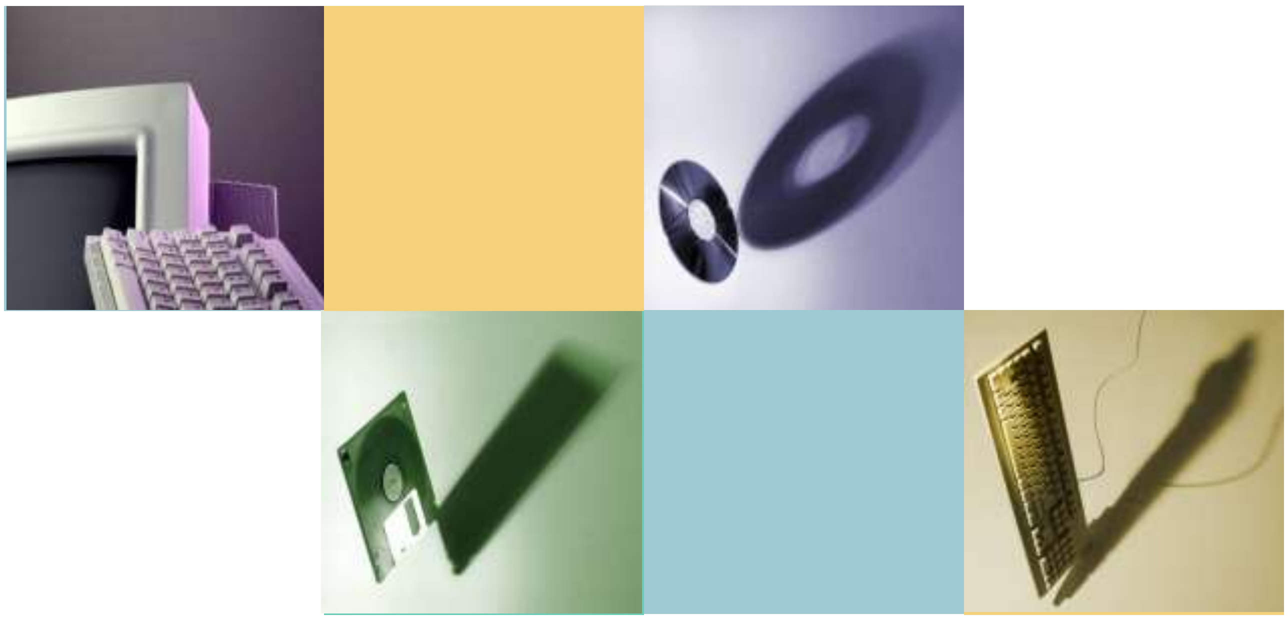
Lección 1.1



Antiderivadas y La Integral Indefinida

Objetivo

- Describir la antiderivada de una función
- Usar la notación de la integral indefinida para antiderivadas
- Identificar la antiderivada de funciones trigonométricas, exponenciales y logarítmicas básicas.
- Usar las reglas básicas de integración para encontrar la Integral Indefinida de una función polinómica.

Antiderivada

- Una función F es la **antiderivada de f** sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.

- Ejemplo: $F(x) = x^2 + x - 5$
- es una antiderivada de $f(x) = 2x + 1$
- Otras son:

$$F_1(x) = x^2 + x + 1 \quad F_2(x) = x^2 + x + \pi \quad F_3(x) = x^2 + x$$

- En general, si F es una función antiderivada de f sobre un intervalo I, cualquier otra antiderivada de f será de la forma $F(x)$ + c donde c es una constante.

Integral indefinida

- La *integral indefinida* de $f(x)$ se define como el conjunto de todas las antiderivadas F de $f(x)$.

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

donde c es una constante.

- Ejemplos:

$$\int (2x+1)dx = x^2 + x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + c$$

Ejemplo 1

1. Determine las antiderivadas de $f(x) = sin\ x$

$$\int \sin x\, dx$$

- Como

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x \qquad \int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

2. Determine $\int \sec^2 x\, dx$

- Como

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x \qquad \int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

Otras antiderivadas para recordar ..

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x + c$$

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + c$$

$$\int e^{x} \, dx = e^{x} + c$$

$$\int a^{x} \, dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^{2}} \, dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}} \, dx = \sin^{-1} x + c$$

Reglas básicas de antiderivadas

- Recuerde

$$\int k\,dx = kx + c$$

Ejemplos:

$$\int 5\,dx = 5x + c$$

$$\int dx = x + c$$

$$\int \pi\,dx = \pi x + c$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c\ ,\ n \neq -1$$

Ejemplos:

$$\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4} + c$$

$$\int x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas …

- Si f, g son las funciones antiderivables en un intervalo. Entonces: $\int cf\,(\mathrm{x})\,dx = c\int f\,(\mathrm{x})\,dx$
- Ejemplos:

$$\int 5\cos x\,dx = 5\int \cos x\,dx = 5\sin x + c$$

$$\int 6x^2\,dx = 6\int x^2\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3}\right] + c = 2x^3 + c$$

$$\int -3\cdot\pi^{x}\,dx = -3\int \pi^{x}\,dx = -3\cdot\frac{\pi^{x}}{\ln\pi} + c = \frac{-3\pi^{x}}{\ln\pi} + c$$

Reglas básicas de antiderivadas …

- Si f, g son las funciones antiderivables. Entonces:

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$$

- Ejemplos:

$$\int \left(x^2 - 2x + 1\right) dx = \int x^2 dx - 2\int x dx + \int 1 dx$$

$$c = c_1 + c_2 + c_3$$

$$= \frac{x^3}{3} - 2\cdot\frac{x^2}{2} + x + c$$

$$= \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + c$$

$$\int \left(1 + \frac{-2}{\sqrt{x}}\right) dx = \int 1\, dx - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \int 1\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= x - 2\left[\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right] + c = x - 4\sqrt{x} + c$$

Ejercicio #1

1. $$\int\left(1-x^{3}+12x^{5}\right)dx = \int dx-\int x^{3}dx+12\int x^{5}dx$$
$$= x-\frac{1}{4}x^{4}+2x^{6}+c$$

2. $$\int\left(\sqrt[4]{x^{3}}\right)dx = \int x^{3/4}\,dx = \frac{x^{\frac{7}{4}}}{7/4}+c = \frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7}+c$$
$$= \frac{4x\sqrt[4]{x^{3}}}{7}+c$$

3. $$\int\left(1-\frac{6}{x}\right)dx = \int dx-6\int\frac{1}{x}\,dx = x-6\ln|x|+c$$

Ejercicio #2

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

Ejemplo 2

- Encuentre las antiderivadas de $f(x) = 4\sin x + \dfrac{2x^5 - \sqrt{x}}{x}$

- Solución: $f(x) = 4\sin x + \dfrac{2x^5}{x} - \dfrac{x^{1/2}}{x} \quad = 4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}$

$$\int \left(4\sin x + 2x^4 - x^{-1/2}\right) dx \quad = \int 4\sin x\, dx + \int 2x^4 dx - \int x^{-1/2} dx$$

$$= 4\int \sin x\, dx + 2\int x^4 dx - \int x^{-1/2} dx$$

$$= -4\cos x + 2\frac{x^5}{5} - \frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}} + c$$

$$= -4\cos x + \frac{2}{5}x^5 - 2\sqrt{x} + c$$

Ejercicio #3

$$\int 2e^x\, dx = 2e^x + c$$

$$\int \frac{1}{5\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{1}{5}\sin^{-1} x + c$$

$$\int a^x\sqrt{3}\, dx = \frac{a^x\sqrt{3}}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{-6}{1+x^2}\, dx = -6\tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -1\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = -\sin^{-1} x + c$$

Observe que hay otra solución ...

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \cos^{-1} x + c$$

¡Estas dos son equivalentes!

Ejercicio #4

Encuentre

$$\int \left(3e^x + 7\sec^2 x\right)dx \quad = 3\int e^x dx + 7\int \sec^2 x\, dx$$

$$= 3e^x + 7\tan x + c$$

$$\int \frac{3x-2}{\sqrt{x}}\, dx \quad = \int\left(\frac{3x}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx \quad = \int\left(3x^{\frac{1}{2}} - 2x^{-\frac{1}{2}}\right)dx$$

$$= 3\int x^{\frac{1}{2}}\, dx - 2\int x^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

$$= 3\cdot\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - 2\cdot\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \quad = 2x\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + c$$

Ejemplo 3

- Encuentre una función f si $f'(x) = 5^x + \dfrac{-10}{\sqrt{1-x^2}}$ si $f(1) = 3$

- Solución: f es una antiderivada de $f'(x)$

$$f = \int \left(5^x + \frac{-10}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx = \int 5^x\,dx + \int \left(\frac{-10}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5} + 10 \int \left(\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx$$

$$= \frac{5^x}{\ln 5} + 10 \cos^{-1} x + c$$

Solución del Ejemplo 3 …

- Si $f(1) = 3$

$$f(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 10\cos^{-1} x + c$$

$$3 = \frac{5^{(1)}}{\ln 5} + 10\cos^{-1}(1) + c$$

$$3 = \frac{5}{\ln 5} + 0 + c$$

$$c = 3 - \frac{5}{\ln 5}$$

$$f(x) = \frac{5^x}{\ln 5} + 10\cos^{-1} x + 3 - \frac{5}{\ln 5}$$

Ejemplo 4

Determine si la siguiente aseveración es cierta:

$$\int \left(-10x^4 - 3x^2 + 4x + 1\right) dx = -2x^5 - x^3 + 2x^2 + x + 2$$

Solución:

$$\frac{d}{dx}\left(-2x^5 - x^3 + 2x^2 + x + 2\right) = -10x^4 - 3x^2 + 4x + 1$$

¡Es cierto!

Ejemplo 5

Determine la solución general de la ecuación diferencial:

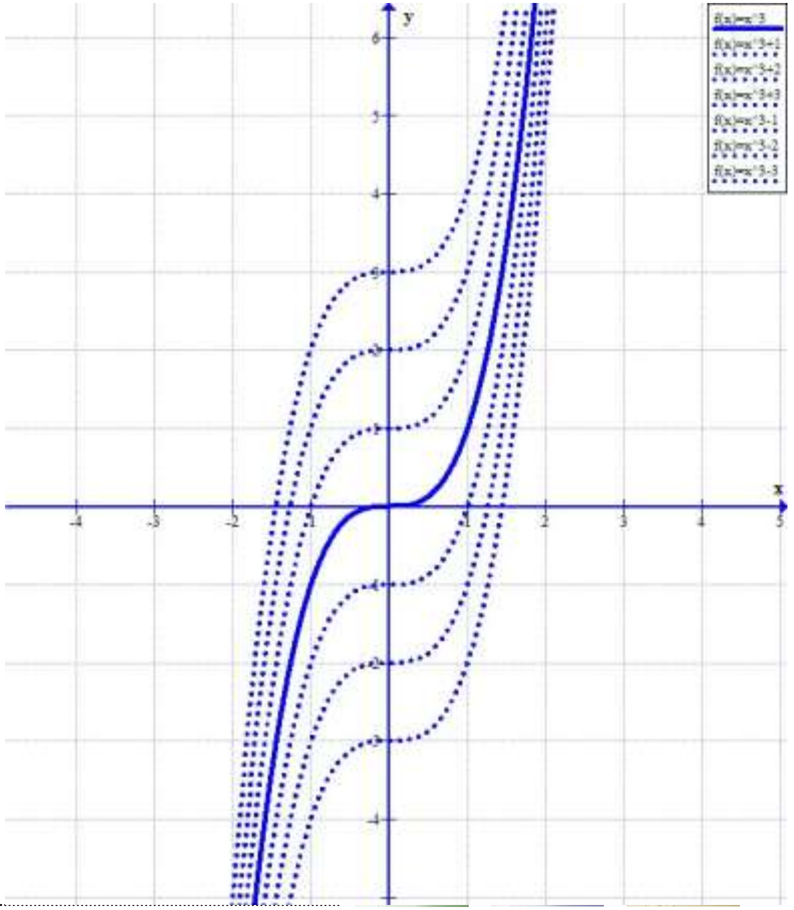
$$\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

- Solución:

$$\int \frac{dy}{dx} dx = \int 3x^2 dx$$

$$y = \frac{3x^3}{3} + c$$

$$y = x^3 + c$$



Integral indefinido

- Observe

$$\int 3x\,dx \qquad \int 3t\,dt \qquad \int 3z\,dz$$

$$= \frac{3x^2}{2} + c \qquad = \frac{3t^2}{2} + c \qquad = \frac{3z^2}{2} + c$$

- Compare

$$\int 3x\,dt \qquad \int 3t\,dx \qquad \int 3z\,dx$$

- Recuerde: Al integrar, observe siempre con respecto a qué variable lo está haciendo.
- ¡Observe el diferencial! … ***dx, dt, dz***



Ejercicio #5

$$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c$$

$$\int \sin x\, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x\, dx = \sin x + c$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \tan^{-1} x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln|x| + c$$

$$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sin^{-1} x + c$$

$$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + c$$

$$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + c$$

Actividades 1.1

- **Ejercicios de Práctica**: Problemas impares 1 – 27 de las páginas 224.
- Referencias del Web:
  - Paul's Online Note – Indefinite Integrals
  - Visual Calc - Antiderivatives / Indefinite Integrals; Tutorial sobre antiderivadas y el integral indefinido. Table of Elementary Indefinite Integrals. Ejercicios de práctica (Drill) usa Java.
  - eMathLab – Indefinite Integrals