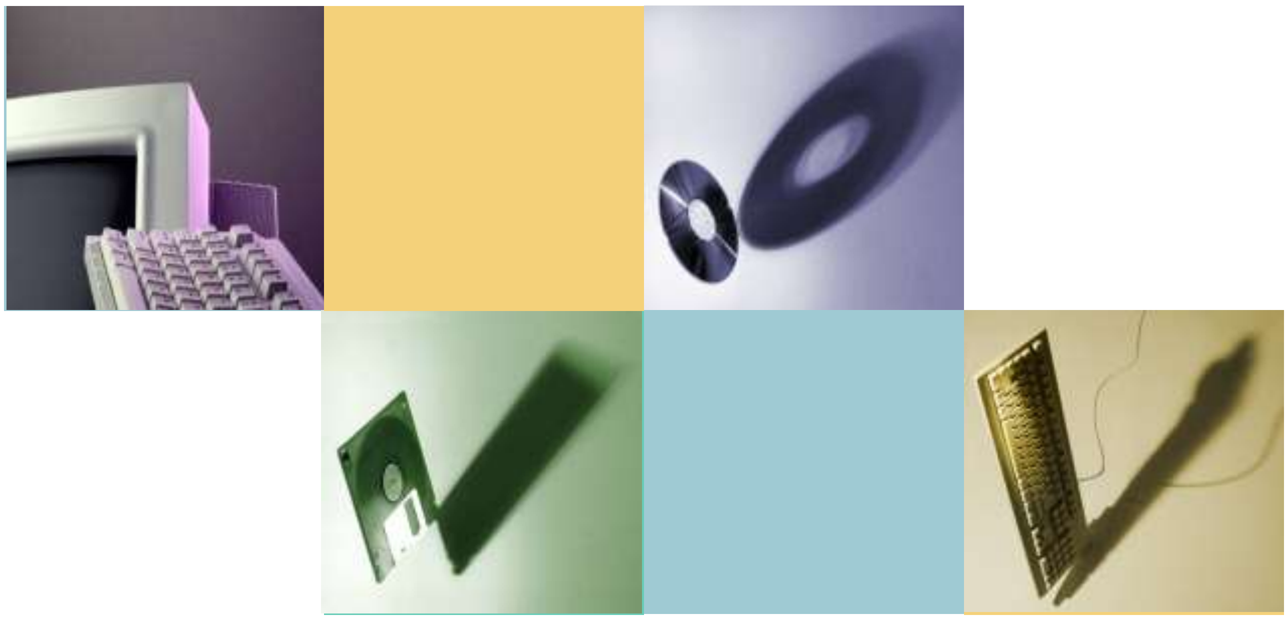
Lección 2.1



Integración por Sustitución

Objetivo

Al finalizar esta lección podrá:

- Reconocer cuándo se debe usar el método de sustitución para integrar.
- Reconocer cuándo usar la Regla de la Potencia de la Integración para hallar la integral indefinida y definida.
- Usar la Regla de la Sustitución de la Integración.
- Usar la técnica de multipicar y dividir constantes en conjunto con la Regla de la Sustitución para hallar la integral indefinida y definida.

Regla de la sustitución

- Sea u una función diferenciable y F una función tal que F'(u) = f(u). Entonces,

$$\int f(u)u'(x)dx = F(u) + c$$

- Pasos a seguir:

1. Seleccione $\boldsymbol{u}$ y calcule el diferencial $\boldsymbol{du}$.
2. Exprese el integral en términos de $\boldsymbol{u}$.
3. Integre.
4. Exprese resultado en términos de variable original

Ejemplo 1

- Encuentre: $\int \left(x^2+1\right)^4 2x\,dx$
- Solución:

1. Seleccione ***u*** y calcule el diferencial ***du***:

$$u = x^2 + 1 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x \Rightarrow du = 2x\,dx$$

2. Escriba el integral en términos de u:
3. Integre: $\int u^4\,du = \frac{u^5}{5} + c$
4. Exprese resultado en términos de variable original

$$\int \left(x^2+1\right)^4 2x\,dx = \frac{\left(x^2+1\right)^5}{5} + c$$

Ejemplo 2

- Encuentre: $\displaystyle\int \frac{\cos(\ln x - 8)}{x}\,dx = \int \cos(\ln x - 8)\cdot \frac{1}{x}\,dx$
- Solución:

$$u = \ln x - 8$$

$$\Downarrow$$

$$du = \frac{1}{x}\,dx$$

$$= \int \cos(u)\,du$$

$$= \sin(u) + c$$

$$\int \frac{\cos(\ln x - 8)}{x}\,dx = \sin(\ln x - 8) + c$$

Ejemplo 3

- Encuentre: $\int x^2\left(2x^3-5\right)^3 dx \;=\int \left(2x^3-5\right)^3 x^2 dx$
- Solución:

$$u = 2x^3 - 5$$

$$du = 6x^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}\int \left(2x^3-5\right)^3 6x^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}\int u^3 du \;= \frac{1}{6}\cdot\frac{u^4}{4} + c$$

$$\Longrightarrow \quad \int x^2\left(2x^3-5\right)^3 dx = \frac{\left(2x^3-5\right)^4}{24} + c$$

Ejemplo 4

- Encuentre: $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx \quad = \int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}} x\,dx$
- Solución:

$$u = 1 - 4x^2$$

$$du = -8x\,dx$$

$$= \frac{-1}{8} \cdot \int \left(1-4x^2\right)^{\frac{-1}{2}} \cdot -8x\,dx$$

$$= \frac{-1}{8} \int u^{\frac{-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{-1}{8} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c \quad = \frac{-u^{\frac{1}{2}}}{4} + c$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-4x^2}}\,dx = \frac{-\sqrt{1-4x^2}}{4} + c$$

Ejercicio #1

- Calcule: $\int x^2 e^{-4x^3} dx \quad = \int e^{-4x^3} \cdot x^2 dx$
- Solución:

$$u = -4x^3$$

$$du = -12x^2 dx$$

$$= \frac{-1}{12} \int e^{-4x^3} \cdot -12x^2 dx$$

$$= \frac{-1}{12} \int e^u du$$

$$= \frac{-1}{12} e^u + c$$

$$= \frac{-e^{-4x^3}}{12} + c$$

Ejercicio #2

- Calcule: $\int\left(1-\frac{1}{w}\right)\cos(w-\ln w)\,dw$

- Solución:

$$u = w - \ln w$$

$$du = \left(1-\frac{1}{w}\right)dw$$

$$= \int \cos(w-\ln w)\left(1-\frac{1}{w}\right)dw$$

$$= \int \cos u\,du$$

$$= \sin u + c$$

$$= \sin(w-\ln w) + c$$

Ejemplo 5

- Calcule: $\int \sin(\pi - x)(2 - \cos(\pi - x))^4 \, dx$
- Solución:

$$u = 2 - \cos(\pi - x)$$

$$\frac{du}{dx} = \sin(\pi - x)\frac{d}{dx}(\pi - x)$$

$$du = \sin(\pi - x)(-1)dx$$

$$du = -1\sin(\pi - x)dx$$

$$= -\int (2 - \cos(\pi - x))^4 \cdot -\sin(\pi - x)dx$$

$$= -\int (u)^4 du$$

$$= -\frac{u^5}{5} + c$$

$$= -\frac{(2 - \cos(\pi - x))^5}{5} + c$$

Ejercicio #3

$$\sin^{10}(3z) = (\sin 3z)^{10}$$

- Calcule: $\int \cos 3z \cdot \sin^{10}(3z)\, dz$
- Solución:

$$u = \sin 3z$$

$$\frac{du}{dz} = \cos 3z \cdot \frac{d}{dz} 3z$$

$$du = 3\cos 3z\, dz$$

$$= \frac{1}{3} \int (\sin 3z)^{10} \cdot 3\cos 3z\, dz$$

$$= \frac{1}{3} \int (u)^{10} du$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{11}}{11} + c$$

$$= \frac{\sin^{11} 3z}{33} + c$$

Ejemplo 6

- Compare:

$$\int \frac{3}{y+4}\,dy$$

$$u = y+4$$

$$du = dy$$

$$= 3\int \frac{1}{y+4}\,dy$$

$$= 3\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= 3\ln\left|y+4\right| + c$$

$$\int \frac{3y}{y^2+4}\,dy$$

$$u = y^2+4$$

$$du = 2y\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{y^2+4}\,2y\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{u}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left|y^2+4\right| + c$$

$$\int \frac{3y}{\left(y^2+4\right)^2}\,dy$$

$$u = y^2+4$$

$$du = 2y\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{(y^2+4)^2}\,2y\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{u^2}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\int u^{-2}\,du \quad = \frac{-3}{2\left(y^2+4\right)} + c$$

$$\int \frac{3}{y^2+4}\,dy$$

Continúa en la próxima …

Ejemplo 6 ….

$$\int \frac{3}{y^2+4}\,dy = \int \frac{3}{4\left(\frac{y^2}{4}+1\right)}\,dy = \frac{3}{4}\int \frac{1}{\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2+1\right)}\,dy$$

$$u = \frac{y}{2}$$

$$du = \frac{1}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{4}\cdot 2\int \frac{1}{\left(\left(\frac{y}{2}\right)^2+1\right)}\cdot\frac{1}{2}\,dy$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{1}{\left(1+u^2\right)}\,du$$

$$= \frac{3}{2}\tan^{-1} u + c$$

Fórmula para recordar :

$$\int \frac{1}{a^2+u^2}\,du = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+c$$

$$= \frac{3}{2}\tan^{-1}\left(\frac{y}{2}\right)+c$$



Fórmulas para recordar

$$\int \tan u \, du = -\ln|\cos u| + c$$

$$\int \cot u \, du = \ln|\sin u| + c$$

$$\int \sec u \, du = \ln|\sec u + \tan u| + c$$

$$\int \csc u \, du = -\ln|\csc u + \cot u| + c$$

Ejercicios #4

- Calcule:

$$\int x^2 e^{-4x^3}\,dx = -\frac{1}{12}e^{-4x^3} + c$$

$$\int \cos^3 x \sin x\,dx = -\frac{1}{4}\cos^4 x + c$$

$$\int \frac{x^2}{7 - x^3}\,dx = -\frac{1}{3}\ln\left|7 - x^3\right| + c$$

$$\int x^3 \cos(5x^4)\,dx = \frac{1}{20}\sin(5x^4) + c$$

$$\int \frac{1}{25 + x^2}\,dx = \frac{1}{5}\tan^{-1}\frac{x}{5} + c$$

$$\int \csc\frac{x}{6}\,dx = -6\ln\left|\csc\frac{x}{6} + \cot\frac{x}{6}\right| + c$$

Ejemplo 7

- Calcule: $\int_{-1}^{0} (x+1)^{25} dx$
- Solución:

$$u = x+1 \qquad du = dx$$

- Calcule los límites de integración en términos de u.

$$u(-1) = (-1)+1 = 0 \qquad u(0) = (0)+1 = 1$$

- Proceda con la sustitución. Incluya los nuevos límites de integración

$$\int_{-1}^{0} (x+1)^{25} dx = \int_{0}^{1} u^{25} du = \left.\frac{u^{26}}{26}\right|_{0}^{1} = \left(\frac{(1)^{26}}{26}\right) - \left(\frac{(0)^{26}}{26}\right) = \frac{1}{26}$$

Ejemplo 8

- Calcule: $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}dx$
- Solución:

$$u = \ln x \qquad du = \frac{1}{x}dx$$

- Calcule los límites de integración en términos de u.

$$u(1) = \ln 1 = 0 \qquad u(e) = \ln e = 1$$

- Proceda con la sustitución. Incluya los nuevos límites de integración

$$\int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x}dx = \int_0^1 u\,du = \left.\frac{u^2}{2}\right|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2}\right) - \left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

Ejercicios #5

- Calcule:

$$\int_0^1 x\left(x^2+1\right)^3 dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2+1\right)^3 2x\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^2 u^3\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left|\frac{u^4}{4}\right|_1^2$$

$$= \frac{1}{8}\left|u^4\right|_1^2 = \frac{1}{8}\left(2^4-1^4\right) = \frac{15}{8}$$

Ejemplo 9

- Calcule: $$\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{\sec^2 3x}{6+\tan 3x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{6+\tan 3x}\cdot \sec^2 3x dx$$
- Solución:

$$u = 6+\tan 3x \quad du = 3\sec^2 3x dx$$

- Calcule los límites de integración en términos de u.

$$u\left(\frac{\pi}{12}\right) = 6+\tan(3\cdot\frac{\pi}{12}) = 6+\tan\frac{\pi}{4} = 6+1 = 7$$

$$u(0) = 6+\tan(3\cdot 0) = 6+\tan 0 = 6+0 = 6$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{1}{6+\tan 3x}\cdot 3\sec^2 3x dx = \frac{1}{3}\int_6^7 \frac{1}{u}\cdot du = \frac{1}{3}\left[\ln|u|\Big|_6^7\right]$$

$$= \frac{1}{3}[\ln|7| - \ln|6|] = \frac{1}{3}[\ln 7 - \ln 6] = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{6}$$

Ejemplo 10

$$\int_{1/6}^{1/2} \csc \pi t \cot \pi t \, dt$$

$$u = \pi t$$

$$du = \pi \, dt$$

$$u\left(\frac{1}{2}\right) = \pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$u\left(\frac{1}{6}\right) = \pi \cdot \frac{1}{6} = \frac{\pi}{6}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{1/6}^{1/2} \cot \pi t \csc \pi t \cdot \pi \, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cot u \csc u \, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\csc u \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\csc \frac{\pi}{2} - \left(-\csc \frac{\pi}{6} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} + \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} \right]$$

$$= \frac{1}{\pi} [-1 + 2] = \frac{1}{\pi}$$

Ejercicios #6

- Calcule:

$$\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int_0^4 (2x+1)^{\frac{-1}{2}} 2dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_1^9 u^{\frac{-1}{2}} du$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{1/2} \right)\Bigg|_1^9$$

$$= u^{\frac{1}{2}}\Bigg|_1^9 = 9^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}} \qquad = 2$$

Actividades 2.1

- **Ejercicios**: Stewart; Problemas impares 1 – 33 de la página 392 y 39 -53 de la página 392. Soluciones en página 109
- Referencias:
- Visual Calculus: Tutorial: Integration using Substitution Ejercicios: Integration by Substitution.
- Paul's Online Math Notes - Substitution Rule for the Indefinite Integrals ; More Substituion Rule; Substitution Rule for Definite Integrals.