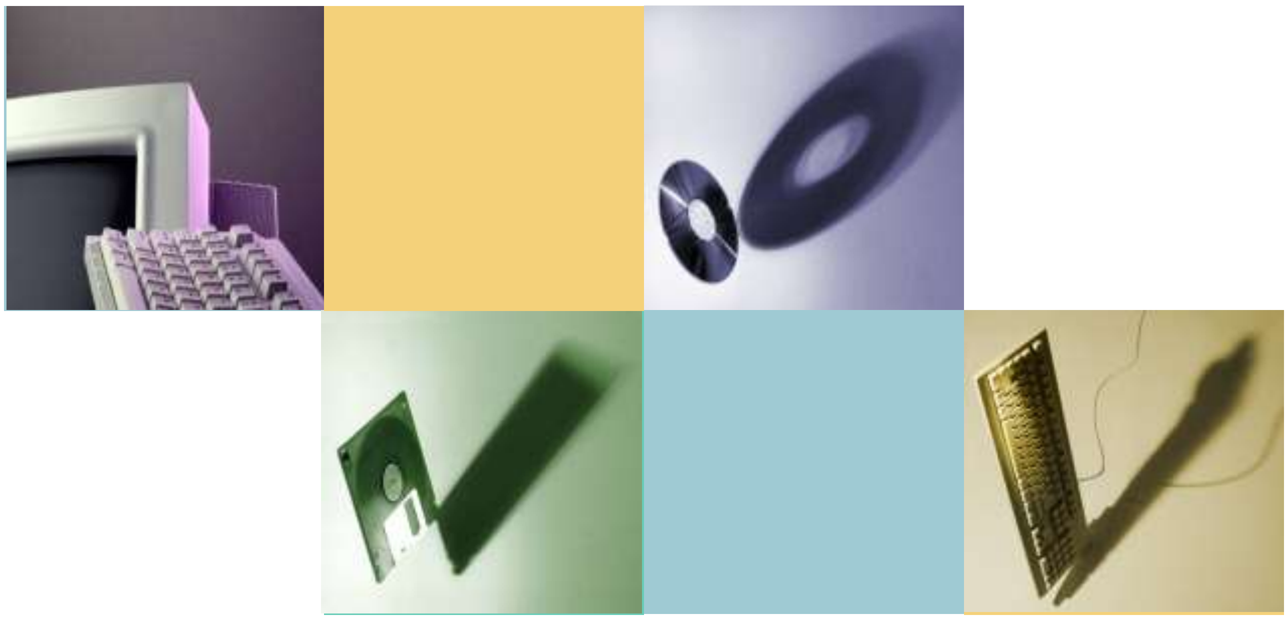
Lección 1.2



La Integral Definida

Objetivos Capacitantes

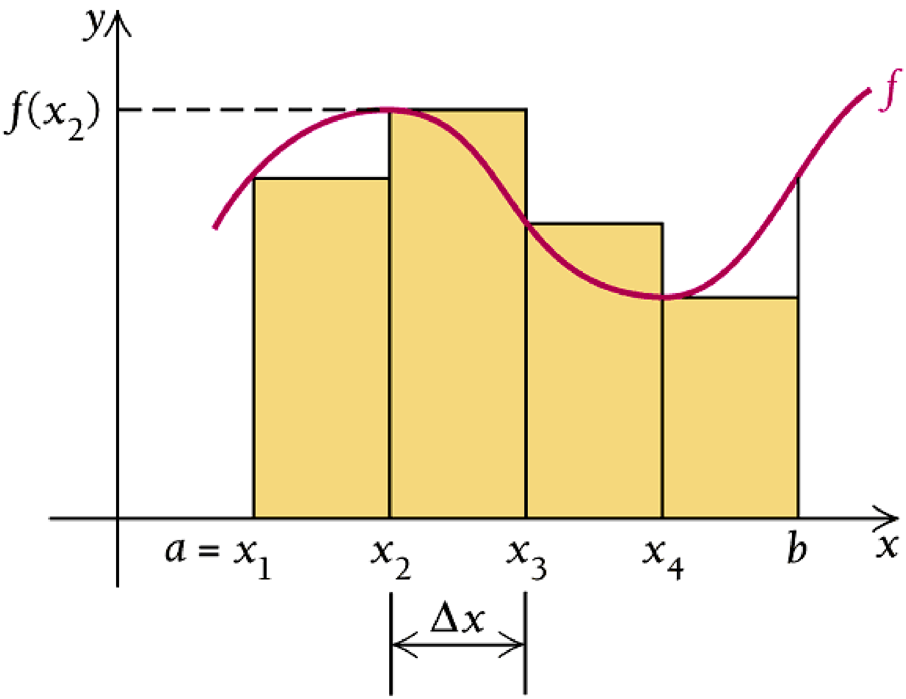
- Calcular la suma de términos expresado en notación de sigma.
- Describir el integral definido.
- Calcular el integral definido de una función continua sobre un intervalo [a, b]
- Aproximar el área entre la gráfica de una función continua y positiva, y el eje de x.
- Usar el Teorema Fundamental de Cálculo para el calcular la integral definida y funciones de la integral definida.
- Usar las propiedades del integral definido para evaluar integrales.

Área bajo una curva

- Aproxime área bajo la curva
- Observe que se puede dividir el intervalo [a,b] en cuatro subintervalos cada uno con ancho:

$$\Delta x = \frac{b-a}{4}$$

- El largo o altura de cada rectángulo son: $f(x_1)$, $f(x_2)$, $f(x_3)$, $f(x_4)$,



$$A \approx f(x_1)\Delta x + \ldots + f(x_4)\Delta x$$

$$A \approx \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$$

Ejemplo 1

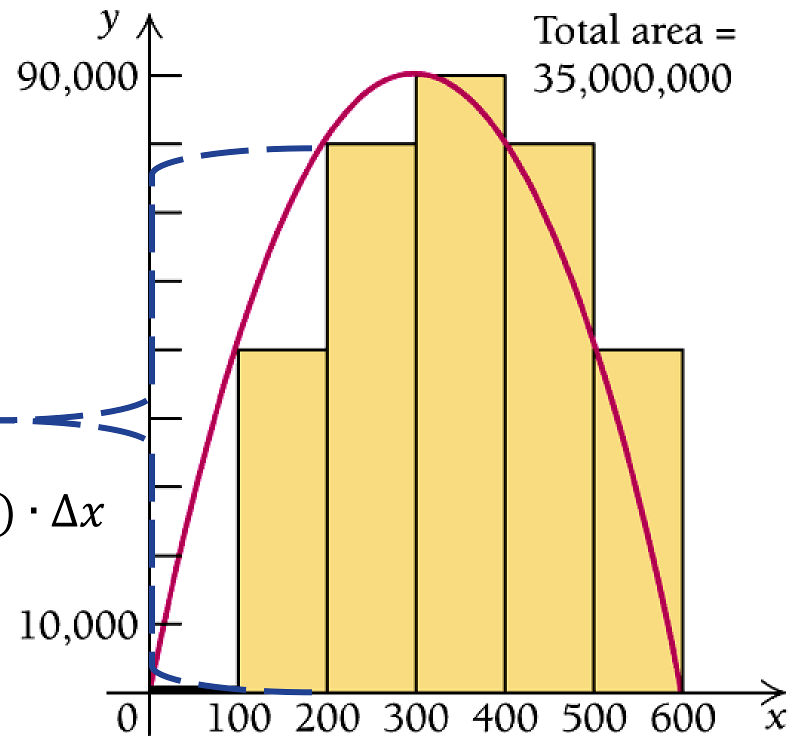
- Considere la gráfica de la siguiente función sobre el intervalo [0, 600]:

$$f(x) = 600x - x^2$$

- a) Aproxime el área dividiendo en 6 subintervalos.
- b) Aproxime el área dividiendo en 12 subintervalos.

- Divida el intervalo [0, 600] en 6 intervalos del mismo tamaño con x_i entre $x_1 = 0$ y $x_6 = 500$.
- Observe que: $$\Delta x = \frac{600 - 0}{6} = 100,$$

$f(200)$



Área del rectángulo entre 200 y 300 = $f(200) \cdot \Delta x$

Área bajo la gráfica entre 200 y 300 ≈

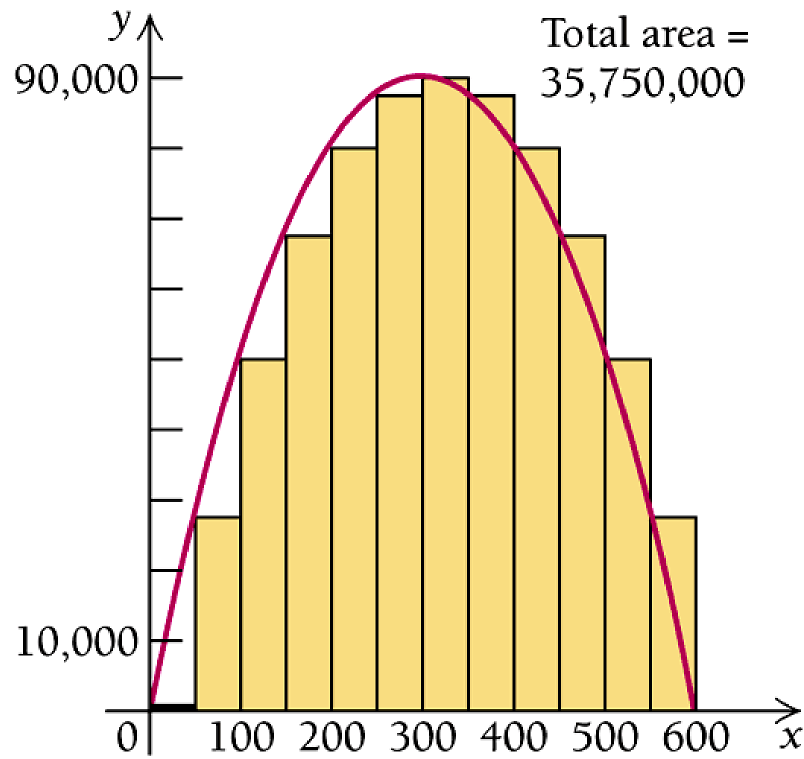
$$f(0) \cdot \Delta x + f(100) \cdot \Delta x + f(200) \cdot \Delta x + f(300) \cdot \Delta x + f(400) \cdot \Delta x + f(500) \cdot \Delta x$$

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) \cdot \Delta x \approx 35{,}000{,}000$$

Solución del Ejemplo 1(b)

- Divida el intervalo [0, 600] en 12 intervalos del mismo tamaño con x_i entre $x_1 = 0$ y $x_{12} = 550$.
- En este caso: $\Delta x = \dfrac{600 - 0}{12} = 50,$

$$\sum_{i=1}^{12} f(x_i) \cdot \Delta x \approx 35{,}750{,}000$$



Notación Sigma

- Se usa para abreviar la suma de términos en una sucesión.

$$\sum_{x=1}^{5}(x^2-1) = (1^2-1)+(2^2-1)+(3^2-1)+(4^2-1)+(5^2-1)$$

$$= (0) + (3) + (8) + (15) + (24)$$

$$= 50$$

$$\sum_{i=1}^{10}(2i-5) = \sum_{i=1}^{10}(2i) - \sum_{i=1}^{10}(5)$$

$$= 2\sum_{i=1}^{10}(i) - 5(10)$$

$$= 2(1+2+3+4+5+6+7+8+9+10) - 50$$

$$= 110-50 = 60$$

Ejemplo 2

- Calcule

$$\sum_{x=1}^{3}(x^2-\cos(\pi x)) = ((1)^2-\cos(\pi(1)) \ +((2)^2-\cos(\pi(2))+((3)^2-\cos(\pi(3))$$

$$= (1-\cos(\pi)+(4-\cos(2\pi)) \ +(9-\cos(3\pi))$$

$$= (1-(-1) \ +(4-(1))+(9-(-1))$$

$$= (2) \qquad +(3) \quad +(10)$$

$$= 15$$

Integral definida

- Si f es una función continua definida en el intervalo [a,b], dividimos el intervalo [a,b] en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = (b-a)/n$ y se elige un punto en cada intervalo x_i . Entonces, la integral definida de f, desde a a b es:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

La Suma de Riemann

- **Teorema Fundamental del Cálculo**: Si F es una antiderivada de f. Entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dx = F(b) - F(a).$$

Ejemplo 3

- Evalúe el integral

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx = \left.\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}$$

$$=\left[\frac{(2)^3}{3}+(2)\right]-\left[\frac{(-1)^3}{3}+(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{8}{3}+(2)\right]-\left[-\frac{1}{3}+(-1)\right]$$

$$=\left[\frac{14}{3}\right]-\left[-\frac{4}{3}\right]=\left[\frac{18}{3}\right]=6$$

Ejercicio #1

a) $$\int_0^3 e^x dx = \left(e^x\right)\Big|_0^3 = e^3 - e^0 = e^3 - 1$$

b) $$\int_{-1}^{4} \left(x^2 - x\right) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{4}$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - \frac{4^2}{2}\right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{64}{3} - \frac{16}{2}\right) - \left(\frac{-1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{64}{3} - 8 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{85}{6} \quad \text{ó} \quad 14\frac{1}{6}$$



Ejemplo 4

- Evalúe el integral. Luego, aproxime a la milésima más cercana y trace la gráfica del integrando.

$$\int_1^e \left(1 + 2x - \frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \left(x + x^2 - \ln|x|\right)\Big|_1^e$$

$$= \left(e + e^2 - \ln|e|\right) - \left(1 + 1^2 - \ln|1|\right)$$

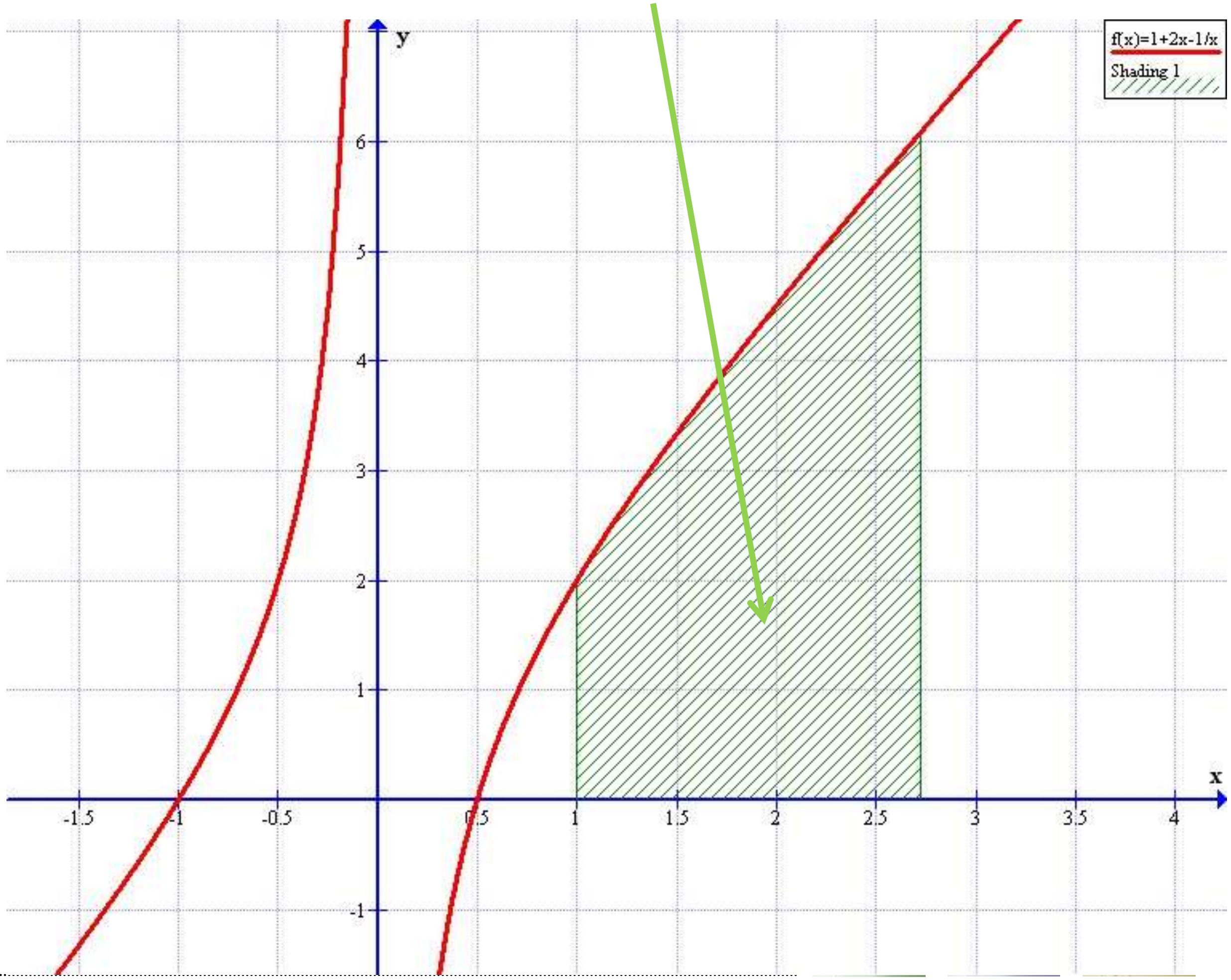
$$= \left(e + e^2 - 1\right) - \left(1 + 1 - 0\right)$$

$$= e + e^2 - 3$$

$$\approx 7.107337927 \quad \approx 7.107$$

Ejemplo 4 …

$$\int_1^e \left(1+2x-\frac{1}{x}\right)dx \;\; = e+e^2-3 \approx 7.107$$



Área bajo la gráfica de una función

- Para encontrar el área entre la gráfica de una función continua, no negativa y el eje de x el intervalo [a, b] calcule:

$$\int_a^b f(x)dx$$

- Observe: La función debe ser continua y no negativa

Ejemplo 5

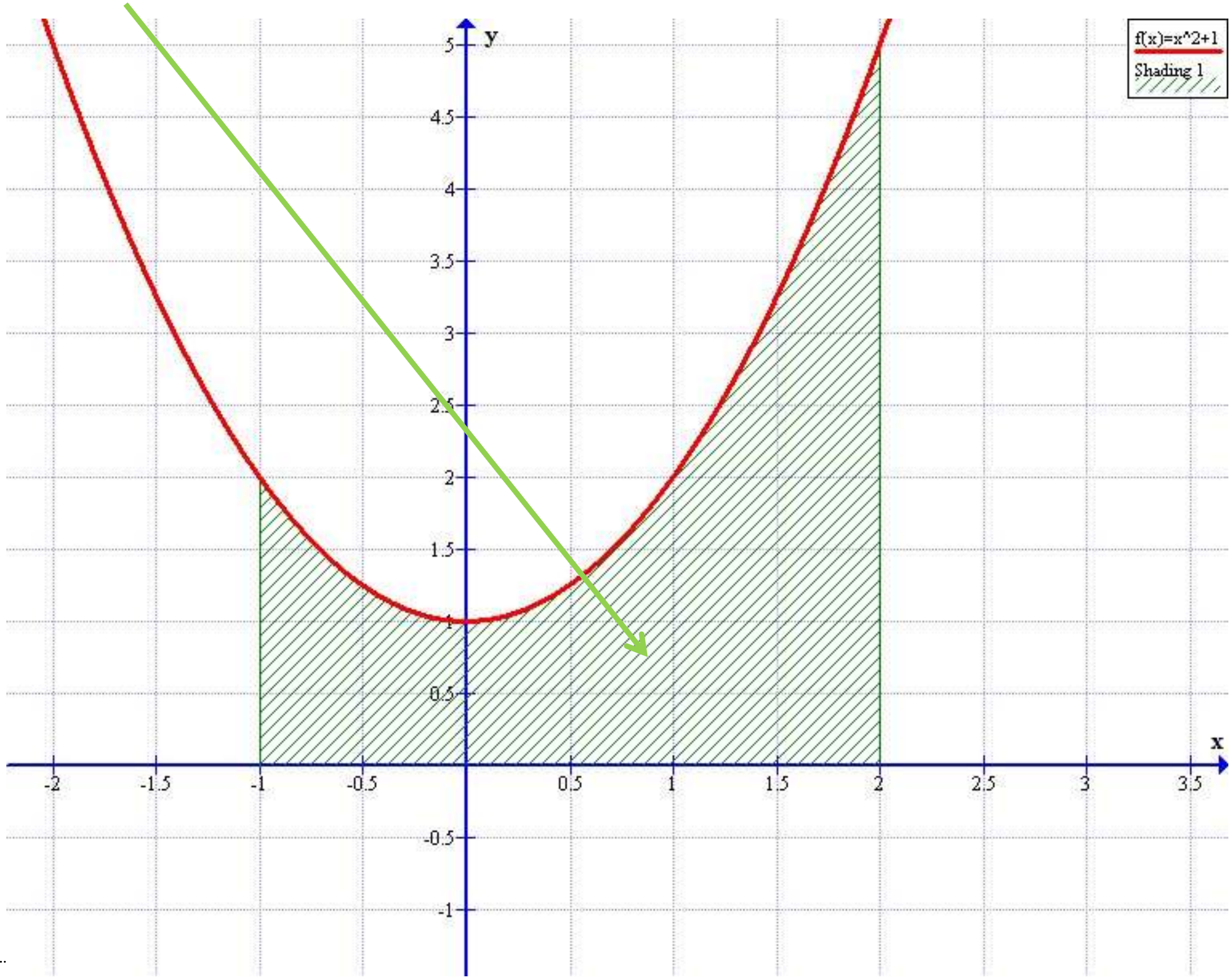
- Calcule el área bajo la curva de la siguiente función f(x) = x^2 +1 sobre el intervalo [– 1, 2].
- Solución:
- Observe que la función f es una función polinómica, por tanto es continua en todo su domio.
- Además, es positiva en el intervalo [-1, 2]

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx = \left.\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{2}$$

$$= 6$$

Ejemplo 5 …

$$\int_{-1}^{2}(x^2+1)dx \;=6$$



Ejercicio # 2

- Calcule el área bajo la gráfica de la función sobre el intervalo [2, 5]. Luego, aproxímelo a la centésima más cercana.

$$f(u) = \frac{u-2}{\sqrt{u}}$$

- Solución: Observe que f es continua y no negativa en el intervalo [2, 5], de modo que:

$$\int_2^5 \left(\frac{u-2}{\sqrt{u}} \right) du$$

$$= \int_2^5 \left(\frac{u}{u^{\frac{1}{2}}} - \frac{2}{u^{\frac{1}{2}}} \right) du = \int_2^5 \left(u^{\frac{1}{2}} - 2u^{\frac{-1}{2}} \right) du = \left(\frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} - 4u^{\frac{1}{2}} \right) \Bigg|_2^5$$

$$= \left(\frac{2(5)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4(5)^{\frac{1}{2}} \right) - \left(\frac{2(2)^{\frac{3}{2}}}{3} - 4(2)^{\frac{1}{2}} \right)$$

$$\approx (-1.490711985) - (-3.771236166) \approx 2.28$$

Ejercicio #2 …

- Gráfica $\int_{2}^{5}\left(\frac{u-2}{\sqrt{u}}\right)du \approx 2.28$

Propiedades de la Integral Definida

1. $$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$
2. $$\int_a^a f(x)dx = 0$$
3. Si c es un número tal qe a< c <b,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Ejemplo 6

- Si $\int_0^{10} f(x)dx = 17$ y $\int_0^8 f(x)dx = 12$, encuentre $\int_8^{10} f(x)dx$.
- Solución:

$$\int_0^8 f(x)dx + \int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx$$

$$\int_8^{10} f(x)dx = \int_0^{10} f(x)dx - \int_0^8 f(x)dx$$

$$\int_8^{10} f(x)dx = 17 - 12$$

$$\int_8^{10} f(x)dx = 5$$

Actividades 1.2

- **Ejercicios de Práctica**: Stewart: página 374, Problemas impares 1-27. Soluciones A108
- Ejercicios del Bono: Larsen: Problemas impares 1 – 5, 13 - 17 de la página 235, 31 - 33 de la página 236; Problemas impares 1 – 35 de la página 257.
- Referencias del Web:
  - Paul’s Online Note – The Definition of the Definite Integrals
  - Visual Calc – The Definite Integral;Tutorial el integral definido. Ilustración de cómo se evalúa el integral definido usando su definición [Flash]; Fundamental Theorem of Calculus
  - eMathLab – Definite Integrals