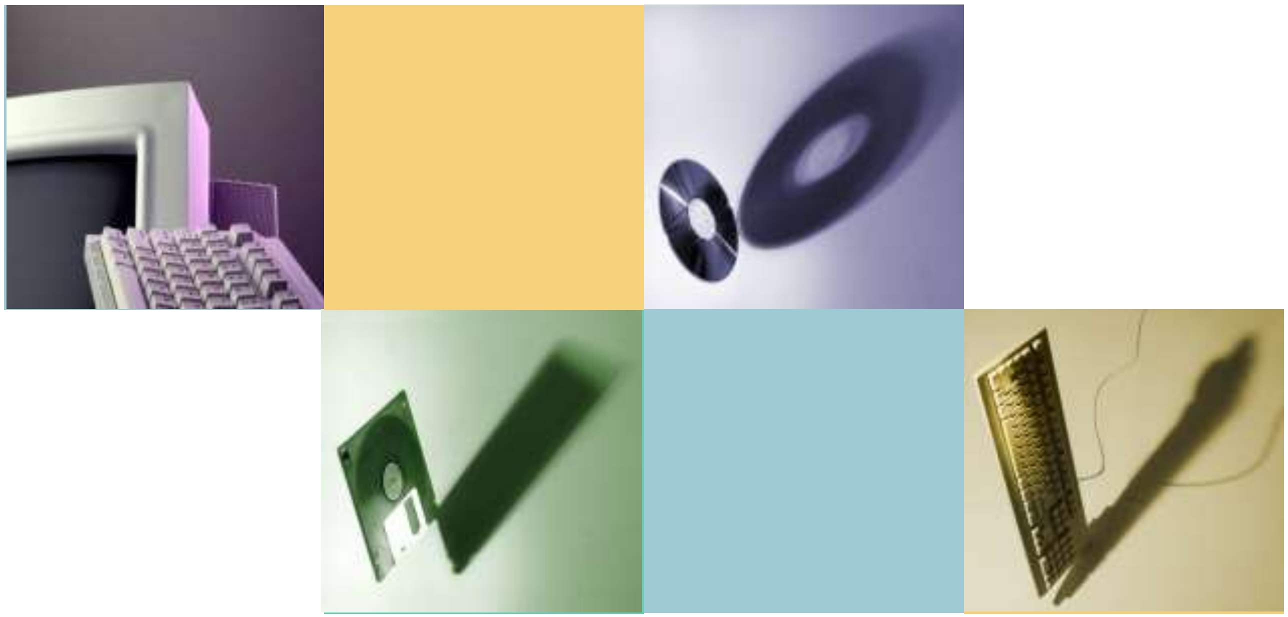
Unidad 3



Integración por Sustitución

Actividades 3.3

- **Referencia del Texto**: Sección 4.5 Integración por Sustitución, Ver ejemplos 1 al 9; Ejercicios de Práctica: Impares 1 – 41, 55-63
- **Asignación 3.3**: Sección 4.5 Integración por Sustitución,problemas18, 30, 32
- **Referencias del Web**:
- Math2me: Cuando utilizar la ingegral por sustitución; Funciones con potencia –parte 1; Funciones con potencia Parte 2; Caso especial de una integral por sustitución.
- Julio Profe – Integrales directas – Ejercicio 1 ; Ejercicio 2; Ejercicio 3; Ejercicio 4; Ejercicio 5; Ejercicio 6; Ejercicio 7 y 8; Ejercicio 9
- Visual Calculus: Tutorial: Integration using Substitution Ejercicios: Integration by Substitution.
- Paul's Online Math Notes - Substitution Rule for the Indefinite Integrals ; More Substituion Rule; Substitution Rule for Definite Integrals.

Regla de la sustitución

- Sea u una función diferenciable y F una función tal que F’(u) = f(u). Entonces,

$$\int f(u)u'(x)dx = F(u) + c$$

- Pasos a seguir:

1. Seleccione $\boldsymbol{u}$ y calcule el diferencial $\boldsymbol{du}$.
2. Exprese el integral en términos de $\boldsymbol{u}$.
3. Integre.
4. Exprese resultado en términos de variable original

Ejemplo 1

- Encuentre: $$\int (x^2+1)^4\,2x\,dx$$
- Solución:

1. Seleccione ***u*** y calcule ***du***:

$$u = x^2 + 1$$
$$\frac{du}{dx} = 2x$$
$$du = 2x\,dx$$

2. Escriba el integral en términos de u:

$$= \int u^4\,du$$

3. Integre:

$$= \frac{u^5}{5} + c$$

4. Exprese resultado en términos de variable original

$$= \frac{(x^2+1)^5}{5} + c$$

$$\Longrightarrow \quad \int (x^2+1)^4\,2x\,dx = \frac{(x^2+1)^5}{5} + c$$



Ejemplo 2

- Encuentre: $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x - 8)}{x}\,dx \;= \int \cos(\ln x - 8)\cdot \frac{1}{x}\,dx$
- Solución:

$$u = \ln x - 8$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int \cos(u)\,du$$

$$= \sin(u) + c$$

$$= \sin(\ln x - 8) + c$$

$$\Longrightarrow \int \frac{\cos(\ln x - 8)}{x}\,dx = \sin(\ln x - 8) + c$$

Ejemplo 3

- Encuentre: $\int x^2\left(2x^3-5\right)^3 dx = \int \left(2x^3-5\right)^3 x^2 dx$
- Solución:

$$u = 2x^3 - 5$$

$$du = 6x^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \left(2x^3-5\right)^3 6x^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}\int u^3 du$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{u^4}{4} + c$$

$$= \frac{\left(2x^3-5\right)^4}{24} + c$$

$$\Rightarrow \int x^2\left(2x^3-5\right)^3 dx = \frac{\left(2x^3-5\right)^4}{24} + c$$

Ejemplo 4

- Encuentre: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx$
- Solución:

$$u = 1-4x^2$$

$$du = -8x\,dx$$

$$= \int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}} x\,dx$$

$$= \int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot \frac{-8}{-8} \cdot x\,dx$$

$$= \frac{-1}{8} \cdot \int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot -8x\,dx$$

$$= \frac{-1}{8} \int u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{-1}{8} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{-u^{\frac{1}{2}}}{4} + c$$

$$= \frac{-\sqrt{1-4x^2}}{4} + c$$

$$\Rightarrow \quad \int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{-\sqrt{1-4x^2}}{4} + c$$

Ejercicio #1

- Calcule: $\int x^2 e^{-4x^3}\,dx$ $= \int e^{-4x^3} \cdot x^2\,dx$
- Solución:

$$u = -4x^3$$

$$du = -12x^2\,dx$$

$$= \frac{-1}{12}\int e^{-4x^3} \cdot -12x^2\,dx$$

$$= \frac{-1}{12}\int e^u\,du$$

$$= \frac{-1}{12}e^u + c$$

$$= \frac{-e^{-4x^3}}{12} + c$$

$$\Rightarrow \int x^2 e^{-4x^3}\,dx = \frac{-e^{-4x^3}}{12} + c$$

Ejercicio #2

- Calcule: $\int \left(1-\frac{1}{w}\right)\cos(w-\ln w)\,dw$

- Solución:

$$u = w - \ln w$$
$$du = \left(1-\frac{1}{w}\right)dw$$

$$= \int \cos(w-\ln w)\left(1-\frac{1}{w}\right)dw$$

$$= \int \cos u\,du$$

$$= \sin u + c$$

$$= \sin(w-\ln w) + c$$

$$\int \left(1-\frac{1}{w}\right)\cos(w-\ln w)\,dw = \sin(w-\ln w) + c$$

Ejemplo 5

- Calcule: $\int \sin(\pi - x)(2 - \cos(\pi - x))^4 \, dx$
- Solución:

$$u = 2 - \cos(\pi - x)$$

$$\frac{du}{dx} = \sin(\pi - x)\frac{d}{dx}(\pi - x)$$

$$du = -\sin(\pi - x)dx$$

$$= -\int (2 - \cos(\pi - x))^4 \cdot -\sin(\pi - x)dx$$

$$= -\int (u)^4 du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + c$$

$$= -\frac{(2 - \cos(\pi - x))^5}{5} + c$$

Ejercicio #3

- Calcule: $\int \cos 3z \cdot \sin^{10}(3z)\, dz$
- Solución:

$$\sin^{10}(3z) = (\sin 3z)^{10}$$

$$u = \sin 3z$$

$$\frac{du}{dz} = \cos 3z \cdot \frac{d}{dz} 3z$$

$$du = 3\cos 3z\, dz$$

$$= \frac{1}{3}\int (\sin 3z)^{10} \cdot 3\cos 3z\, dz$$

$$= \frac{1}{3}\int (u)^{10} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{\sin^{11} 3z}{33} + c$$

Ejemplo 6

- Compare:

$$\int \frac{3}{5y+4}dy$$

$$u = 5y+4$$

$$du = 5dy$$

$$\frac{3}{5}\int \frac{1}{5y+4}5dy$$

$$= \frac{3}{5}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{3}{5}\ln\left|5y+4\right| + c$$

$$\int \frac{3y}{5y^2+4}dy$$

$$u = 5y^2+4$$

$$du = 10ydy$$

$$\frac{3}{10}\int \frac{1}{5y^2+4}10ydy$$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{1}{u}du$$

$$= \frac{3}{10}\ln\left|5y^2+4\right| + c$$

$$\int \frac{3y}{\left(5y^2+4\right)^2}dy$$

$$u = 5y^2+4$$

$$du = 10ydy$$

$$\frac{3}{10}\int \frac{1}{(5y^2+4)^2}10ydy$$

$$= \frac{3}{10}\int \frac{1}{u^2}du$$

$$= \frac{-3}{10\left(5y^2+4\right)} + c$$

Ejercicios #4

- Calcule:

$$\int x^2 e^{-4x^3}\,dx \quad = -\frac{1}{12}\int e^{-4x^3}\cdot -12x^2\,dx \quad = -\frac{1}{12}e^{-4x^3}+c$$

$$\int \cos^3 x \sin x\,dx \;= \int (\cos x)^3 \cdot -\sin x\,dx \quad = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c$$

$$\int \frac{x^2}{7-x^3}\,dx \quad = -\frac{1}{3}\int \frac{1}{7-x^3}\cdot -3x^2\,dx \quad = -\frac{1}{3}\ln\left|7-x^3\right|+c$$

$$\int x^3\cos(5x^4)\,dx \;= \frac{1}{20}\int \cos(5x^4)\cdot 20x^3\,dx \quad = \frac{1}{20}\sin(5x^4)+c$$

Ejemplo 7

- Calcule: $\displaystyle\int_{-1}^{0}(x+1)^{25}dx$
- Solución:

$$u = x+1$$
$$du = dx$$

- Calcule los límites de integración en términos de u.

$$u(-1)=(-1)+1=0$$
$$u(0)=(0)+1=1$$

- Proceda con la sustitución. Incluya los nuevos límites de integración

$$\int_{-1}^{0}(x+1)^{25}dx = \int_{0}^{1}u^{25}du$$

$$=\left.\frac{u^{26}}{26}\right|_{0}^{1} = \left(\frac{(1)^{26}}{26}\right)-\left(\frac{(0)^{26}}{26}\right)=\frac{1}{26}$$

Ejemplo 8

- Calcule: $$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}dx$$
- Solución:

$$u = \ln x$$

$$du = \frac{1}{x}dx$$

- Calcule los límites de integración en términos de u.

$$u(1) = \ln 1 = 0$$

$$u(e) = \ln e = 1$$

- Proceda con la sustitución. Incluya los nuevos límites de integración

$$\int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \int_0^1 u\,du$$

$$= \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ejercicios #5

- Calcule:

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^3 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left.\frac{u^4}{4}\right|_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\left.u^4\right|_1^2\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(2^4-1^4\right) = \frac{15}{8}$$

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)^{\frac{-1}{2}}\,2dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left.\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2}\right)\right|_1^9$$

$$= \left.u^{\frac{1}{2}}\right|_1^9 = 9^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}} = 2$$