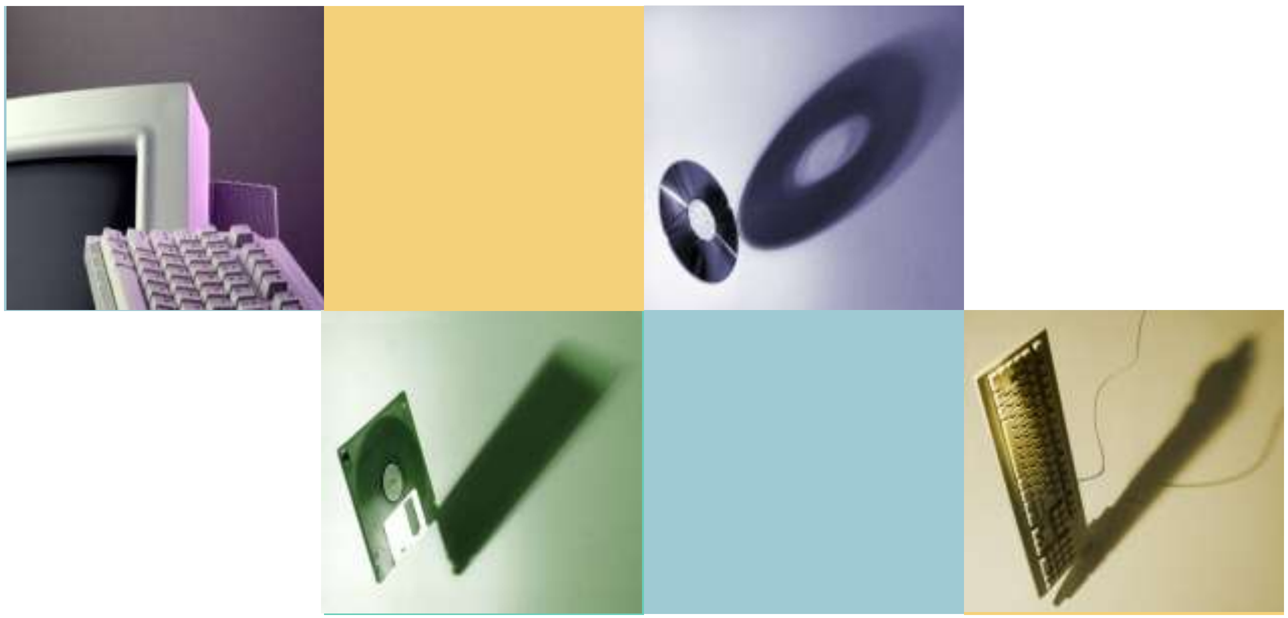
Lección 4.1



Fracciones Parciales

Objetivos

Al finalizar esta lección podrá:

- Reconocer cuándo se usa la técnica de Integración por fracciones parciales.
- Usar fracciones parciales con factores lineales para integrar funciones racionales.
- Usar fracciones parciales con factores cuadráticos para integrar funciones racionales.

Ejemplo 1

- Calcule $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}\,dx$

- Paso 1: Factorice denominador $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$
- Paso 2: Exprese como fracciones parciales

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x-2)}$$

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{A(x-2)+B(x-3)}{(x-3)(x-2)}$$

$$1=A(x-2)+B(x-3)$$

Ejemplo 1 …

$$1 = A(x-2) + B(x-3)$$

En la igualdad sustituya valores a x que le permitan calcular A y B.

Seleccione x = 3, para hallar A, x = 2 para hallar B.

$$1 = A(3-2) + B(3-3)$$
$$= A(3-2)$$
$$= A$$

$$1 = A(2-2) + B(2-3)$$
$$= B(2-3)$$
$$= B(-1)$$

$$A = 1$$
$$B = -1$$

$$\frac{1}{x^2 - 5x + 6} = \frac{1}{(x-3)} + \frac{-1}{(x-2)}$$

Ejemplo 1 …

$$\frac{1}{x^2-5x+6}=\frac{1}{(x-3)}+\frac{-1}{(x-2)}$$

$$\int\frac{1}{x^2-5x+6}dx=\int\frac{1}{(x-3)}dx-\int\frac{1}{(x-2)}dx$$

$$=\ln|x-3|\;-\ln|x-2|\quad+c$$

Ejemplo 2

- Calcule $\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4x}dx$
- Solución:

$$3x^3+4x^2-4x = x\left(3x^2+4x-4\right)$$

$$= x\left(3x-2\right)(x+2)$$

$$\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(3x-2)} + \frac{C}{(x+2)}$$

$$\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4} = \frac{A(3x-2)(x+2)}{x(3x-2)(x+2)} + \frac{Bx(x+2)}{x(3x-2)(x+2)} + \frac{Cx(3x-2)}{x(3x-2)(x+2)}$$

$$\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4} = \frac{A(3x-2)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(3x-2)}{x(3x-2)(x+2)}$$

Ejemplo 2

$$x^2 + 4 = A(3x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(3x-2)$$

Como: $$\frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(3x-2)} + \frac{C}{(x+2)}$$

- Para hallar A, sustituya x = 0

$$(0)^2 + 4 = A(3(0)-2)((0)+2) + B(0)((0)+2) + C(0)(3(0)-2)$$
$$4 = A(-2)(2)$$
$$A = -1$$

- Para hallar B, sustituya x = 2/3

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 = A(3(\frac{2}{3})-2)((\frac{2}{3})+2) + B(\frac{2}{3})((\frac{2}{3})+2) + C(\frac{2}{3})(3(\frac{2}{3})-2)$$

$$\frac{40}{9} = B\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{8}{3}\right) \Rightarrow B = \frac{5}{2}$$



Ejemplo 2 …

- Para hallar C, sustituya x = -2

$$(-2)^2 + 4 = A(3(-2)-2)((-2)+2) + B(-2)((-2)+2) + C(-2)(3(-2)-2)$$

$$8 = C(-2)(-8) \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x^2+4}{3x^3+4x^2-4}\,dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{\frac{5}{2}}{(3x-2)} + \frac{\frac{1}{2}}{(x+2)} \right) dx$$

$$= -\int \frac{1}{x}dx + \frac{5}{2}\int \frac{1}{(3x-2)}\,dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)}\,dx$$

$$= -\ln|x| + \frac{5}{6}\ln|3x-2| + \frac{1}{2}\ln|x+2| + c$$

Ejercicio #1

- Calcule $\displaystyle\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx$
- Solución: $x^2-x-6=(x-3)(x+2)$

$$\frac{3x+11}{x^2-x-6}=\frac{A}{(x-3)}+\frac{B}{(x+2)}$$

$$\frac{3x+11}{x^2-x-6}=\frac{A(x+2)+B(x-3)}{(x-3)(x+2)}$$

- Para hallar A, B sustituya x por 3, -2 respectivamente

$$3(3)+11=A(3+2)+B(3-3) \Rightarrow 20=5A \Rightarrow A=4$$

$$3(-2)+11=A(-2+2)+B(-2-3) \Rightarrow 5=-5B \Rightarrow B=-1$$

$$\int \frac{3x+11}{x^2-x-6}dx = \int \frac{4}{x-3}dx+\int \frac{-1}{x+2}dx$$

$$=4\ln|x-3|-\ln|x+2| \quad +c$$

Ejemplo 3

- Calcule $\int \frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x}dx$
- Solución: $x^3+2x^2+x = x\left(x^2+2x+1\right) = x(x+1)^2$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2}$$

$$\frac{5x^2+20x+6}{x^3+2x^2+x} = \frac{A(x+1)^2 + Bx(x+1) + Cx}{x(x+1)^2}$$

- Para hallar A, sustituya x = 0

$$5(0)^2+20(0)+6 = A(0+1)^2 + B(0)(0+1) + C(0) \quad A=6$$

- Para hallar por C, sustituya x = -1

$$5(-1)^2+20(-1)+6 = A(-1+1)^2 + B(-1)(-1+1) + C(-1)$$

$$C=9$$

Ejemplo 3 …

- Para hallar B, seleccione cualquier otro valor distinto a los anteriores … Por ejemplo, 1

$$5(1)^2 + 20(1) + 6 = A(1+1)^2 + B(1)(1+1) + C(1)$$

$$31 = 4A + 2B + C$$

$$31 = 4(6) + 2B + (9) \quad \Rightarrow \quad B = -1$$

$$\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{6}{x} + \frac{-1}{(x+1)} + \frac{9}{(x+1)^2}$$

$$\int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x}\,dx = \int \frac{6}{x}\,dx - \int \frac{1}{(x+1)}\,dx + \int \frac{9}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= 6\ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + c$$

Ejemplo 4

- Calcule $\int \frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)}dx$
- Solución:

$$(x^2 - x)(x^2 + 4) = x(x-1)(x^2 + 4)$$

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 4)}$$

$$\frac{2x^3 - 4x - 8}{(x^2 - x)(x^2 + 4)} = \frac{A(x-1)(x^2 + 4) + Bx(x^2 + 4) + (Cx + D)x(x-1)}{x(x-1)(x^2 + 4)}$$

Para hallar A, sustituya x = 0

$$2(0)^3 - 4(0) - 8 = A(0-1)(0^2 + 4) + B(0)(0^2 + 4) + (C(0) + D)(0)(0-1)$$

$$-8 = A(-1)(4)$$

$$A = 2$$

Ejemplo 4 …

- Para hallar B, sustituya x = 1

$$2(1)^3-4(1)-8=A(1-1)\left(1^2+4\right)+B(1)(1^2+4)+\left(C(1)+D\right)(1)(1-1)$$

$$-10=0+B(5)+0$$

$$B=-2$$

- Para hallar por C y D, sustituya x por otros dos valores. Por ejemplo, si x = -1, usando los valores de A = 2 y B=-2 encontrados, se obtiene

$$-6=(2)(-2)(5)+(-2)(-1)(5)+(-C+D)(-1)(-2)$$

$$2=-C+D$$

- Si x = 2

$$0=(2)(1)(8)+(-2)(2)(8)+(2C+D)(2)(1)$$

$$8=2C+D$$

$$C=2 \quad D=4$$

Ejemplo 4 …

$$\int \frac{2x^3-4x-8}{(x^2-x)(x^2+4)}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{-2}{(x-1)}dx + \int \frac{2x+4}{(x^2+4)}dx$$

$$= \int \frac{2}{x}dx - \int \frac{2}{(x-1)}dx + \int \frac{2x}{(x^2+4)}dx + \int \frac{4}{(x^2+4)}dx$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| \; + 2\int \frac{4}{4\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)} \cdot \frac{1}{2}dx$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| \; + 2\int \frac{1}{u^2+1} \cdot du$$

$$= 2\ln|x| - 2\ln|x-1| + \ln|x^2+4| \; + 2\tan^{-1}\frac{1}{2}x \; + c$$

Recuerde :

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

Actividades 3.1

- Ejercicios de Práctica: Página 405: todos 17 - 27.
- Referencias:
  - Visual Claculus: Partial Fractions