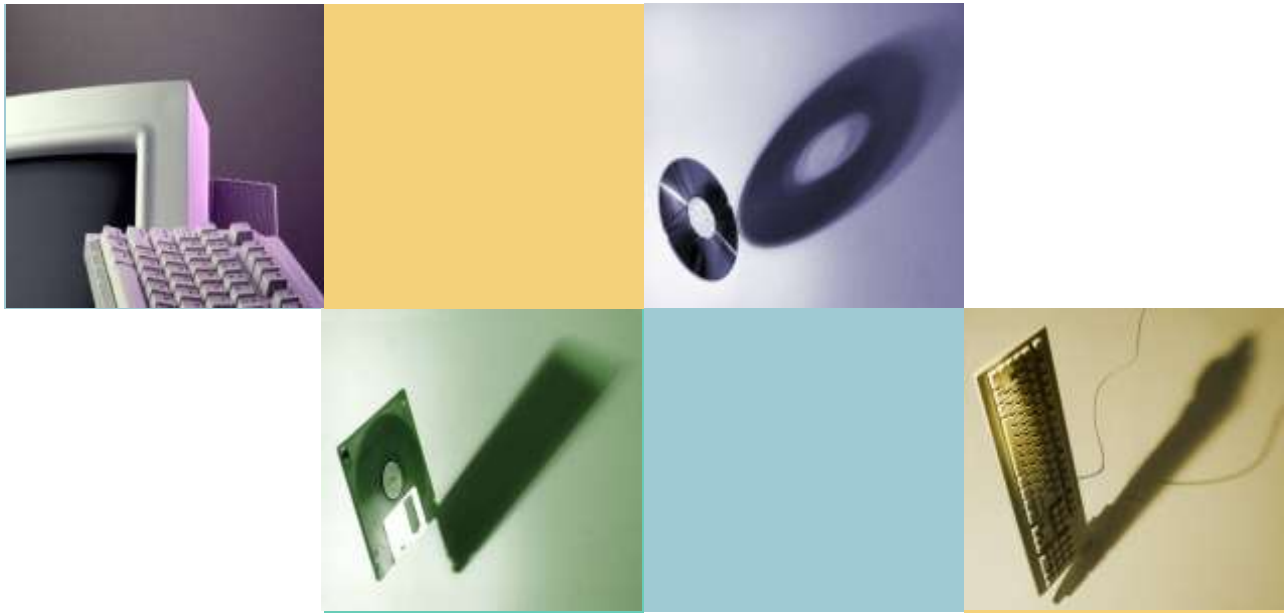
Lección 2.2



Cálculo del área entre dos curvas

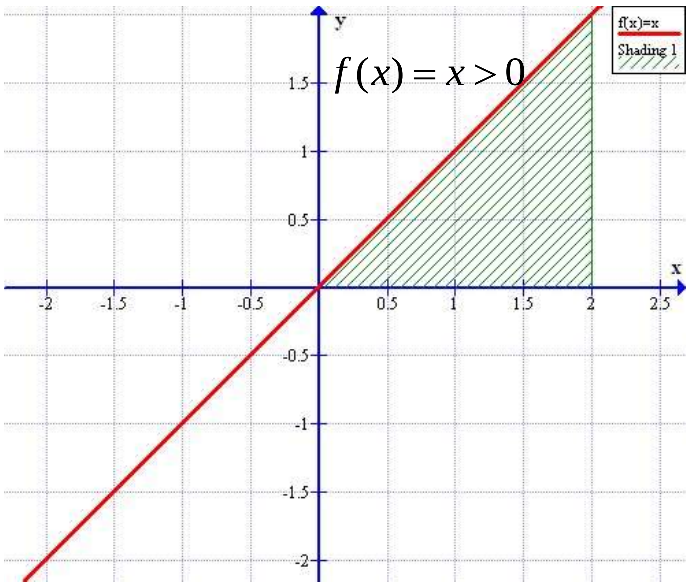
Objetivos

Al finalizar esta lección podrá:

- Usar la integración para encontrar el área de una región comprendida entre dos curvas.
- Usar la integración para encontrar el área de una región entre dos curvas que se cruzan.

Analice

- Se desea calcular el área bajo la curva de una función *f* en un intervalo [a, b], ¿será suficiente calcular el límite definido de f en [a, b].
- Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = x$ en $[0,2]$.

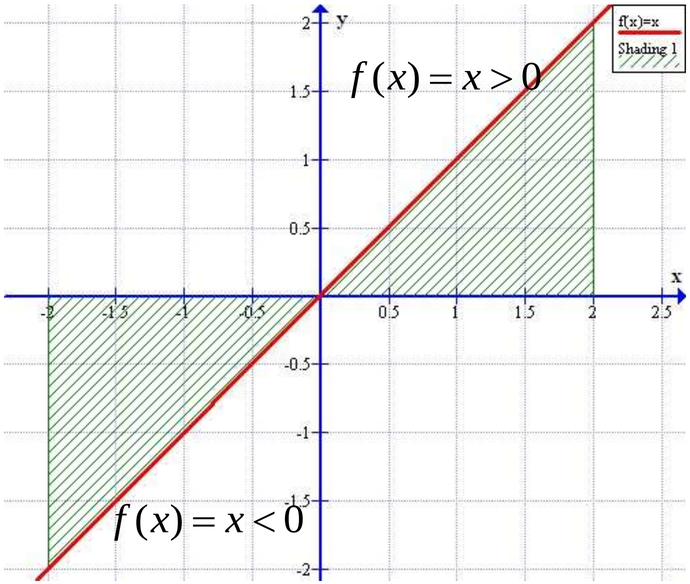


$$\text{Area} = \frac{1}{2} base \times altura$$
$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 2$$
$$= 2$$

$$\int_0^2 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} = 2$$

Analice …

- Calcule el área bajo la gráfica de $f(x) = x$ en $[-2,2]$.



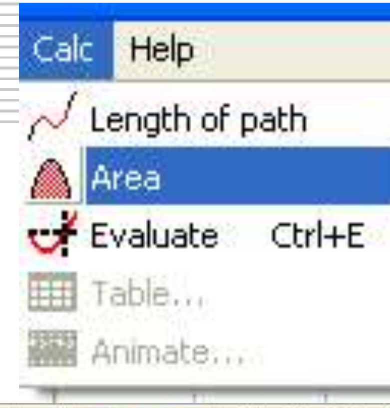
$$\text{Area} = \text{Area de } \Delta_1 + \Delta_2$$
$$= 2 + 2$$
$$= 4$$

$$\text{Area} = \text{Area de } \Delta_1 + \Delta_2$$
$$= -\int_{-2}^{0} x\,dx + \int_{0}^{2} x\,dx$$
$$= \left.\frac{-x^2}{2}\right|_{-2}^{0} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2}$$
$$= -(-2) + 2$$
$$= 4$$

$$\int_{-2}^{2} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{2} = \frac{(2)^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2} = 0$$

¡No concuerda!

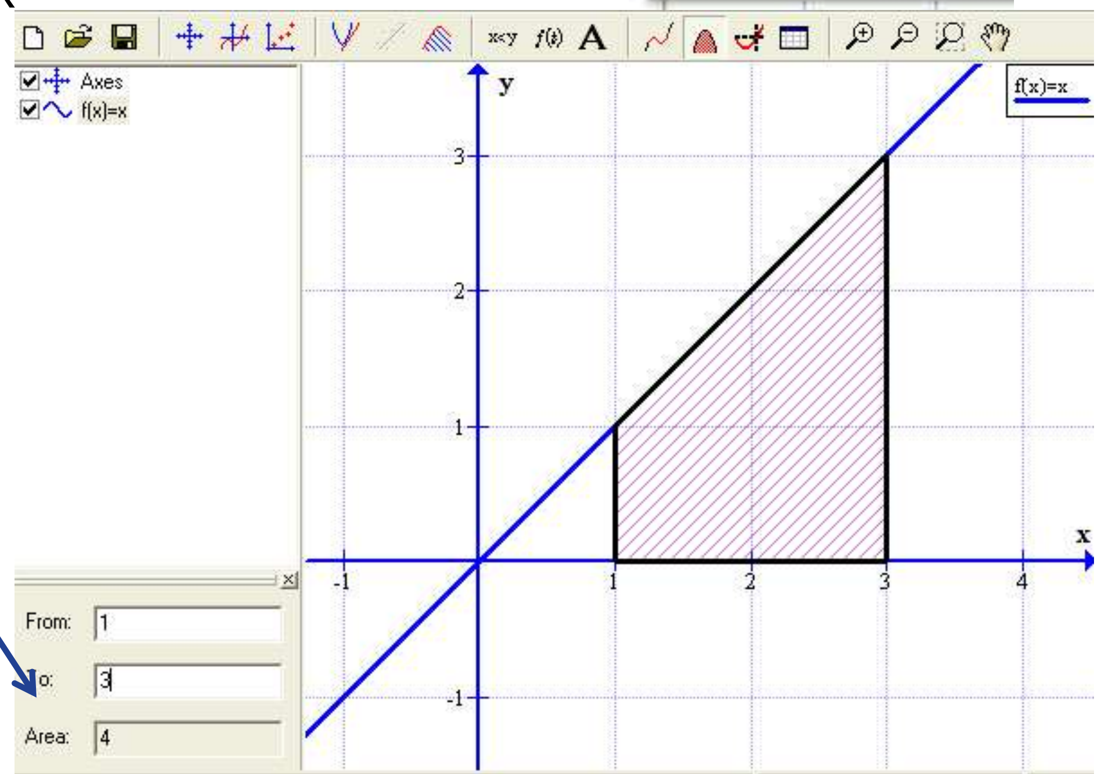
GRAPH



- La opción Calc/Area, Permite aproximar el área entre la gráfica de una función y el eje de x en un intervalo [a,b].
- Ejemplo: El área de la función $f(x) = x$ en [1, 3]
- ¡Es **4**!
- Observe que:

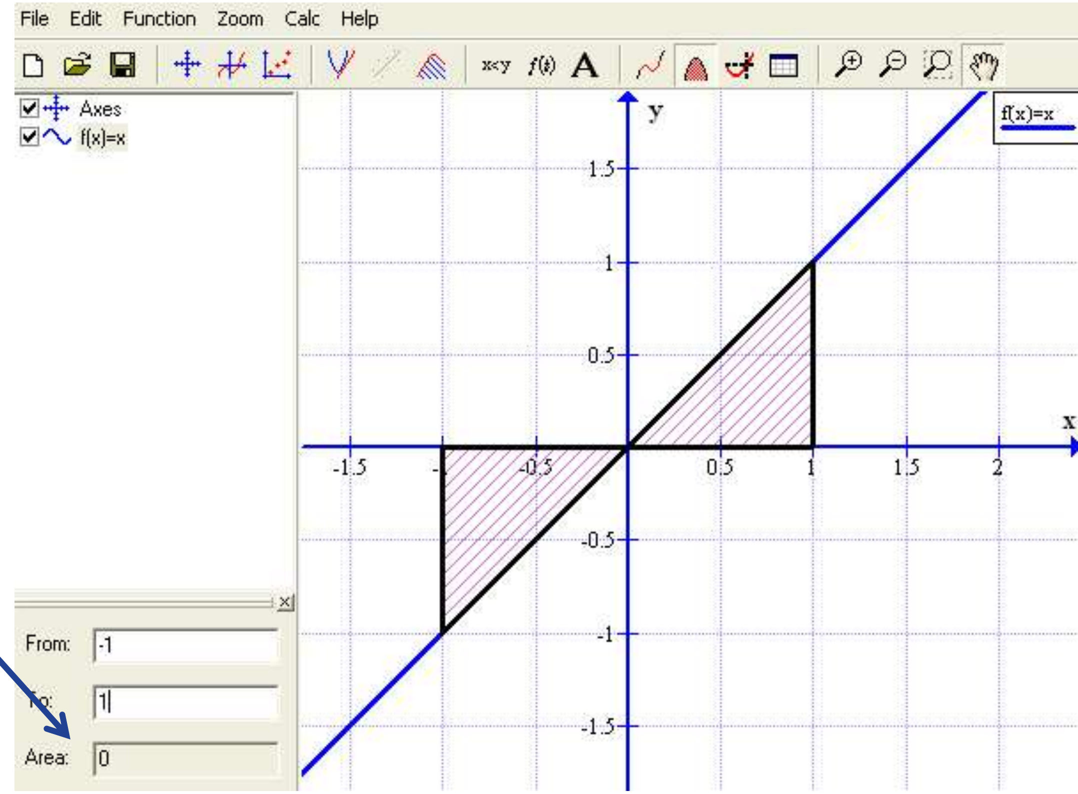
$$\int_1^3 x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^3$$

$$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$$



GRAPH

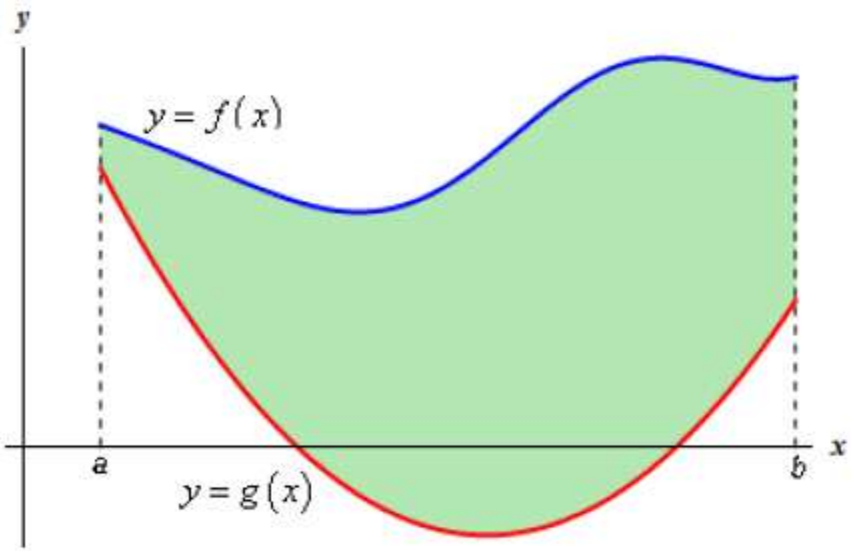
- Sin embargo, tenga cuidado, por que GRAPH realmente está aproximando la integral definida en un intervalo.
- Observe que el área que GRAPH calcula para la función $f(x) = x$ en [-1,1] … ¡es **0**!



$$\int_{-1}^{1} x\,dx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Área entre dos curvas

- Sea f, g dos funciones tal que $f(x) \geq g(x)$ para todo valor x en [a, b]. Entonces, el área A entre sus gráficas en el intervalo [a, b] es:

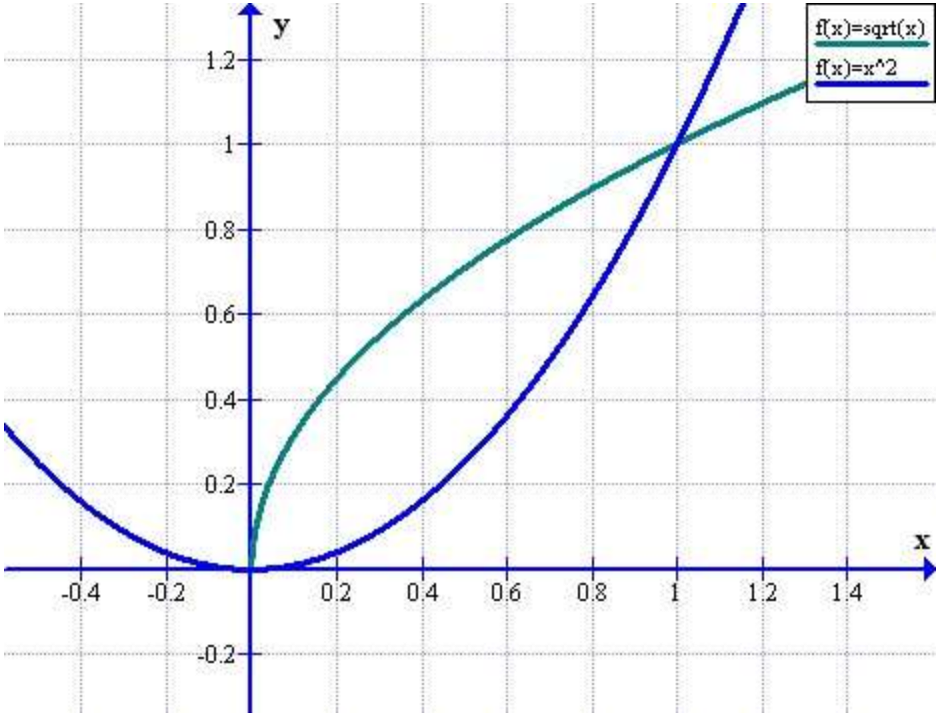


$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

$$A = \int_a^b [\text{gráfica arriba - gráfica abajo}]dx$$

Ejemplo 1

- Calcule el área entre $y = x^2$ y $y = \sqrt{x}$.
- Solución:
- Paso 1 – Grafique ambas funciones e identifique cuál es la función que está por encima.



Ejemplo 1 …

- Paso 2: Determine puntos de intersección

$$\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = \sqrt{x} \end{array} \;\Rightarrow\; \sqrt{x} = x^2 \;\Rightarrow\; x = 0{,}1$$

- Evalúe el integral definido:

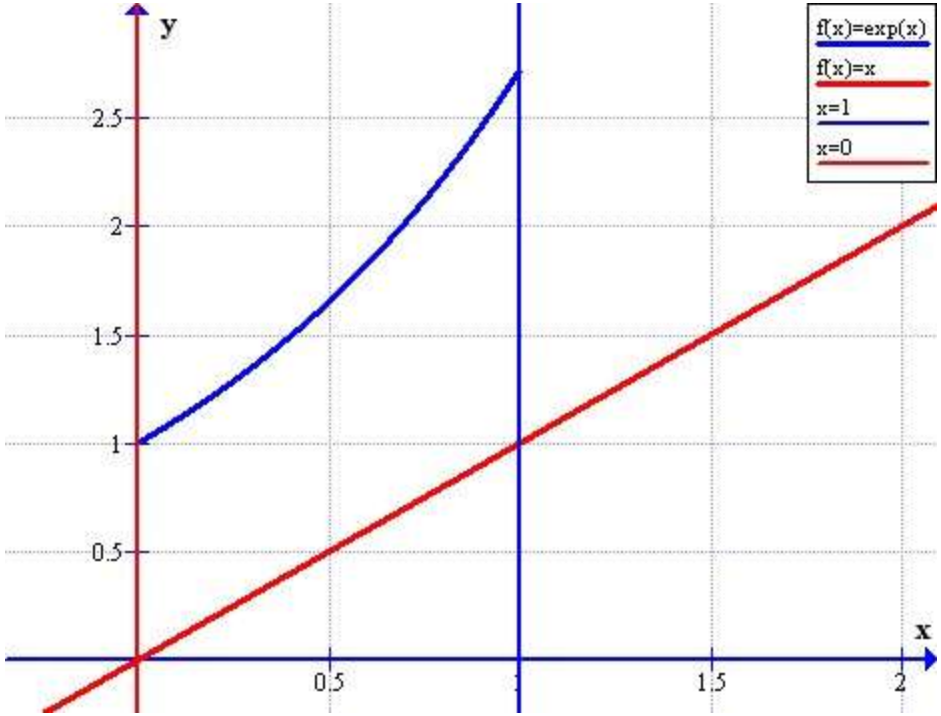
$$A = \int_0^1 \left[\sqrt{x} - x^2\right] dx$$

$$= \left(\frac{2}{3} x\sqrt{x} - \frac{1}{3} x^3 \right) \Bigg|_0^1$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \quad = \frac{1}{3}$$

Ejemplo 2

- Aproxime el área entre $y = e^x, y = x$ y por la rectas verticales x = 0 y x = 1 a la diez milésima más cercana.
- Solución:



$$A = \int_0^1 \left[e^x - x\right] dx$$

$$= e^x - \frac{1}{2}x^2 \Big|_0^1$$

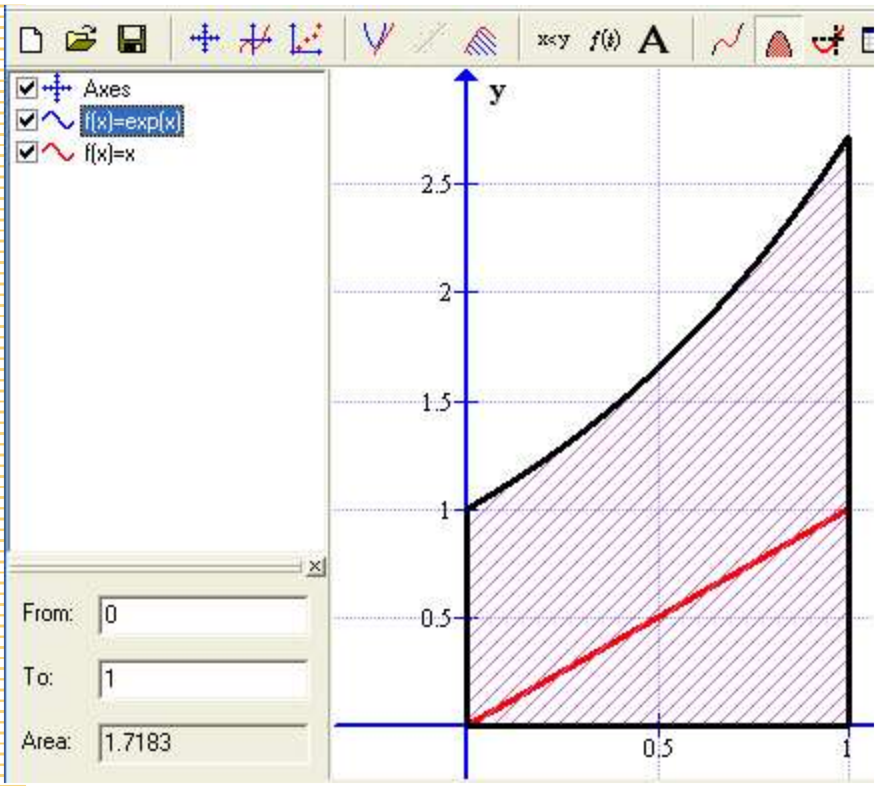
$$= e - \frac{3}{2}$$

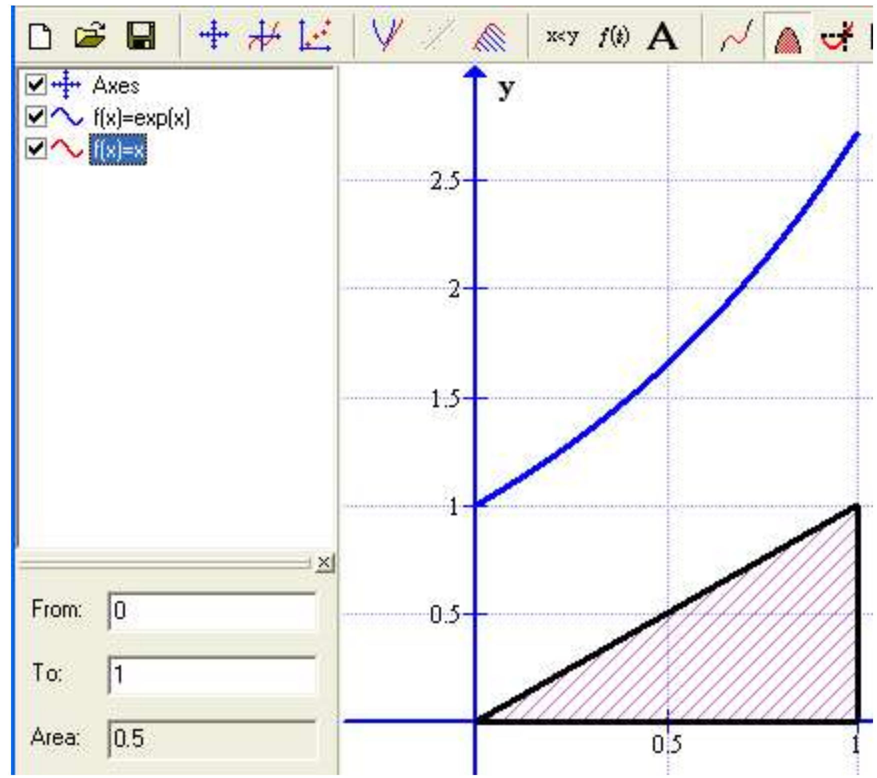
$$\approx 1.218281828$$

$$\approx 1.2183$$

Ejemplo 3

- Use GRAPH para aproximar el área entre $y = e^x$, $y = x$ entre x = 0 y x = 1.

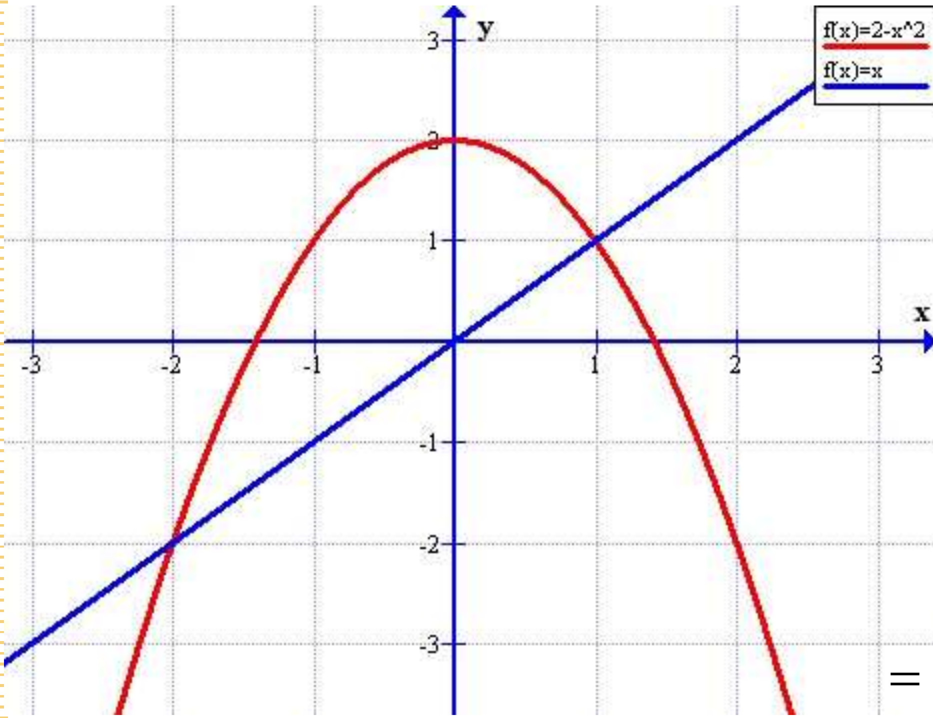




$$A = \int_0^1 \left[e^x - x\right] dx \approx 1.7183 - 0.5 = 1.2183$$

Ejercicio #1

- Calcule el área entre $y = 2 - x^2$ y $y = x$.
- Solución:



$$x = 2 - x^2$$

$$x^2 + x - 2 = 0$$

$$(x+2)(x-1) = 0$$

$$x = -2{,}1$$

$$A = \int_{-2}^{1} \left[2 - x^2 - x\right] dx$$

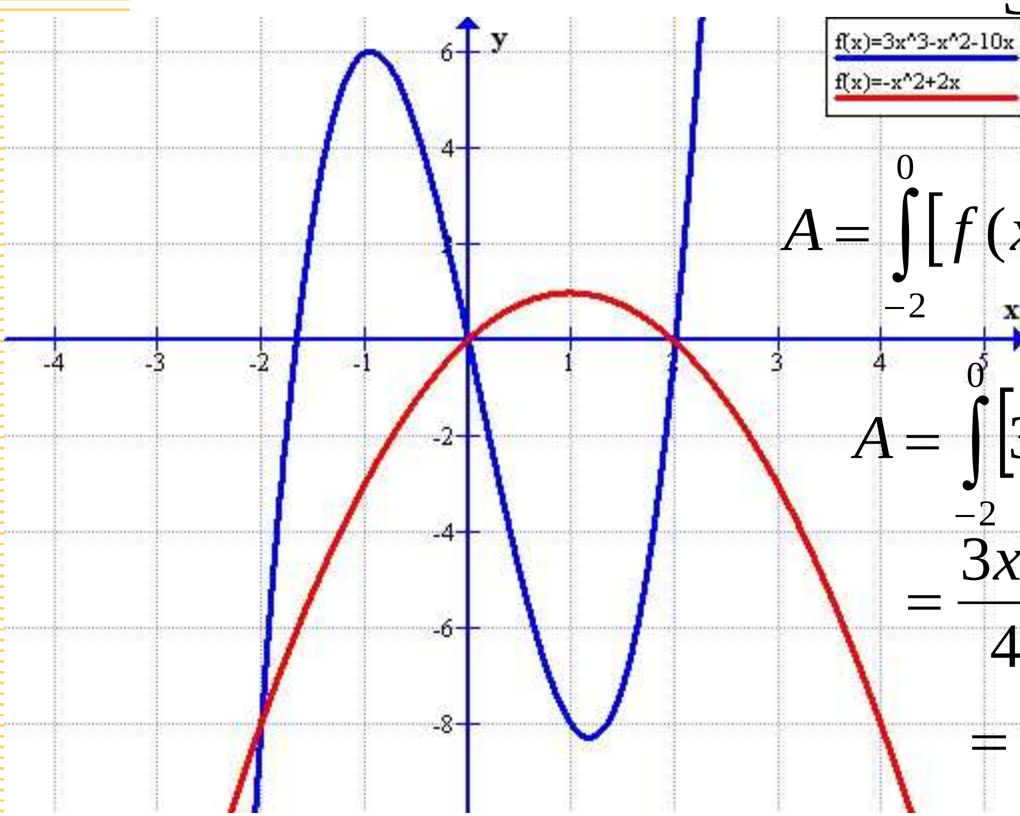
$$= 2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\Bigg|_{-2}^{1}$$

$$= \left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) - \left(-4 - \frac{-8}{3} - \frac{4}{2}\right) = \frac{9}{2}$$

Ejemplo 4

- Calcule el área entre $f(x) = 3x^3 - x^2 - 10x$ y $g(x) = -x^2 + 2x$
- Solución:

$$3x^3 - x^2 - 10x = -x^2 + 2x$$
$$3x^3 - 12x = 0$$
$$3x(x+2)(x-2) = 0$$
$$x = -2, 0, 2$$



$$A = \int_{-2}^{0} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{0}^{2} [g(x) - f(x)]\,dx$$

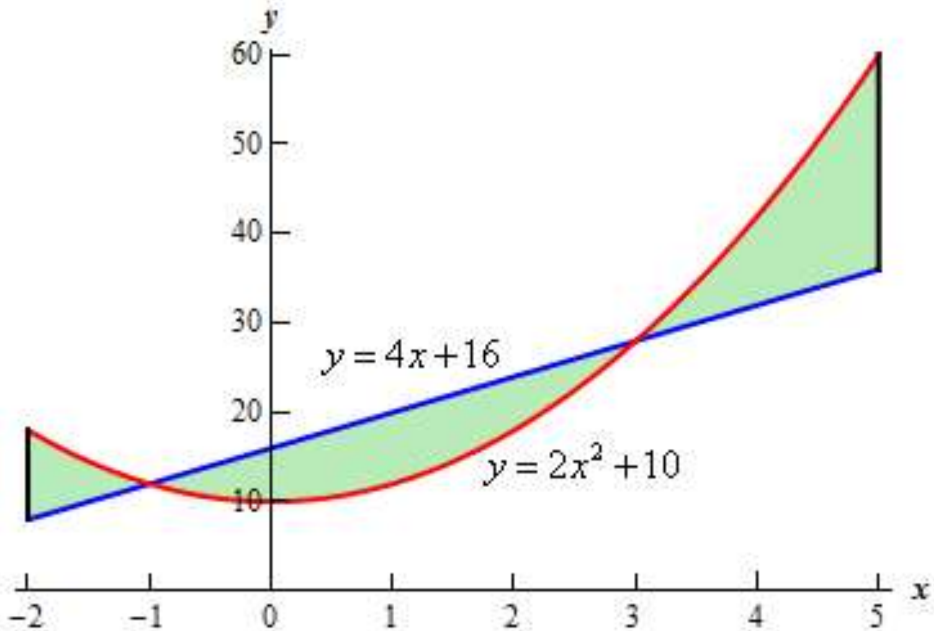
$$A = \int_{-2}^{0} [3x^3 - 12x]\,dx + \int_{0}^{2} [-3x^3 + 12x]\,dx$$

$$= \frac{3x^4}{4} - 6x^2 \Big|_{-2}^{0} + \frac{-3x^4}{4} + 6x^2 \Big|_{0}^{2}$$

$$= -(-12) + 12 = 24$$

Ejercicio #2

- Calcule el área entre $f(x) = 2x^2 + 10,\ g(x) = 4x + 16$ y las rectas x = -2, x = 5.
- Solución:



$$2x^2 + 10 = 4x + 16$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1{,}3$$

$$A = \int_{-2}^{-1} [f(x) - g(x)]\,dx + \int_{-1}^{3} [g(x) - f(x)]\,dx + \int_{3}^{5} [f(x) - g(x)]$$

Ejercicio #2 …

$$f(x)-g(x)=\left(2x^2+10\right)-\left(4x+16\right)=2x^2-4x-6$$

$$g(x)-f(x)=-2x^2+4x+6$$

$$A=\int_{-2}^{-1}\left[2x^2-4x-6\right]dx+\int_{-1}^{3}\left[-2x^2+4x+6\right]dx+\int_{3}^{5}\left[2x^2-4x-6\right]dx$$

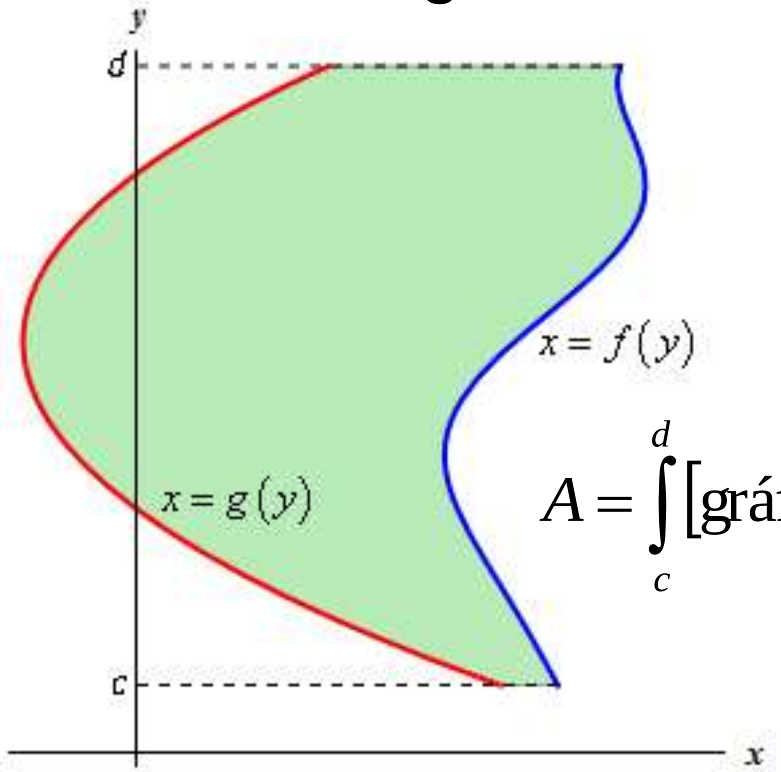
$$=\frac{2x^3}{3}-2x^2-6x\Big|_{-2}^{-1}+\frac{-2x^3}{3}+2x^2+6x\Big|_{-1}^{3}+\frac{2x^3}{3}-2x^2-6x\Big|_{3}^{5}$$

$$=\frac{14}{3}+\frac{64}{3}+\frac{64}{3}$$

$$=\frac{142}{3}$$

Área entre dos curvas

- Sea f, g dos funciones de y tal que $f(y) \geq g(y)$ para todo valor y en [a, b]. Entonces, el área A entre sus gráficas en el intervalo [a, b] es:



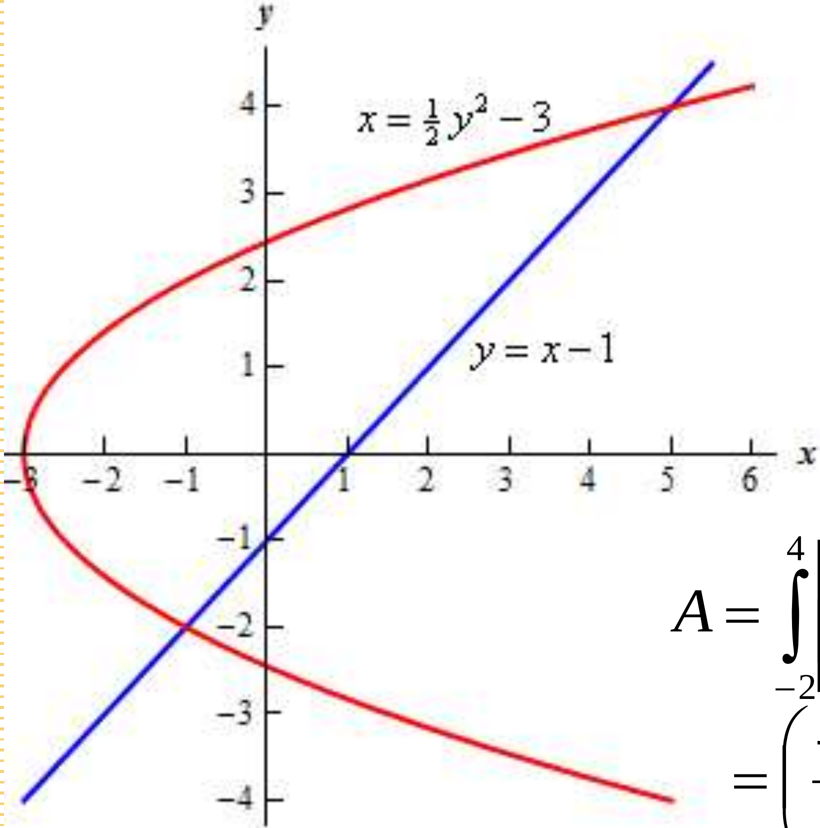
$$A = \int_{c}^{d} \left[f(y) - g(y) \right] dy$$

$$A = \int_{c}^{d} \left[\text{gráfica derecha - gráfica izquierda} \right] dy$$

Ejemplo 5

- Calcule el área entre $x = \frac{1}{2}y^2 - 3$ y $y = x - 1$

- Solución:



$$\frac{1}{2}y^2 - 3 = y + 1$$

$$y^2 - 2y - 8 = 0$$

$$(y-4)(y+2) = 0$$

$$y = -2, 4$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[(y+1) - \left(\frac{1}{2}y^2 - 3 \right) \right] dy$$

$$A = \int_{-2}^{4} \left[\frac{-1}{2}y^2 + y + 4 \right] dy = \frac{-y^3}{6} + \frac{y^2}{2} + 4y \Big|_{-2}^{4}$$

$$= \left(\frac{-64}{6} + 24 \right) - \left(\frac{8}{6} + 6 \right) = 18$$

Actividades 2.2

- **Ejercicios de Práctica**: Stewart. Problemas impares 1 – 15 de la página 446. Soluciones de problemas impares en página A111
- Referencias:
- Paul's Online Notes - Area Between Curves
- Visual Calculus - Area between two curves