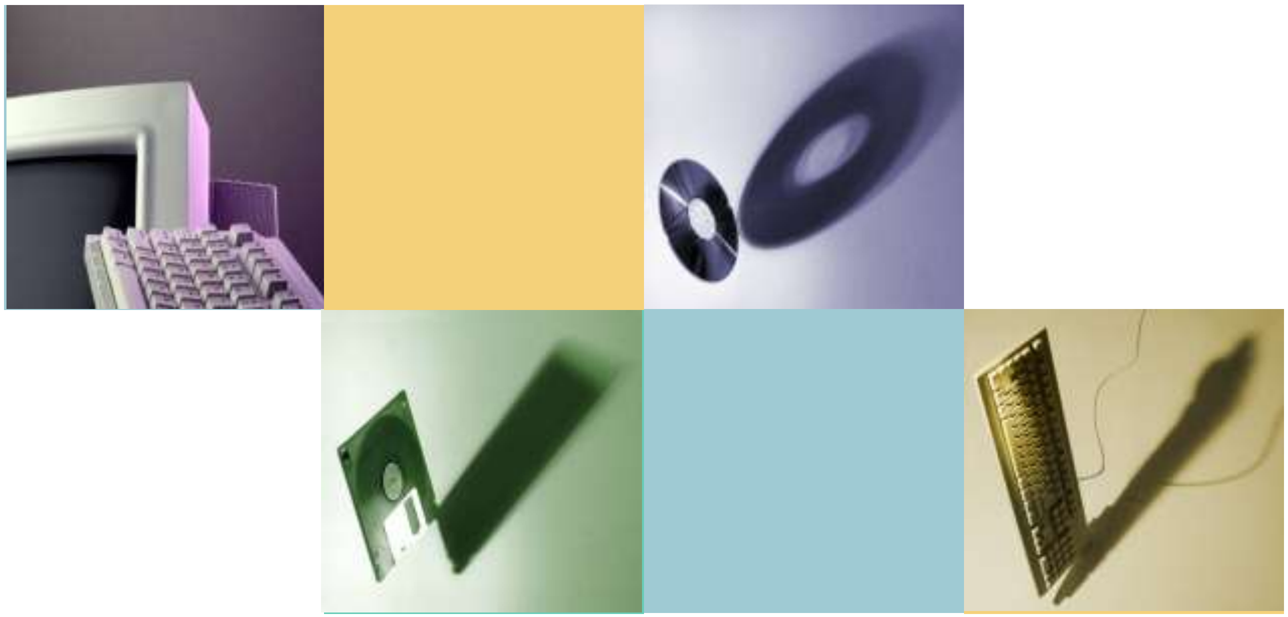
Lección 3.1



Integración por partes

Objetivos

Al finalizar esta lección podrá:

- Enunciar la fórmula de integración por partes.
- Reconocer cuándo se debe usar el método de integración por partes para integrar.
- Usar la fórmula de Integración por partes para hallar la integral indefinida.
- Usar la fórmula de Integración por partes para hallar la integral definida.

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES

Ejemplo 1

- Compare $\int e^{x}dx \quad = e^{x}+c$

$$\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$$

$$\int xe^{x^2}dx \quad = \frac{1}{2}\int e^{x^2}\,2x\,dx \quad = \frac{1}{2}e^{x^2} + \text{c}$$

$$\int xe^{x}dx$$

1. Seleccione ***u*** y ***dv***. $\quad u = x \qquad dv = e^{x}dx$
2. Calcule ***du*** y ***v***. $\quad du = dx \qquad v = \int e^{x}dx \quad = e^{x}$
3. Sustituya en la fórmula y simplifique.

$$\int u\cdot dv \;=\; uv \;-\; \int v\cdot du$$

$$\int xe^{x}dx \;= (x)\cdot(e^{x}) - \int (e^{x})\cdot(dx)$$

$$= xe^{x} - e^{x} \; + c$$

Ejemplo 2

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

- Evalúe $\int x \sin x \, dx$

$$u = x \qquad dv = \sin x \, dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \sin x dx = -\cos x$$

$$\int u \cdot dv = uv \quad - \quad \int v \cdot du$$

$$\int x \sin x \, dx \;= (x)\cdot(-\cos x) \;- \int (-\cos x)\cdot(dx)$$

$$= -x \cos x + \int \cos x dx$$

$$= -x \cos x + \sin x + c$$

Ejemplo 2 ….

- ¿Qué hubiera pasado si al evaluar $\int x \sin x \, dx$ se seleciona otra u?

$$u = \sin x \qquad dv = x\,dx$$

$$du = \cos x dx \qquad v = \int x\,dx = \frac{1}{2}x^2$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int x \sin x \, dx = (\sin x) \cdot (\frac{1}{2}x^2) - \int (\frac{1}{2}x^2) \cdot (\cos x\, dx)$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \sin x + \frac{1}{2}\int x^2 \cos x dx$$

- Observe que se obtiene un integral más complejo que la original.

Ejercicio #1

- Evalúe $\int x\cos x\,dx$

$$u = x \qquad dv = \cos x\,dx$$

$$du = dx \qquad v = \int \cos x dx = \sin x$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int x\cos x\,dx = (x)\cdot(\sin x) - \int (\sin x)\cdot(dx)$$

$$= x\sin x - (-\cos x) + c$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

Ejemplo 3

- Calcule $\int xe^{6x}dx$

$$u = x \qquad dv = e^{6x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^{6x}dx = \frac{1}{6}\int e^{6x}6\,dx = \frac{e^{6x}}{6}$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int xe^{6x}dx = (x)\cdot\left(\frac{e^{6x}}{6}\right) - \int\left(\frac{e^{6x}}{6}\right)\cdot(dx)$$

$$= \frac{xe^{6x}}{6} - \frac{1}{6}\int e^{6x}dx$$

$$= \frac{xe^{6x}}{6} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\int e^{6x}\cdot 6\,dx = \frac{xe^{6x}}{6} - \frac{e^{6x}}{36} + c$$

Ejercicio #2

- Evalúe $\int (3t+5)\cos(\frac{t}{4})dt$

$$u = 3t + 5 \quad dv = \cos(\frac{t}{4})dt$$

$$du = 3dt \qquad v = \int \cos\frac{t}{4}dt = 4\int \cos\frac{t}{4}\cdot\frac{1}{4}dt = 4\sin\frac{t}{4}$$

$$\int u\cdot dv = uv - \int v\cdot du$$

$$\int (3t+5)\cos(\frac{t}{4})dt = (3t+5)\cdot 4\sin\frac{t}{4} - \int 4\sin\frac{t}{4}\cdot 3dt$$

$$= (12t+20)\sin\frac{t}{4} - 12\cdot 4\int \sin\frac{t}{4}\cdot\frac{1}{4}dt$$

$$= (12t+20)\sin\frac{t}{4} + 48\cos\frac{t}{4} + c$$

Ejemplo 4

- Evalúe $\int x^2 \ln x \, dx$
- Observe que $u = x^2$, $dv = \ln x \, dx$ no es la mejor opción a lo menos que conozca integrar $\ln x$:

$$u = \ln x \qquad dv = x^2 \, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int x^2 \ln x \, dx = (\ln x) \cdot \left(\frac{1}{3} x^3 \right) - \int \left(\frac{1}{3} x^3 \right) \cdot \left(\frac{1}{x} dx \right)$$

$$= \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 \, dx = \frac{1}{3} x^3 \ln x - \frac{1}{9} x^3 + c$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

FÓRMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES PARA EL INTEGRAL DEFINIDO

Ejemplo 5 (Integral definida)

Calcule $\displaystyle\int_{-1}^{2} xe^{6x}dx$

$$u = x \qquad dv = e^{6x}dx$$

$$du = dx \qquad v = \int e^{6x}dx = \frac{e^{6x}}{6}$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$\int_{-1}^{2} xe^{6x}dx = x \cdot \frac{e^{6x}}{6}\Bigg|_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \frac{e^{6x}}{6} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[(2)e^{6(2)} - (-1)e^{6(-1)}\right] - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \int_{-1}^{2} e^{6x} 6dx$$

$$= \frac{1}{6}\left[2e^{12} + e^{-6}\right] - \frac{1}{36}\left[e^{6(2)} - e^{6(-1)}\right]$$

$$= \frac{1}{3}e^{12} + \frac{1}{6}e^{-6} - \frac{1}{36}\left[e^{12} - e^{-6}\right]$$

$$= \frac{1}{3}e^{12} + \frac{1}{6}e^{-6} - \frac{1}{36}e^{12} + \frac{1}{36}e^{-6} = \frac{11}{36}e^{12} + \frac{7}{36}e^{-1}$$

Ejercicio #3

- Evalúe $\int_1^e x^3 \ln x\,dx$

$$u = \ln x \qquad dv = x^3\,dx$$

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

$$du = \frac{1}{x}dx \qquad v = \int x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$$

$$\int_1^e x^3 \ln x\,dx = (\ln x)\cdot\left(\frac{1}{4}x^4\right)\Bigg|_1^e - \int_1^e \left(\frac{1}{4}x^4\right)\cdot\left(\frac{1}{x}dx\right)$$

$$= \left(\frac{1}{4}e^4 \ln e - 0\right) - \frac{1}{4}\int_1^e \left(x^3\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}e^4 \quad - \frac{1}{16}x^4\Bigg|_1^e$$

$$= \frac{1}{4}e^4 - \left(\frac{1}{16}e^4 - \frac{1}{16}1^4\right) = \frac{3e^4+1}{16}$$

Ejemplo 6 (Factorizando)

- Calcule $\int x^5\sqrt{x^3+1}\,dx \;=\int x^3\cdot x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

$$u = x^3 \qquad\qquad dv = x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$du = 3x^2dx \qquad\qquad v = \int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\int\left(x^3+1\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 3x^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\,\frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{2}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}}$$

Continúa …

Ejemplo 6 ….

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$\int x^5 \sqrt{x^3+1}\, dx = x^3 \cdot \frac{2}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{2}{9}\left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 3x^2 dx$$

$$= \frac{2}{9} x^3 \left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \int \left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 3x^2 dx$$

$$= \frac{2}{9} x^3 \left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \cdot \frac{\left(x^3+1\right)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{9} x^3 \left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{5} \left(x^3+1\right)^{\frac{5}{2}}$$

$$= \frac{2}{9} x^3 \left(x^3+1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{45} \left(x^3+1\right)^{\frac{5}{2}} + c$$

Ejemplo 7 (Integrando de un sólo término)

- Calcule $\int \sin^{-1} x \, dx$

$$u = \sin^{-1} x \qquad dv = 1\,dx$$

$$du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx \qquad v = \int 1\,dx \quad = x$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$= \sin^{-1} x \cdot x \;\; - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= x\sin^{-1} x \; - \left(-\frac{1}{2}\right)\int \left(1-x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot -2x dx$$

$$= x\sin^{-1} x \; + \left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \; + c$$

Ejercicio #4

- Calcule $\int \ln x \, dx$

$$u = \ln x \qquad dv = 1\, dx$$

$$du = \frac{1}{x} dx \qquad v = \int 1\, dx \quad = x$$

$$\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$$

$$= \ln x \cdot x \ - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= x \ln x \ - \int 1\, dx$$

$$= x \ln x - x \ \ + c$$

Resumen de los integrales más comunes usando IP

1. Para integrales de la forma

$$\int x^n e^{ax}\,dx \qquad \int x^n \sin ax\,dx \qquad \int x^n \cos ax\,dx \qquad u = x^n$$

2. Para integrales de la forma

$$\int x^n \ln x\,dx \qquad \int x^n \sin^{-1} ax\,dx \qquad \int x^n \tan^{-1} ax\,dx$$

$$u = \ln x \qquad u = \sin^{-1} x \qquad u = \tan^{-1} x$$

3. Para integrales de la forma

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx \qquad \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

$$u = \sin bx \qquad u = \cos bx$$

Actividades 3.1

- Ejercicios de Práctica: Página 398: Impares 1 – 31
- Referencias:
  - Visual Calc – Drill1 Integration by parts (interactivo); Drill 2 Integration by parts