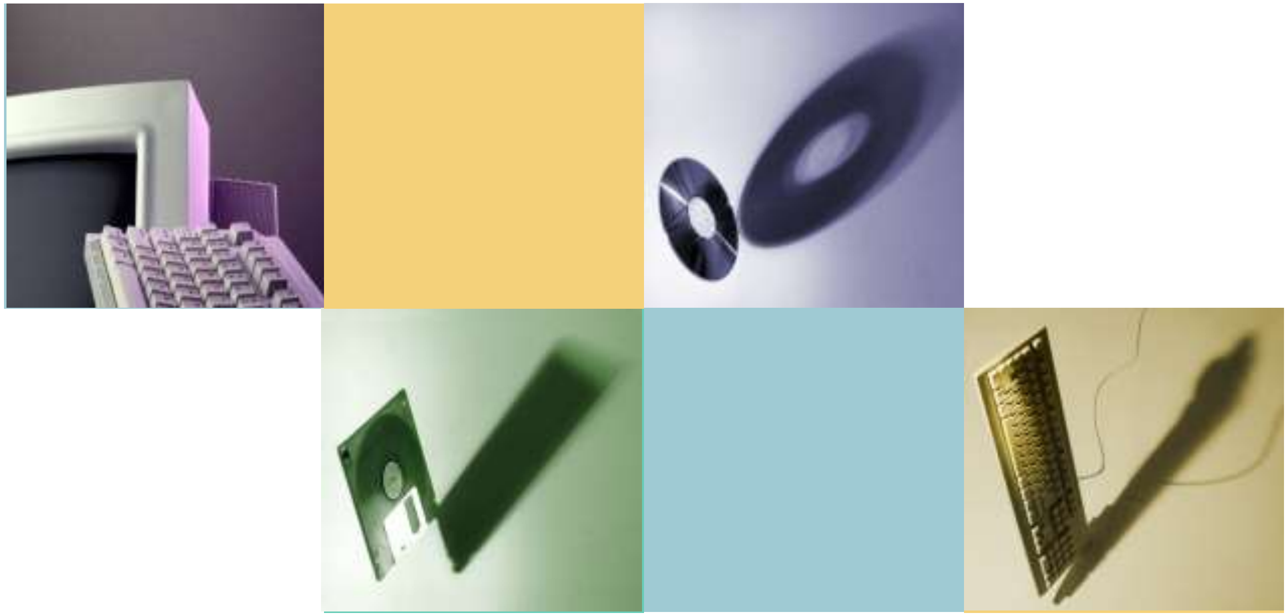
Unidad 1 - Lección 1.1



Exponentes y Radicales

Actividad 1.1

- **Referencia**: Sección 1.2 – Exponentes y Radicales; Problemas Asignados: 9-15 (Impares), 23-25, 45-51, 55-57, 61-81 (Impares)
- **Referencia del Web:**
- Math2Me
  - Leyes de los exponentes
  - Leyes de los exponentes | ejercicio 1
  - Leyes de los exponentes | ejercicio 2
  - Leyes de los exponentes | ejercicio 3
  - Radicación de un número | exponente fraccionario
  - Radicación de expresiones algebraicas | compilado
  - Radicación de expresiones algebraicas | ejercicio 1
  - Radicación de fracciones | ejercicio 1
  - Racionalización del denominador | monomio
  - Racionalización del denominador | binomio
- Khan Academy –
  - Sección de Fundamentos – La Raíz Cuadrada.

Exponentes Enteros

base $\rightarrow$ x^n $\leftarrow$ exponente

$\left.x^n\right\}$ potencia

Si n entero positivo

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}$$

- $4^3 \;=\; 4 \times 4 \;\times 4 = \; 64$
- $(-3)^4 \;=\; -3 \times -3 \;\times -3 \;\times -3 \;=\; 81$
- $-3^4 \;=\; -(3 \times 3 \;\times 3 \;\times 3) = -81$

Recuerde: Si no hay un paréntesis alrededor de un número negativo, se entiende que la base de la potencia es positiva.

- 3^{25}

Con la calculadora $3\ [\ \wedge\ ]\ 25\ [enter]$ $\quad 8.472886094 * 10^{11}$

$$3^{25} \approx 847{,}288{,}609{,}400$$

Exponentes 0 y negativos

Si x es distinto de cero $x^0 = 1$

Además, si x es distinto de cero, n entero positivo $x^{-n} = \dfrac{1}{\underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ veces}}}$

- $(-5)^0 = 1$
- $4^{-3} = \dfrac{1}{4^3} = \dfrac{1}{64}$
- $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{2}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{4/9} = \dfrac{9}{4}$
- 3^{-20}

Con la calculadora $3\ [\ \hat{}\ ]\ [\ (-)]20\ [enter]$ $\quad 2.86797199 * 10^{-10}$

$$3^{-20} \approx 0.000000000286797199$$

Reglas de Exponentes

- $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$
- $(x^m)^n = x^{m \cdot n}$
- $(xy)^m = x^m \cdot y^m$
- $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$
- $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

Ejemplos:

$$y^4 \cdot y^3 \cdot y^5 = y^{12}$$

$$(x^3)^5 = x^{15}$$

$$(x \cdot y)^5 = x^5\, y^5$$

$$(4x^3)^2 = 4^2\,(x^3)^2 = 16x^6$$

Ejemplo 1

Simplifique:

Exprese potencias con exponentes negativos a potencias equivalentes con exponentes positivos

$$\left(a^3b^{-2}\right)^{-4} = \left(a^3\right)^{-4}\left(b^{-2}\right)^{-4} = a^{-12}b^8 \quad = \frac{b^8}{a^{12}}$$

$$\left(2x^{-1}y^2\right)^{-3} = 2^{-3}\left(x^{-1}\right)^{-3}\left(y^2\right)^{-3} = \frac{1}{2^3}x^3y^{-6} \quad = \frac{x^3}{8y^6}$$

$$\left(\frac{3xy^2}{12x^2y}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}x^{-1}y^1\right)^2 = \left(\frac{x^{-1}y}{4}\right)^2 = \frac{x^{-2}y^2}{4^2} \quad = \frac{y^2}{16x^2}$$

Raíz cuadrada

- Sea a un número **positivo ó 0**. Entonces, la "raíz cuadrada (principal) de a" representado por $\sqrt{a}$ ó $a^{\frac{1}{2}}$ es un número real positivo ó 0 tal que:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

Número irracional

- De manera que:

$$\sqrt{4} = 2 \quad \sqrt{9} = 3 \quad \sqrt{36} = 6 \quad \sqrt{3}$$

Aprox 1.73

- Si a es el **cuadrado** de un racional **positivo ó 0** (cuadrado perfecto), $\sqrt{a}$ es un número racional.
- Cuadrados perfectos:

Aprox 11.27

$$0 \quad 1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad 36 \quad 49 \quad 64 \quad 81 \quad 100 \quad 121 \quad 144$$

$$\sqrt{81} = 9 \qquad \sqrt{625} = 25 \qquad \sqrt{127}$$

Número irracional

$[2nd][x^2]625[enter]$ $[2nd][x^2]127[enter]$



Raíz cúbica

- Sea a un número. Entonces, la “raíz cúbica (principal) de a” representado por $\sqrt[3]{a}$ ó $a^{\frac{1}{3}}$ es un número real tal que:

$$\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{a} = a$$

Número irracional

- De manera que:

$$\sqrt[3]{8} = 2 \quad \sqrt[3]{-8} = -2 \quad \sqrt[3]{27} = 3 \quad \sqrt[3]{36}$$

Aprox 3.3

- Si a es la potencia cúbica de un racional (cubo perfecto), $\sqrt[3]{a}$ es un número racional.
- Cubos perfectos:

Aprox -5.03

$$0 \quad 1 \quad 8 \quad 27 \quad 64 \quad 125 \quad -1 \quad -8 \quad -27 \quad -64 \quad -125$$

$$\sqrt[3]{-64} = -4 \qquad \sqrt[3]{729} = 9 \qquad \sqrt[3]{-127}$$

Número irracional

$$3[2nd][\wedge]729[enter] \qquad 3[2nd][\wedge]-127[enter]$$

N-ésima raíz principal

- Sea a un número y n un número entero mayor que 2, la "**n-ésima raíz principal** de a" representado por $\sqrt[n]{a}$ o $a^{\frac{1}{n}}$ es un número real tal que:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a} \cdot \cdots \sqrt[n]{a} = a$$

- Si n es par a y $\sqrt[n]{a}$ tienen que ser **positivo ó 0**.
- Si n es impar a y $\sqrt[n]{a}$ comparten el mismo signo o son 0.

índice → $\sqrt[n]{a}$ ← *radicando*

$$\sqrt[5]{-243} = -3$$

$5[2nd][\hat{}] - 243\ [enter]$

Número irracional

$$\sqrt[4]{39}$$

Aprox 2.5

$4[2nd][\hat{}]39\ [enter]$

No es un número real

$$\sqrt[4]{-16} \quad Domain\ error$$

$4[2nd][\hat{}] - 16\ [enter]$

Exponentes Racionales

- Si a es un número no-negativo, n un entero positivo mayor que 1

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

- Ejemplos:

$$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \qquad 5^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{5}$$

- Simplifique:

$$36^{\frac{1}{2}} = \sqrt{36}$$

$$= 6$$

$$(-27)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-27}$$

$$= -3$$

$$-256^{\frac{1}{4}} = -(256^{\frac{1}{4}})$$

$$= -\sqrt[4]{256}$$

$$= -4$$

Exponentes Racionales

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

- Simplifique:

Ley de Exponentes

$(x^a)^b = x^{a\cdot b}$

$$9^{\frac{3}{2}} = \sqrt{9^3}$$
$$= \sqrt{9\cdot 9\cdot 9}$$
$$= 3\cdot 3\cdot 3$$
$$= 27$$

$$9^{\frac{3}{2}} = \left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3$$
$$= (3)^3$$
$$= 27$$

$$(-343)^{\frac{4}{3}} = \left((-343)^{\frac{1}{3}}\right)^4$$
$$= (-7)^4$$
$$= 2401$$



Uso de las reglas de exponentes

- $$\frac{x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{4}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}} y^{\frac{3}{4}-\frac{1}{4}} = x^{\frac{-1}{3}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}} \quad \text{ó} \quad = \frac{\sqrt{y}}{\sqrt[3]{x}}$$

Exprese potencias con exponentes negativos a potencias equivalentes con exponentes positivos

- $$\left(2a^6b^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\frac{-1}{2}}\left(a^6\right)^{\frac{-1}{2}}\left(b^{-2}\right)^{\frac{-1}{2}} = 2^{\frac{-1}{2}} a^{-3} b = \frac{b}{2^{\frac{1}{2}} a^3} \quad \text{ó} \quad = \frac{b}{a^3\sqrt{2}}$$

- $$\left(a^{\frac{1}{5}} b^{\frac{3}{4}}\right)^{-20} = \left(a^{\frac{1}{5}}\right)^{-20}\left(b^{\frac{3}{4}}\right)^{-20} = a^{\frac{1}{5}\cdot -20} b^{\frac{3}{4}\cdot -20} = a^{-4}b^{-15} = \frac{1}{a^4 b^{15}}$$

Propiedades de Radicales

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[3]{x^3} = x$$

$$\sqrt[3]{x^6} = x^2$$

$$\sqrt[3]{x^9} = x^3$$

Por lo general, si m es divisible entre n,

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

$$\sqrt[5]{9} \cdot \sqrt[5]{x} = \sqrt[5]{9x}$$

$$\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{8} = \sqrt[4]{16} = 2$$

$$\sqrt{3} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{18}$$

El radicando NO debe contener potencias perfectas como factores del radicando.

$$= \sqrt{9 \cdot 2}$$

$$= \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

versión simplificada

$$\frac{\sqrt[3]{30}}{\sqrt[3]{5}} = \sqrt[3]{6}$$

$$\frac{\sqrt{3a^2b}}{\sqrt{27b^3}} = \sqrt{\frac{3a^2b}{27b^3}}$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{9b^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{b^2}} = \frac{a}{3b}$$



Simplificando Radicales

Simplifique:

El radicando NO debe contener potencias perfectas como factores del radicando.

$$\sqrt{40} = \sqrt{4 \cdot 10} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{10} = 2\sqrt{10}$$

$[2nd][x^2]40\ [enter]$

$$\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

$[2nd][x^2]75\ [enter]$

$$\sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x\sqrt{x}$$

$$\sqrt{18x^7} = \sqrt{9x^6 \cdot 2x} = \sqrt{9x^6} \cdot \sqrt{2x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x^6} \cdot \sqrt{2x} = 3x^3\sqrt{2x}$$

$$\sqrt[3]{64x^7} = \sqrt[3]{64x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{64} \cdot \sqrt[3]{x^6} \cdot \sqrt[3]{x} = 4x^2\sqrt[3]{x}$$

Una expresión fraccionaria no debe contener un radical en el denominador.

Un radical no debe contener un una *fracción* en el radicando.

$$\frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\cdot 3} = \frac{\mathbf{5\sqrt{3}}}{\mathbf{6}}$$

$$\frac{2}{\sqrt[3]{4}} = \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} = \sqrt[3]{\mathbf{2}}$$

$$\sqrt{\frac{16}{7}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{7}} = \frac{4}{\sqrt{7}} \cdot \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{4\sqrt{7}}{7}$$

Sumando y Restando de Radicales

Simplifique:

$$2\sqrt{3} + 7\sqrt{3} \;=\; 9\sqrt{3}$$

$$7\sqrt{18} + \;9\sqrt{2}$$

$$= 7\sqrt{9 \cdot 2} \;+ 9\sqrt{2}$$

$$= 7 \cdot 3\sqrt{2} \;+ 9\sqrt{2}$$

$$= \;21\sqrt{2} \;+ 9\sqrt{2}$$

$$= \;30\sqrt{2}$$

$$8\sqrt[3]{5} - 10\sqrt[3]{5} = -2\sqrt[3]{5}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{15} + \frac{1}{3}\sqrt{135}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{15} \quad + \;\frac{1}{3}\sqrt{9 \cdot 15}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{15} \quad + \;\frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{15}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{15} \;\;+ \;\sqrt{15}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{15} \quad \text{ó} \quad \frac{3\sqrt{15}}{2}$$

Multiplicando y Dividiendo de Radicales

Simplifique:

$$(\sqrt{3}+7\sqrt{2})\,(\sqrt{3}-7\sqrt{2})$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}-7\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}$$

$$+7\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}-7\cdot7\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$$

$$=\quad 3\quad-\quad7\sqrt{6}$$

$$+\quad7\sqrt{6}\quad-\quad49\cdot2$$

$$=\quad3\quad-\quad98$$

$$=\quad-95$$

$$\frac{3}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

$$=\frac{3(1+\sqrt{2})}{(1-\sqrt{2})(1+\sqrt{2})}$$

$$=\frac{3+3\sqrt{2}}{1-2}$$

$$=\frac{3+3\sqrt{2}}{-1}$$

$$=-3-3\sqrt{2}$$

Ejercicios del Texto

	Radical expression	Exponential expression
9.	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	
10.	$\sqrt[3]{7^2}$	
11.		$4^{2/3}$
12.		$10^{-3/2}$
13.	$\sqrt[5]{5^3}$	
14.		$2^{-1.5}$
15.		$a^{2/5}$
16.	$\dfrac{1}{\sqrt{x^5}}$	

17–28 ■ Radicals and Exponents Evaluate each expression.

17. **(a)** -2^6 **(b)** $(-2)^6$ **(c)** $\left(\frac{1}{5}\right)^2 \cdot (-3)^3$

18. **(a)** $(-5)^3$ **(b)** -5^3 **(c)** $(-5)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$

19. **(a)** $\left(\frac{5}{3}\right)^0 \cdot 2^{-1}$ **(b)** $\dfrac{2^{-3}}{3^0}$ **(c)** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$

20. **(a)** $-2^3 \cdot (-2)^0$ **(b)** $-2^{-3} \cdot (-2)^0$ **(c)** $\left(\frac{-3}{5}\right)^{-3}$

21. **(a)** $5^3 \cdot 5$ **(b)** $5^4 \cdot 5^{-2}$ **(c)** $(2^2)^3$

22. **(a)** $3^8 \cdot 3^5$ **(b)** $\dfrac{10^7}{10^4}$ **(c)** $(3^5)^4$

24. **(a)** $2\sqrt[3]{81}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{25}}$ **(c)** $\sqrt{\frac{12}{49}}$

25. **(a)** $\sqrt{3}\sqrt{15}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}}$ **(c)** $\sqrt[3]{24}\sqrt[3]{18}$

26. **(a)** $\sqrt{10}\sqrt{32}$ **(b)** $\dfrac{\sqrt{54}}{\sqrt{6}}$ **(c)** $\sqrt[3]{15}\sqrt[3]{75}$

27. **(a)** $\dfrac{\sqrt{132}}{\sqrt{3}}$ **(b)** $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{32}$ **(c)** $\sqrt[4]{\frac{1}{4}}\sqrt[4]{\frac{1}{64}}$

28. **(a)** $\sqrt[5]{\frac{1}{8}}\sqrt[5]{\frac{1}{4}}$ **(b)** $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}\sqrt[6]{128}$ **(c)** $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{108}}$

29–34 ■ Exponents Simplify each expression, and eliminate any negative exponents.

29. **(a)** $x^3 \cdot x^4$ **(b)** $(2y^2)^3$ **(c)** $y^{-2}y^7$

30. **(a)** $y^5 \cdot y^2$ **(b)** $(8x)^2$ **(c)** x^4x^{-3}

31. **(a)** $x^{-5} \cdot x^3$ **(b)** $w^{-2}w^{-4}w^5$ **(c)** $\dfrac{x^{16}}{x^{10}}$

32. **(a)** $y^2 \cdot y^{-5}$ **(b)** $z^5z^{-3}z^{-4}$ **(c)** $\dfrac{y^7y^0}{y^{10}}$



Ejercicios del Texto …

35–44 ■ Exponents Simplify each expression, and eliminate any negative exponents.

35. **(a)** $(3x^3y^2)(2y^3)$ **(b)** $(5w^2z^{-2})^2(z^3)$

36. **(a)** $(8m^{-2}n^4)(\frac{1}{2}n^{-2})$ **(b)** $(3a^4b^{-2})^3(a^2b^{-1})$

37. **(a)** $\dfrac{x^2y^{-1}}{x^{-5}}$ **(b)** $\left(\dfrac{a^3}{2b^2}\right)^3$

38. **(a)** $\dfrac{y^{-2}z^{-3}}{y^{-1}}$ **(b)** $\left(\dfrac{x^3y^{-2}}{x^{-3}y^2}\right)^{-2}$

39. **(a)** $\left(\dfrac{a^2}{b}\right)^5\left(\dfrac{a^3b^2}{c^3}\right)^3$ **(b)** $\dfrac{(u^{-1}v^2)^2}{(u^3v^{-2})^3}$

40. **(a)** $\left(\dfrac{x^4z^2}{4y^5}\right)\left(\dfrac{2x^3y^2}{z^3}\right)^2$ **(b)** $\dfrac{(rs^2)^3}{(r^{-3}s^2)^2}$

41. **(a)** $\dfrac{8a^3b^{-4}}{2a^{-5}b^5}$ **(b)** $\left(\dfrac{y}{5x^{-2}}\right)^{-3}$

42. **(a)** $\dfrac{5xy^{-2}}{x^{-1}y^{-3}}$ **(b)** $\left(\dfrac{2a^{-1}b}{a^2b^{-3}}\right)^{-3}$

43. **(a)** $\left(\dfrac{3a}{b^3}\right)^{-1}$ **(b)** $\left(\dfrac{q^{-1}r^{-1}s^{-2}}{r^{-5}sq^{-8}}\right)^{-1}$

44. **(a)** $\left(\dfrac{s^2t^{-4}}{5s^{-1}t}\right)^{-2}$ **(b)** $\left(\dfrac{xy^{-2}z^{-3}}{x^2y^3z^{-4}}\right)^{-3}$

45–48 ■ Radicals Simplify the expression. Assume that the letters denote any positive real numbers.

45. **(a)** $\sqrt[4]{x^4}$ **(b)** $\sqrt[4]{16x^8}$

46. **(a)** $\sqrt[5]{x^{10}}$ **(b)** $\sqrt[3]{x^3y^6}$

47. **(a)** $\sqrt[6]{64a^6b^7}$ **(b)** $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

48. **(a)** $\sqrt[4]{x^4y^2z^2}$ **(b)** $\sqrt[3]{\sqrt{64x^6}}$

49–54 ■ Radical Expressions Simplify the expression.

49. **(a)** $\sqrt{32} + \sqrt{18}$ **(b)** $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

50. **(a)** $\sqrt{125} + \sqrt{45}$ **(b)** $\sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{16}$

51. **(a)** $\sqrt{9a^3} + \sqrt{a}$ **(b)** $\sqrt{16x} + \sqrt{x^5}$

52. **(a)** $\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{8x}$ **(b)** $4\sqrt{18rt^3} + 5\sqrt{32r^3t^5}$

53. **(a)** $\sqrt{81x^2 + 81}$ **(b)** $\sqrt{36x^2 + 36y^2}$

54. **(a)** $\sqrt{27a^2 + 63a}$ **(b)** $\sqrt{75t + 100t^2}$

55–60 ■ Rational Exponents Evaluate each expression.

55. **(a)** $16^{1/4}$ **(b)** $-8^{1/3}$ **(c)** $9^{-1/2}$

56. **(a)** $27^{1/3}$ **(b)** $(-8)^{1/3}$ **(c)** $-(\frac{1}{8})^{1/3}$

57. **(a)** $32^{2/5}$ **(b)** $(\frac{4}{9})^{-1/2}$ **(c)** $(\frac{16}{81})^{3/4}$

58. **(a)** $125^{2/3}$ **(b)** $(\frac{25}{64})^{3/2}$ **(c)** $27^{-4/3}$