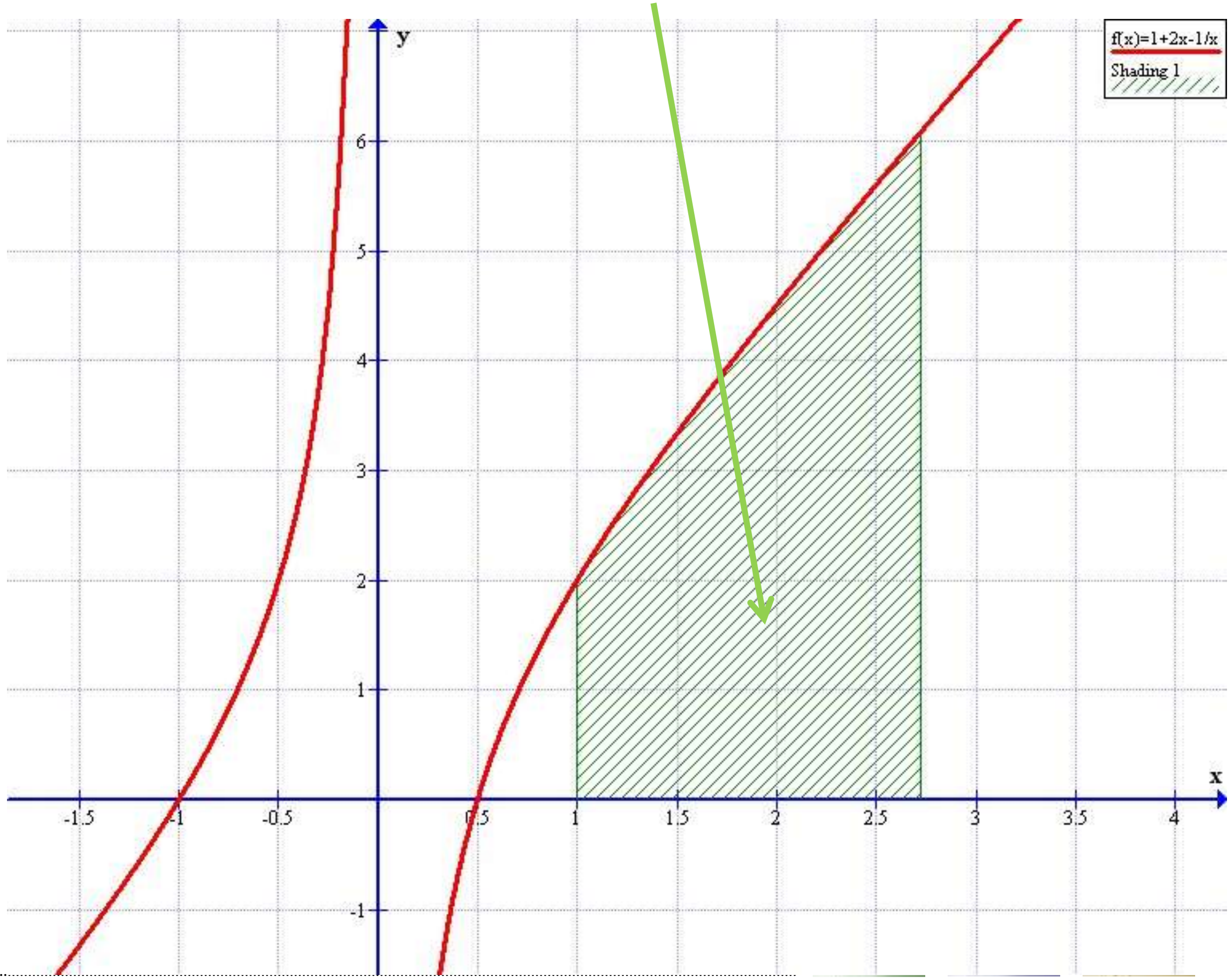
$$= \left(e + e^2 - 1\right) - \left(1 + 1 - 0\right)$$

$$= e + e^2 - 3$$

$$\approx 7.107337927 \quad \approx 7.107$$

Ejemplo 4 …

$$\int_{1}^{e}\left(1+2x-\frac{1}{x}\right)dx \;=e+e^{2}-3\approx 7.107$$



Área bajo la gráfica de una función

- Si f es una función continua, no negativa el área entre la gráfica de f y el eje de x en el intervalo [a, b] está determinado por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

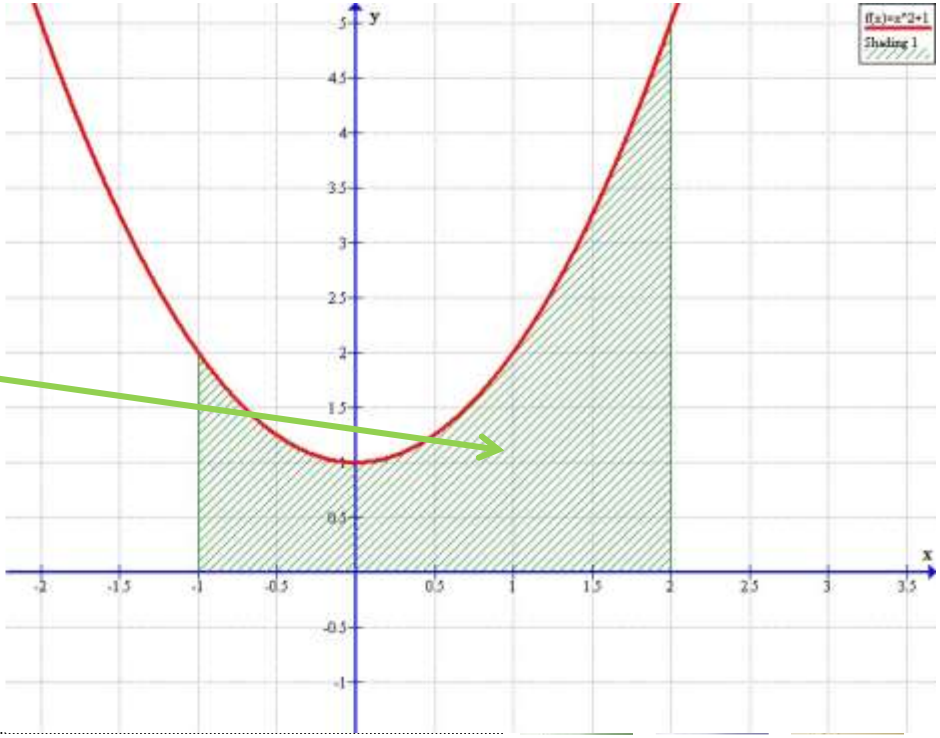
- Observe: La función debe ser continua y no negativa

Ejemplo 5

- Calcule el área bajo la curva de la siguiente función f(x) = x^2 +1 sobre el intervalo [– 1, 2].
- Solución:
- Observe que la función f es una función polinómica, por tanto es continua en todo su domio.
- Además, es positiva en el intervalo [-1, 2]

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)\,dx = \left.\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}$$

$$= 6$$



Ejercicio # 2

- Calcule el área bajo la gráfica de la función sobre el intervalo [2, 5]. Luego, aproxímelo a la centésima más cercana.
- Solución: Observe que f es continua y positiva en el intervalo [2, 5], de modo que:

$$f(u) = \frac{u-2}{\sqrt{u}}$$

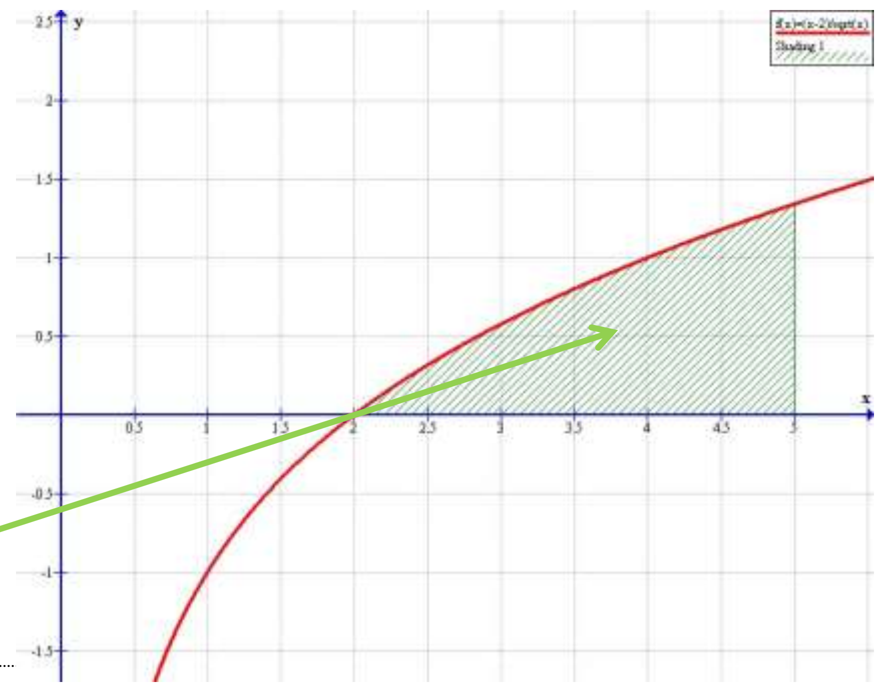
$$\int_2^5 \left(\frac{u-2}{\sqrt{u}} \right) du = \int_2^5 \left(\frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}} \right) du$$

$$= \int_2^5 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{-1}{2}} \right) du = \left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 4u^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_2^5$$

$$= \left(\frac{2(5)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4(5)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{2(2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4(2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\approx (-1.490711985) - (-3.771236166)$$

$$\approx 2.28$$



Propiedades de la Integral Definida

1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
2. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$
3. Si c es un número tal qe a< c <b,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo 7

- Si $\int_0^{10} f(x)dx$ = 17 y $\int_0^{8} f(x)dx$ = 12, encuentre $\int_8^{10} f(x)dx$.

- Solución:

$$\int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx$$

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^{8} f(x)dx$$

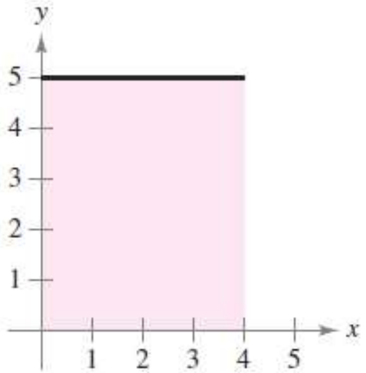
$$\int_8^{10} f(x)dx = 17 - 12$$

$$\int_8^{10} f(x)dx = 5$$

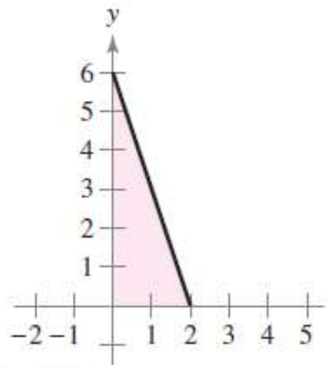
Ejercicios del Texto

- Establezca un integral definido para calcular el área de la región

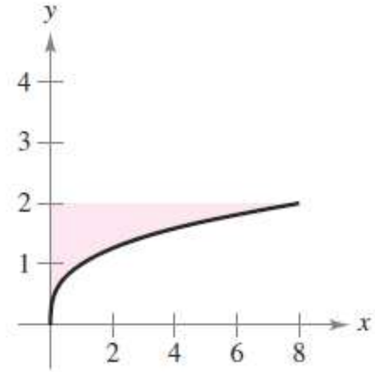
13. $f(x) = 5$



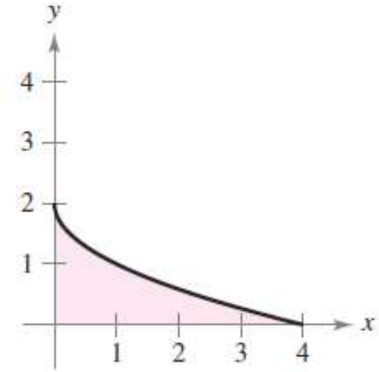
14. $f(x) = 6 - 3x$



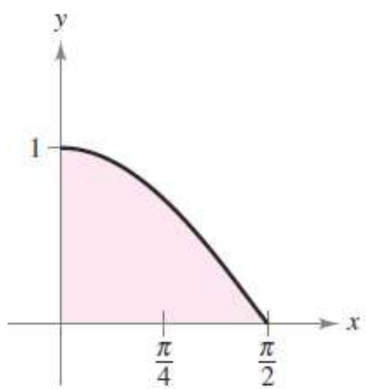
21. $g(y) = y^3$



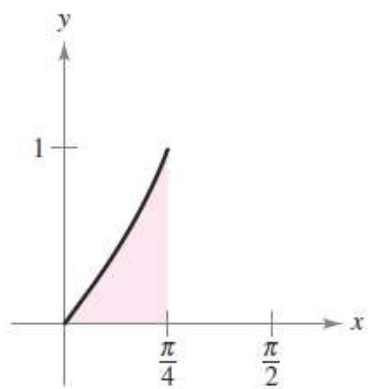
22. $f(y) = (y - 2)^2$



19. $f(x) = \cos x$



20. $f(x) = \tan x$



Calcule los siguientes integrales. Luego, use GRAPH para dibujar área y use la fórmula geométrica para calcular el área.

23. $\displaystyle\int_0^3 4\,dx$

24. $\displaystyle\int_{-4}^6 6\,dx$

25. $\displaystyle\int_0^4 x\,dx$

26. $\displaystyle\int_0^8 \frac{x}{4}\,dx$

Ejercicios del Texto …

$$\int_2^4 x^3\,dx = 60, \qquad \int_2^4 x\,dx = 6, \qquad \int_2^4 dx = 2$$

33. $\displaystyle\int_4^2 x\,dx$

34. $\displaystyle\int_2^2 x^3\,dx$

35. $\displaystyle\int_2^4 8x\,dx$

36. $\displaystyle\int_2^4 25\,dx$

37. $\displaystyle\int_2^4 (x-9)\,dx$

38. $\displaystyle\int_2^4 (x^3+4)\,dx$

39. $\displaystyle\int_2^4 \left(\tfrac{1}{2}x^3-3x+2\right)dx$

40. $\displaystyle\int_2^4 (10+4x-3x^3)\,dx$

41. Using Properties of Definite Integrals Given

$$\int_0^5 f(x)\,dx = 10 \quad \text{and} \quad \int_5^7 f(x)\,dx = 3$$

evaluate

(a) $\displaystyle\int_0^7 f(x)\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_5^0 f(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_5^5 f(x)\,dx.$ (d) $\displaystyle\int_0^5 3f(x)\,dx.$

42. Using Properties of Definite Integrals Given

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 4 \quad \text{and} \quad \int_3^6 f(x)\,dx = -1$$

evaluate

(a) $\displaystyle\int_0^6 f(x)\,dx.$ (b) $\displaystyle\int_6^3 f(x)\,dx.$

(c) $\displaystyle\int_3^3 f(x)\,dx.$ (d) $\displaystyle\int_3^6 -5f(x)\,dx.$