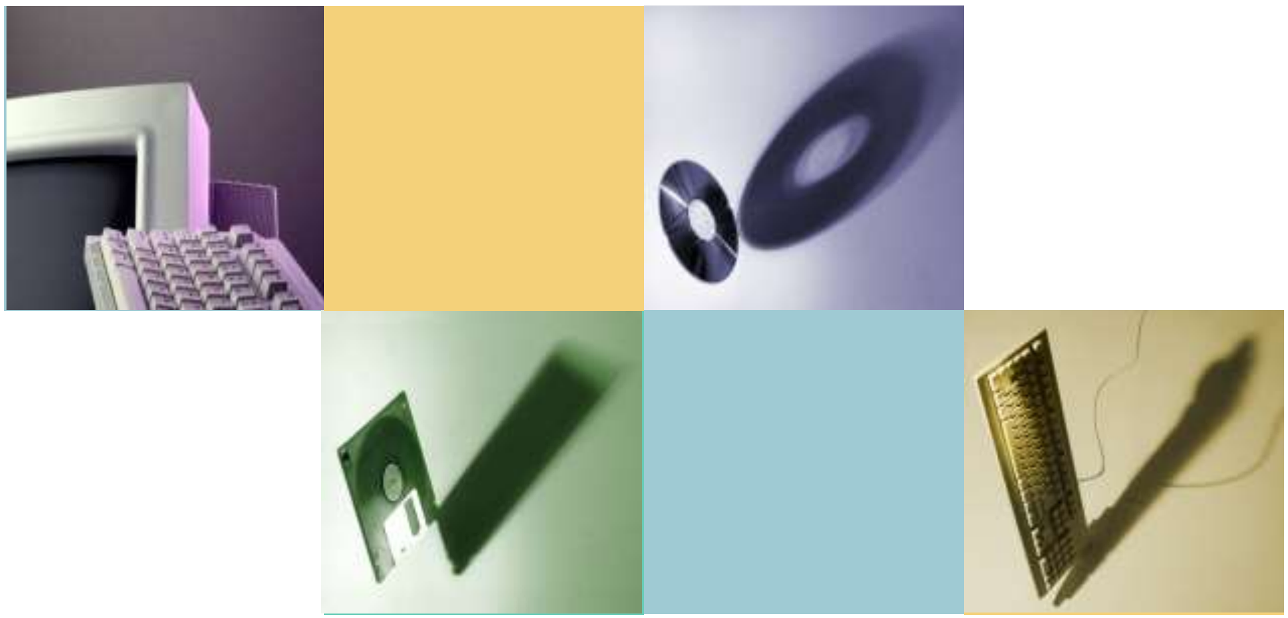
Lección 2.3



El Sistema de Coordenadas y La Ecuación de la Recta

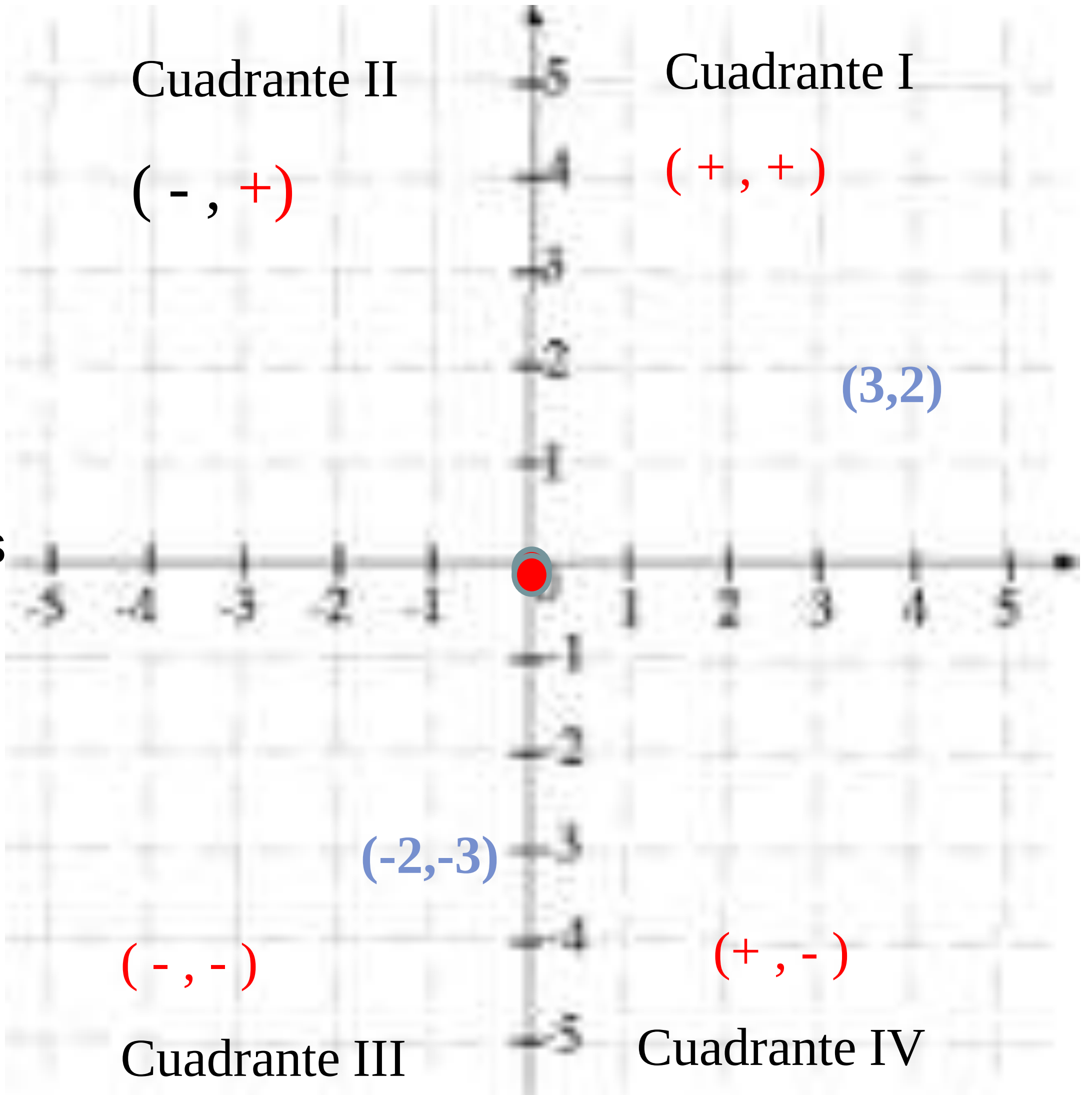
Actividades 2.3

- **Referencia:**
  - Seccíón 1.9 – Sistema de Coordenadas; Gráficas de Ecuaciones. Asignación: 11-14.; 21-30, 37, 83-91, 97,98, 99, 100
  - Sección 1.10: Líneas Rectas; 2-8, 9-15 (impares), 19-22, 23-39 (impares), 40, 41-45 (impares, 46, 47, 49; 57-67 (impares), 73-77 (impares).
- Referencias del Web
  - Matemáticas profe Alex - Como ubicar puntos en el Plano Cartesiano;
  - Math2Me: Distancia entre dos puntos; Punto Medio; Ecuación de círuclo dado el radio y origen; Obtener centro y radio dado ecuación de un círculo; Obtener la ecuación de un círculo dado la gráfica
  - Matemáticas profe Alex: Hallar la ecuación general de la circunferencia conociendo el centro y radio
  - Math2Me: Ecuación general de la recta; https://youtu.be/5bC_ZVLSG-Q; Ecuación ordinaria de la recta (forma y=,x+b); Identificación de rectas paralelas o perpendicuales

El sistema de coordenadas cartesianas

- Plano formado por la intersección de dos rectas perpendiculares en un punto llamado origen.
- La recta horizontal es el eje de x ; la vertical es el eje de y
- La localización de todo punto se expresa por sus coordenadas (x,y)
- Ejemplos:
  - (3, 2)
  - (-2, -3)

El plano se divide en cuatro regiones o cuadrantes …



Fórmula de distancia

- La distancia de dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) está determinada por:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

- Ejemplo: La distancia entre los puntos:

(3,8) y (-1,2) es:

$$d = \sqrt{(-1-3)^2 + (2-8)^2}$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2}$$

$$= \sqrt{16 + 36}$$

$$= \sqrt{52}$$

$$= \sqrt{4 \cdot 13}$$

$$= 2\sqrt{13}$$

$(-6, -4), (3, 4)$

$$d = \sqrt{(3-(-6))^2 + (4-(-4))^2}$$

$$= \sqrt{(9)^2 + (8)^2}$$

$$= \sqrt{81 + 64}$$

$$= \sqrt{145}$$

Coordenadas del punto medio

- Las coordenadas del punto medio (x, y) de dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) está dado por:

$$(x, y) = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

- Ejemplo: El punto medio del segmento que une:

(3, 8) y (-1, 2)

$$(x, y) = \left(\frac{3 + (-1)}{2}, \frac{2 + 8}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{2}{2}, \frac{10}{2}\right)$$

$$= \color{red}{(1, 5)}$$

(5,-4) y (3,2).

$$(x, y) = \left(\frac{5 + 3}{2}, \frac{-4 + 2}{2}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{2}, \frac{-2}{2}\right)$$

$$= \color{red}{(4, -1)}$$

Ejercicios

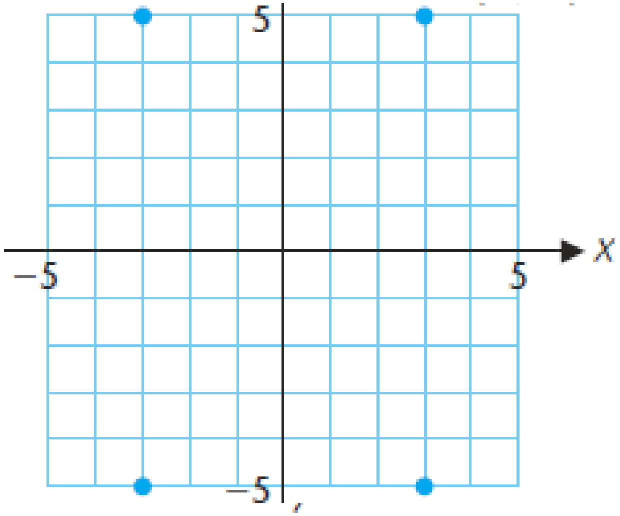
Grafique los siguientes puntos

$(5, 0), (3, -2), (-4, 2), (4, 4)$

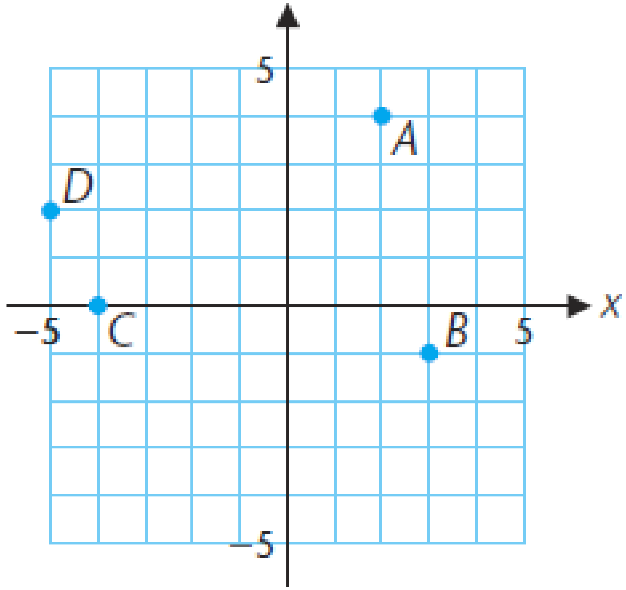
$(0, 4), (-3, 2), (5, -1), (-2, -4)$

$(0, -2), (-1, -3), (4, -5), (-2, 1)$

$(-2, 0), (3, 2), (1, -4), (-3, 5)$



Encuentre las coordenadas de los puntos A, B, C, D, B



Para cada par de puntos. encuentre (a) la distancia entre ellos, (b) coordenadas del punto medio.

$(1, 0), (4, 4)$ $(0, 1), (3, 5)$

$(0, -2), (5, 10)$ $(3, 0), (-2, -3)$

$(-6, -4), (3, 4)$ $(-5, 4), (6, -1)$

$(-6, -3), (-2, -1)$ $(-5, -2), (-1, 2)$

Ecuaciones en dos variables

- Compare: $x + 5 = 8$ $\quad$ $x + y = 8$

  $x = 3$ $\quad$ $(3) + (5) = 8$ $\quad$ $x = 3 \quad y = 5$

  La solución es 3 $\quad$ $(1) + (7) = 8$ $\quad$ $x = 1 \quad y = 7$

  $(-1) + (9) = 8$ $\quad$ $x = -1 \; y = 9$

  ¡Son sólo algunas soluciones!

- Las soluciones de las ecuaciones en dos variables son pares de números (x, y)
- Si (x, y) es una solución entonces también representa un punto en su gráfica.

Ejemplo 1

- ¿Es $(-1, -8)$ una solución de $y + 3x - 5 = 0$?

¿Es $(-1, -8)$ un punto en la gráfica de $y + 3x – 5 = 0$?

Verificación:

$$y + 3x - 5 = 0$$
$$(-8) + 3(-1) - 5 = 0$$

¿-16 = 0?

No

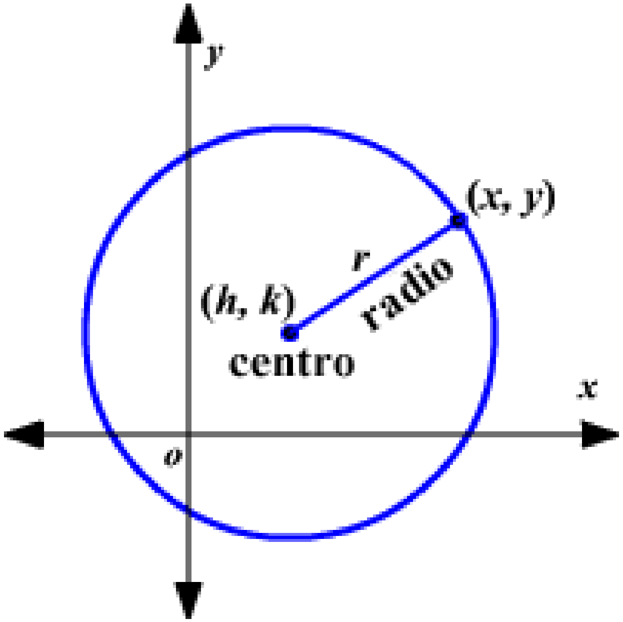
(-1, -8) NO es una solución de $y + 3x - 5 = 0$

(-1, -8) NO es un punto en la gráfica de $y + 3x - 5 = 0$

El círculo es la figura que se forma por puntos equidistantes a un punto llamado su **centro**. La distancia común se llama el radio del círculo.

Si (x, y) es cualquier punto en un círculo con centro (h, k) su radio es dado por:

$$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$$



LA ECUACIÓN DE UN CÍRCULO

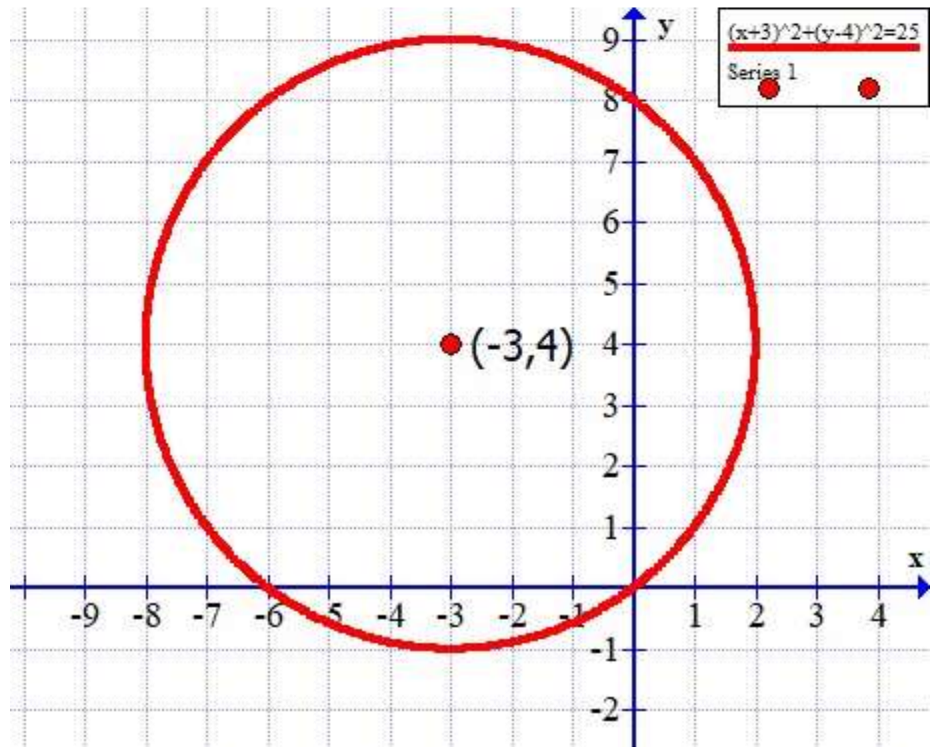
Ejemplo 2

- Determine la ecuación del círculo con radio 5 y centro en (–3, 4). Gráfique el círculo e identifique su dominio.
- Solución:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-(-3))^2+(y-(4))^2=5^2$$

$$(x+3)^2+(y-4)^2=25$$



Ejemplo 3

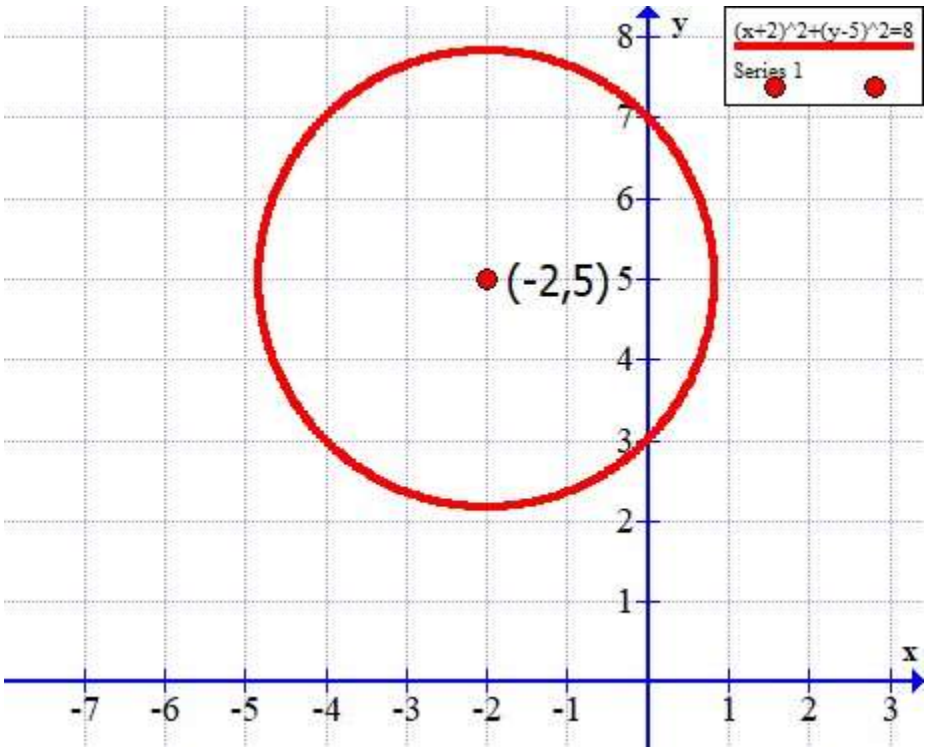
- Encuentre el centro y radio del círculo cuya ecuación es: $(x+2)^2+(y-5)^2=8$
- Solución:

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$(x-(-2))^2+(y-5)^2=(\sqrt{8})^2$$

$$centro=(-2,5), radio=\sqrt{8}$$

$$=2\sqrt{2}$$



Ejemplo 4

- Encuentre el centro y radio del círculo cuya ecuación es: $x^2-6x+y^2+10y+25=0.$
- Solución: $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$

$$x^2-6x+y^2+10y+25-25=0-25$$

$$x^2-6x+\_\_+y^2+10y+\_\_=-25$$

$$(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)=-25+9+25$$

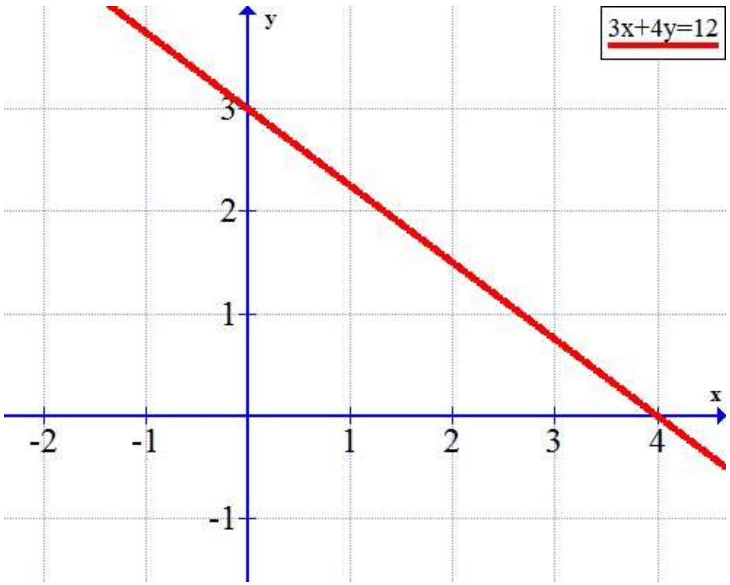
$$(x-3)^2+(y+5)^2=9$$

$$centro=(3,-5)\quad radio=3$$

Si A, B y C son números reales, con A, B distintos de 0 entonces la gráfica de la ecuación $Ax + By = C$ es una recta (***Forma estándar***).

Ejemplo:

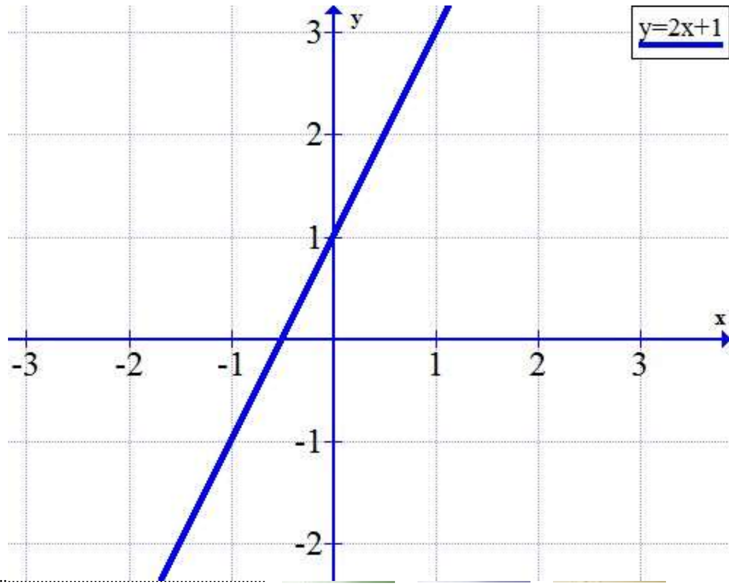
$$3x + 4y = 12$$



Si m y b son constantes, la gráfica de la ecuación $y = mx + b$ es una recta (***Forma pendiente-intercepto***)

Ejemplo:

$$y = 2x + 1$$



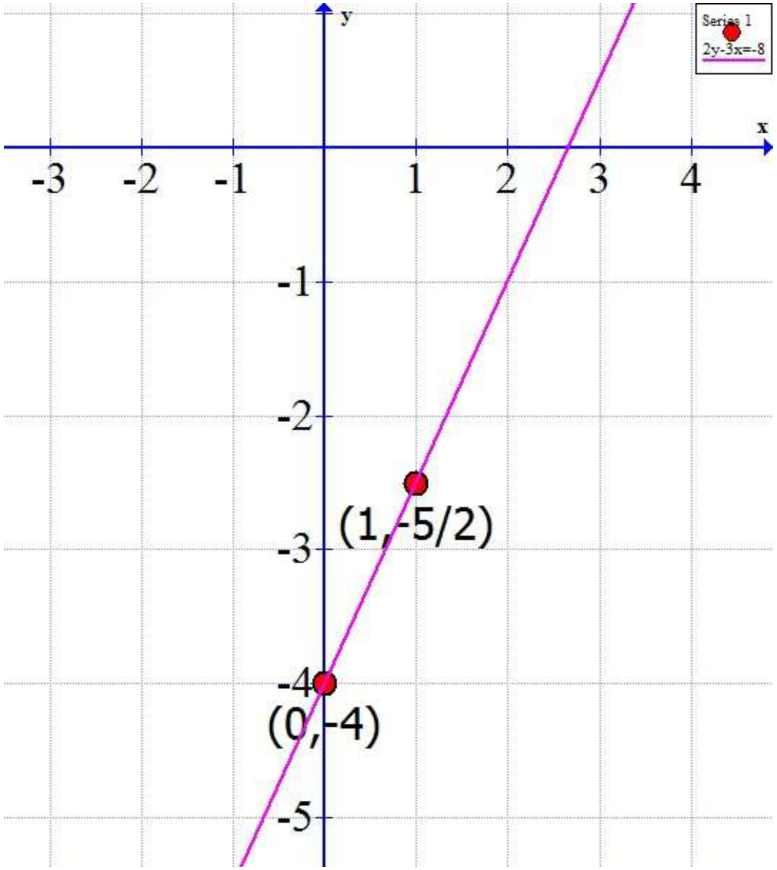
LA ECUACIÓN DE UNA RECTA

Ejemplo 5

- Trace la gráfica de $2y - 3x = -8$
- **Paso 1:** Asigne valores a *x* (*variable independiente*). Por ejemplo: 0 y 1
- **Paso 2:** Resuelva por *y* (*variable dependiente*)

$$2y - 3x = -8$$
$$2y - 3(0) = -8$$
$$2y = -8$$
$$y = -4$$

$$2y - 3x = -8$$
$$2y - 3(1) = -8$$
$$2y - 3 = -8$$
$$2y = -5$$
$$y = -\frac{5}{2}$$



Los puntos de la gráfica (o soluciones de la ecuación) son: $(\mathbf{0}, -\mathbf{4})$ $\quad (\mathbf{1}, -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}})$

Interceptos

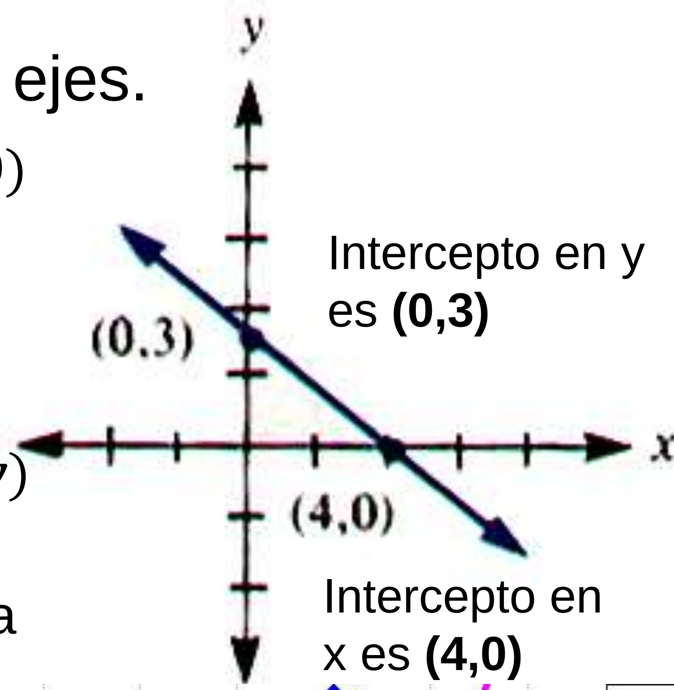
- Puntos donde la gráfica cruza los ejes.

Intercepto en x es un punto de la forma $(\boldsymbol{x}, \mathbf{0})$

Para encontrar el ntercepto en x de una recta, deje que el valor de y se $\mathbf{0}$ y resuelva por x

Intercepto en y es un punto de la forma $(\mathbf{0}, \boldsymbol{y})$

Para encontrar el ntercepto en y de una recta, deje que el valor de x sea $\mathbf{0}$ y resuelva por y



Intercepto en y es **(0,3)**

Intercepto en x es **(4,0)**

Ej: Determine los interceptos de $y = 3x - 6$

Si $y = 0$, resuelva por x

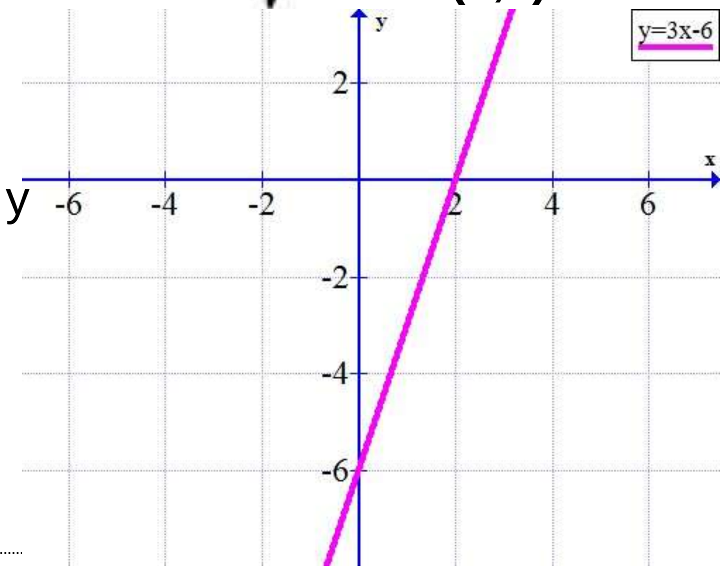
$$(0) = 3x - 6$$
$$6 = 3x$$
$$x = 2$$

Intercepto en x: $(2,0)$

Si $x = 0$, resuelva por y

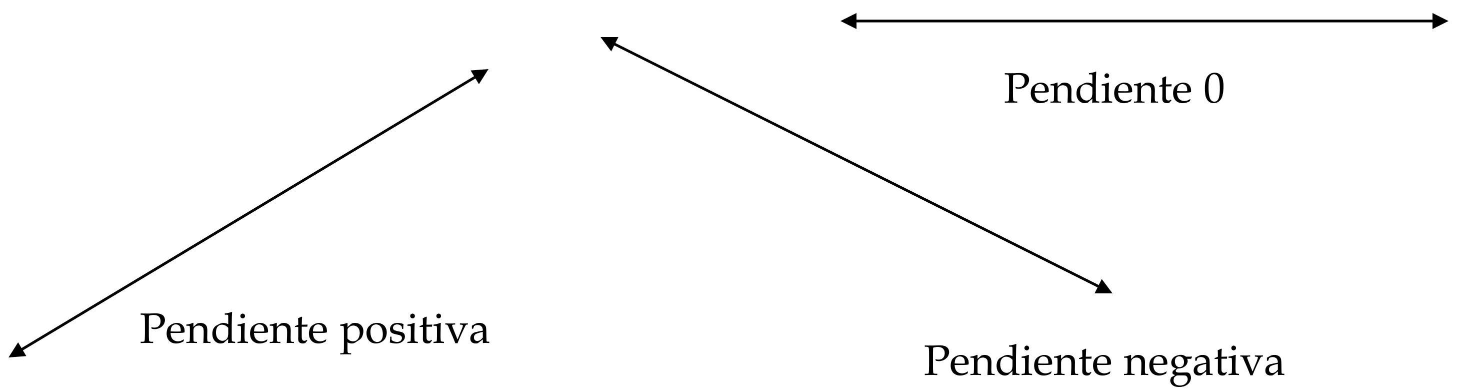
$$y = 3(0) - 6$$
$$y = 0 - 6$$
$$y = -6$$

Intercepto en y: $(0, -6)$



Pendiente (Slope)

- La pendiente de una línea recta no vertical es una medida de inclinación de la recta con respecto al eje horizontal.
- La líneas rectas verticales no tienen pendiente.
- Hay tres casos:



Pendiente (Slope)

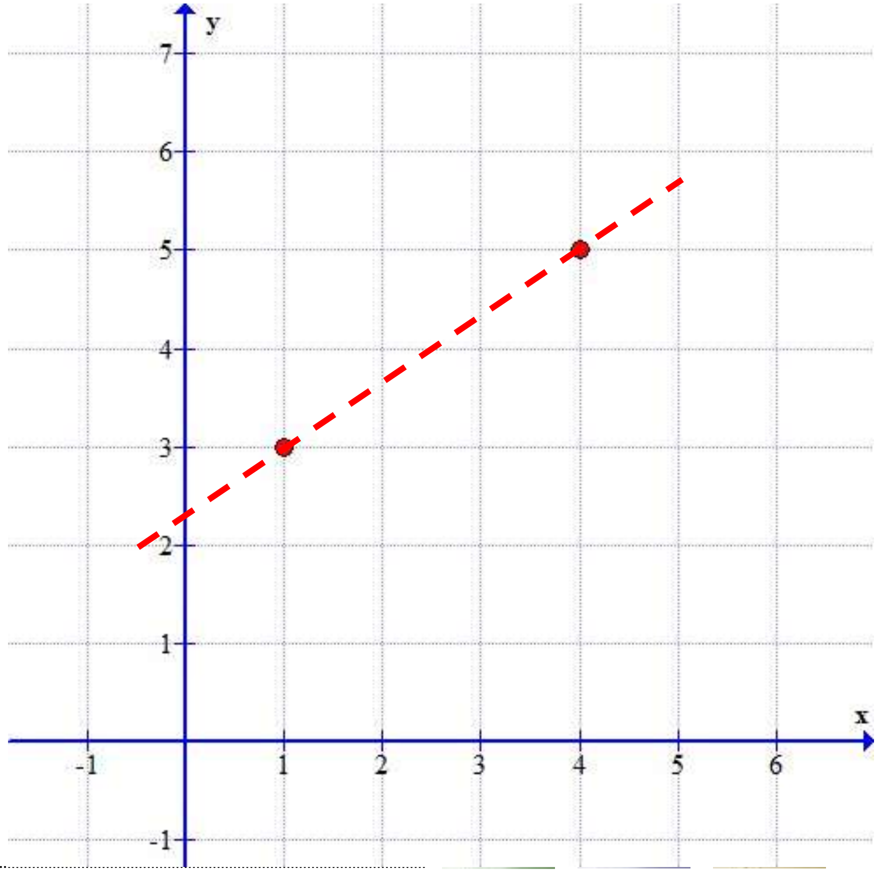
- Sea (x_1, y_1) y (x_2, y_2) dos puntos en una recta tal que $x_1 \neq x_2$. Entonces, la **pendiente (m)** de la recta que por esos puntos es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

La pendiente de la recta por (1,3) y (4,5):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(5) - (3)}{(4) - (1)} = \frac{2}{3}$$



Pendiente-Intercepto

- $y = mx + b$ es la ecuación de una línea en el plano si y solo si su pendiente es el coeficiente de *x* (m) y su intercepto en *y* es (0,b).
- Ejemplos:
  - y = 5x + 3 pendiente 5 , intercepto en y (0, 3)
  - y = -3x - 5 pendiente -3 , intercepto en y (0, -5)
  - y = x pendiente 1, intercepto en y (0, 0)
  - $y = \frac{x}{2} + 1$ tiene 1/2 e intercepto en y (0, 1)

Ejemplos

1) Determine la pendiente e intercepto en y de la recta cuya ecuación es $3x - 2y = 6$.
   - Despeje y de la ecuación:

$$-2y = -3x + 6$$

$$\frac{-2y}{-2} = \frac{-3}{-2}x + \frac{6}{-2}$$

$$y = \frac{3}{2}x - 3$$

   - Pendiente es $\frac{3}{2}$.
   - El intercepto en y es (0,-3)

2) Determine la ecuación de la recta cuya pendiente es -4 e intercepto en *y* es -3.

$$y = mx + b$$

$$y = (-4)x + (-3)$$

$$y = -4x - 3$$

Pendiente - Punto

- Una ecuación de una recta no vertical con pendiente *m* que pasa por el punto (x_1, y_1) es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

- Ejemplo: La ecuación de la recta con **pendiente -2** y que pasa por **(-1,5)** tiene como ecuación:

$$y - (5) = (-2)(x - (-1))$$

$$y - 5 = -2(x + 1)$$

$$y - 5 = -2x - 2$$

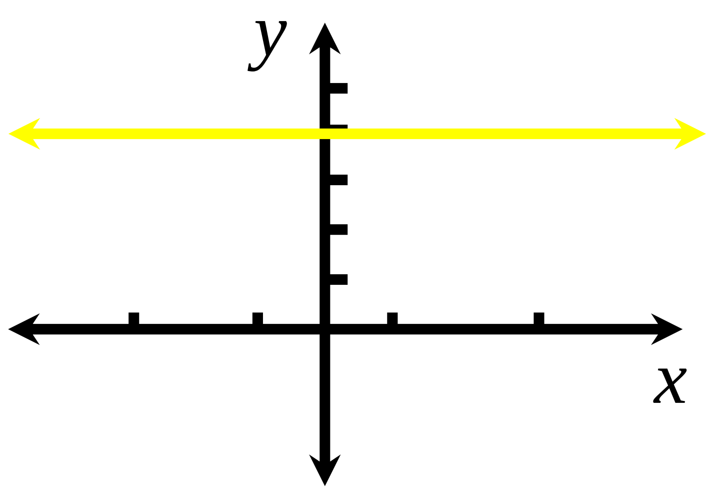
$$y - 5 + 5 = -2x - 2 + 5$$

$$y = -2x + 3$$

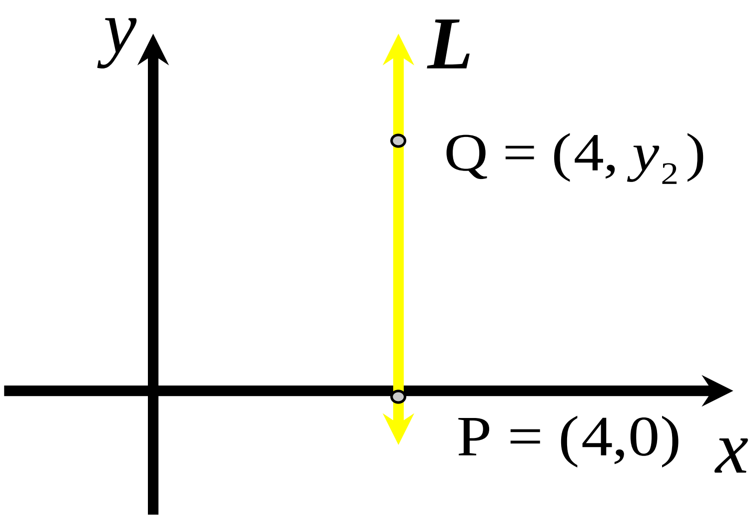
Rectas horizontales y verticales

- La ecuación de una recta horizontal es dado por la ecuación $y = b$, donde (0,b) es el intercepto en y.
- Ejemplo:

La gráfica de $y = 4$

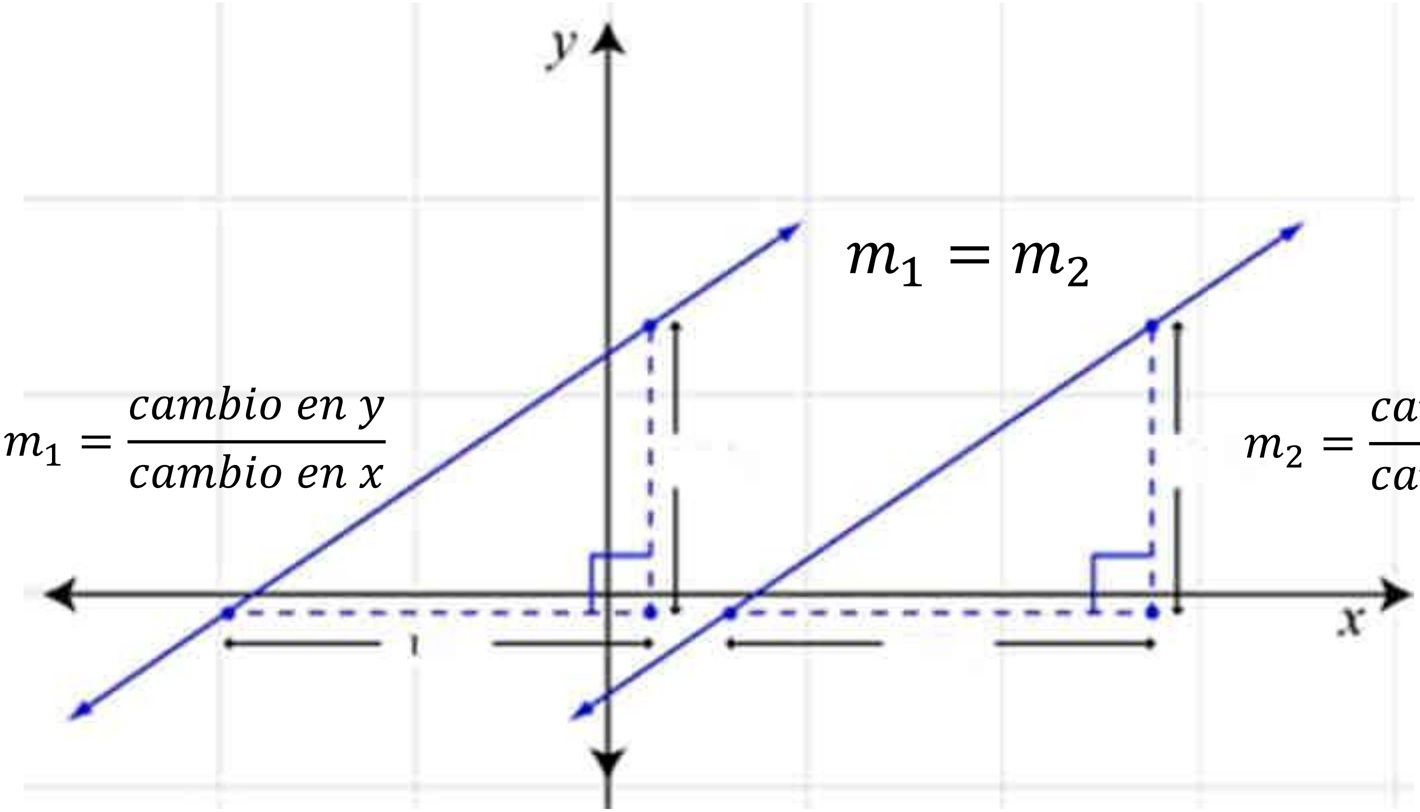


- La ecuación de una recta vertical es dado por la ecuación $x = a$, donde (a,0) es el intercepto en x.
- Ejemplo:
- La gráfica de $x = 4$



Rectas paralelas

- Dos rectas son paralelas si no tienen un punto en común.



$$m_1 = m_2$$

$$m_1 = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$$

$$m_2 = \frac{cambio\ en\ y}{cambio\ en\ x}$$

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente pero diferentes interceptos en y.

Ejemplo 6

- Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto $(\mathbf{1}, \mathbf{5})$ y es paralela a la recta con ecuación $\boldsymbol{y = -3x + 5}$

Por tanto la recta por el punto (1,5) también tiene pendiente $m_2 =$ -3

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

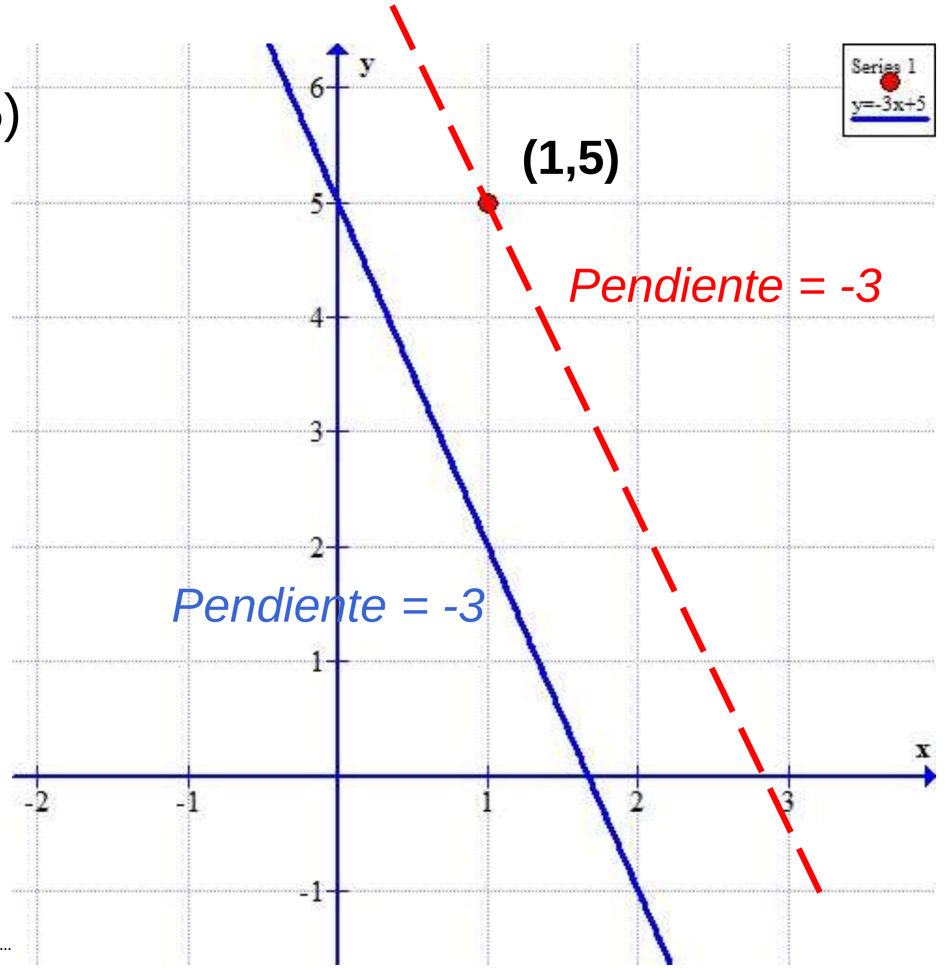
$$y - (5) = (-3)(x - (1))$$

$$y - 5 = -3(x - 1)$$

$$y - 5 = -3x + 3$$

$$y = -3x + 3 + 5$$

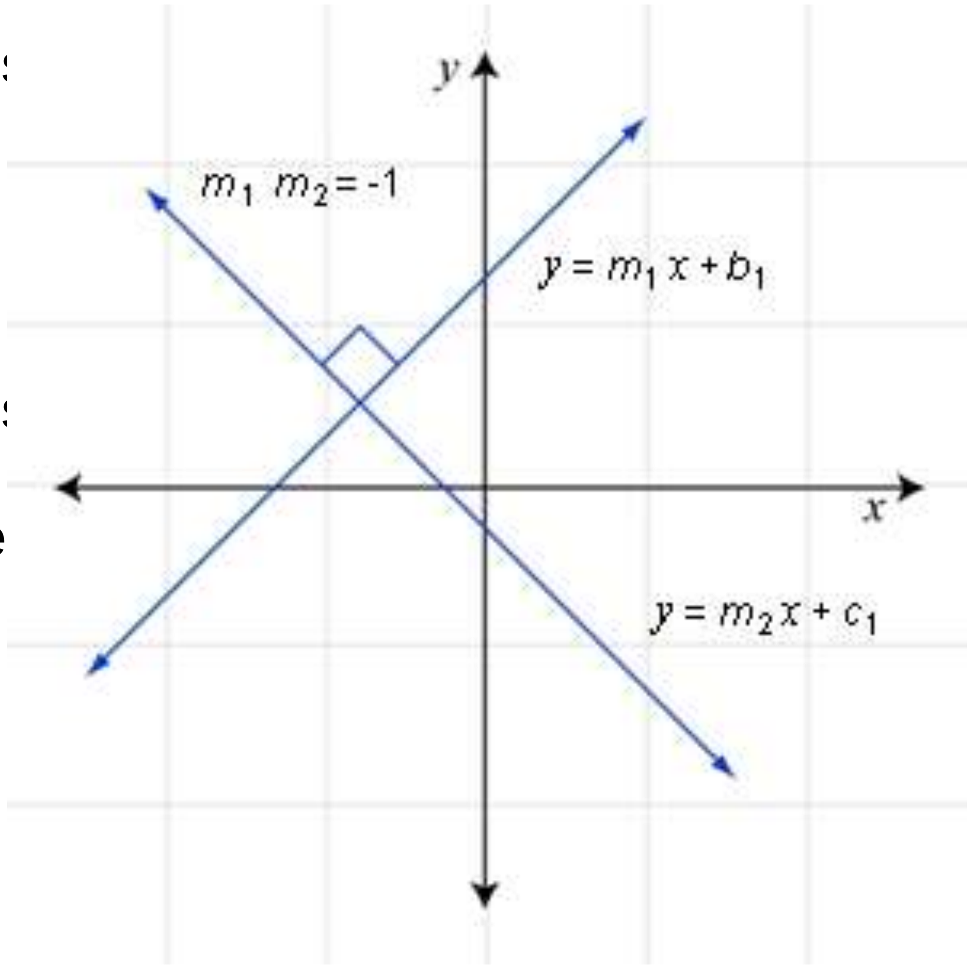
$$y = -3x + 8$$



Rectas perpendiculares

- Dos rectas perpendiculares son dos rectas que se intersecan y forman un ángulo de 90 grados.

- Dos rectas perpendiculares son dos rectas donde el producto de sus pendientes es igual a -1.



$$m_1 m_2 = -1$$

Ejemplo 8

- Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,5) y es perpendicular a la recta y = -3x + 5

Por tanto la recta perpendicular por el punto (1,5) tiene pendiente $m = \frac{1}{3}$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

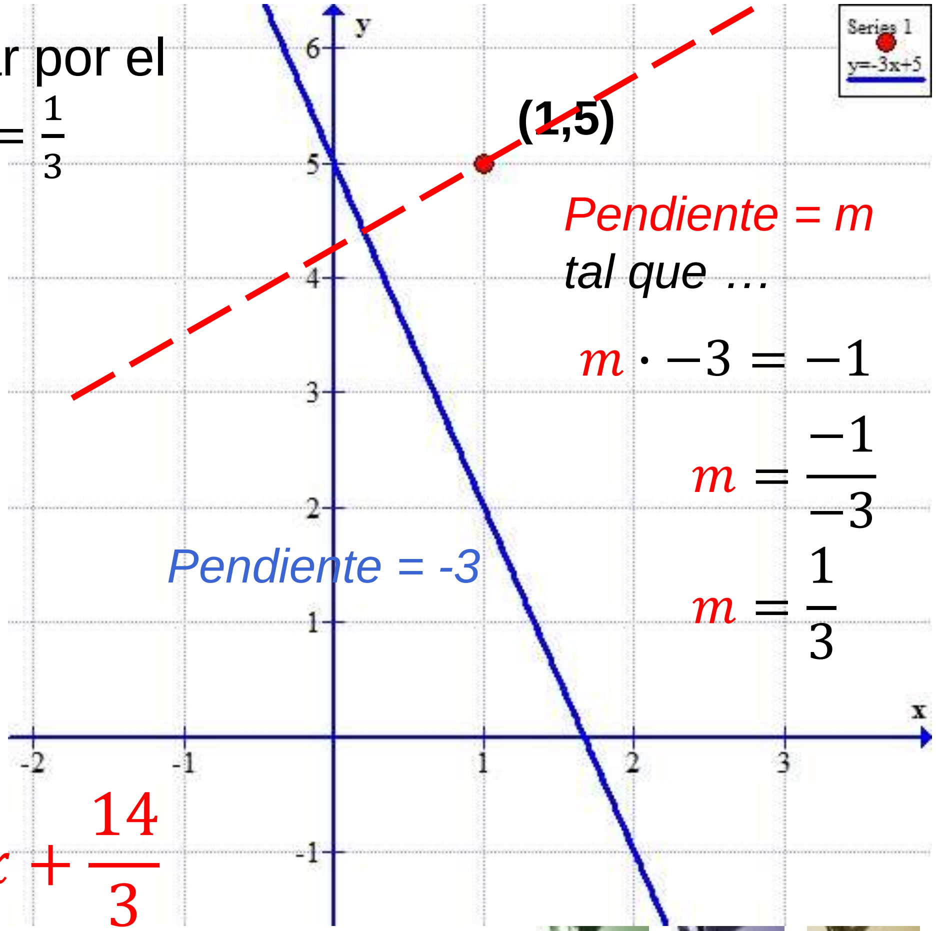
$$y - (5) = (\frac{1}{3})(x - (1))$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$y - 5 = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}$$

$$y = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + 5$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$$



Pendiente = m tal que …

$$m \cdot -3 = -1$$

$$m = \frac{-1}{-3}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Ejercicio

- Determine la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,2) y es perpendicular a la recta $3y - 2x = 6$
- Solución:

$$3y - 2x = 6$$

$$3y = 2x + 6$$

$$y = \frac{2}{3}x + 2$$

$$m \cdot \frac{2}{3} = -1$$

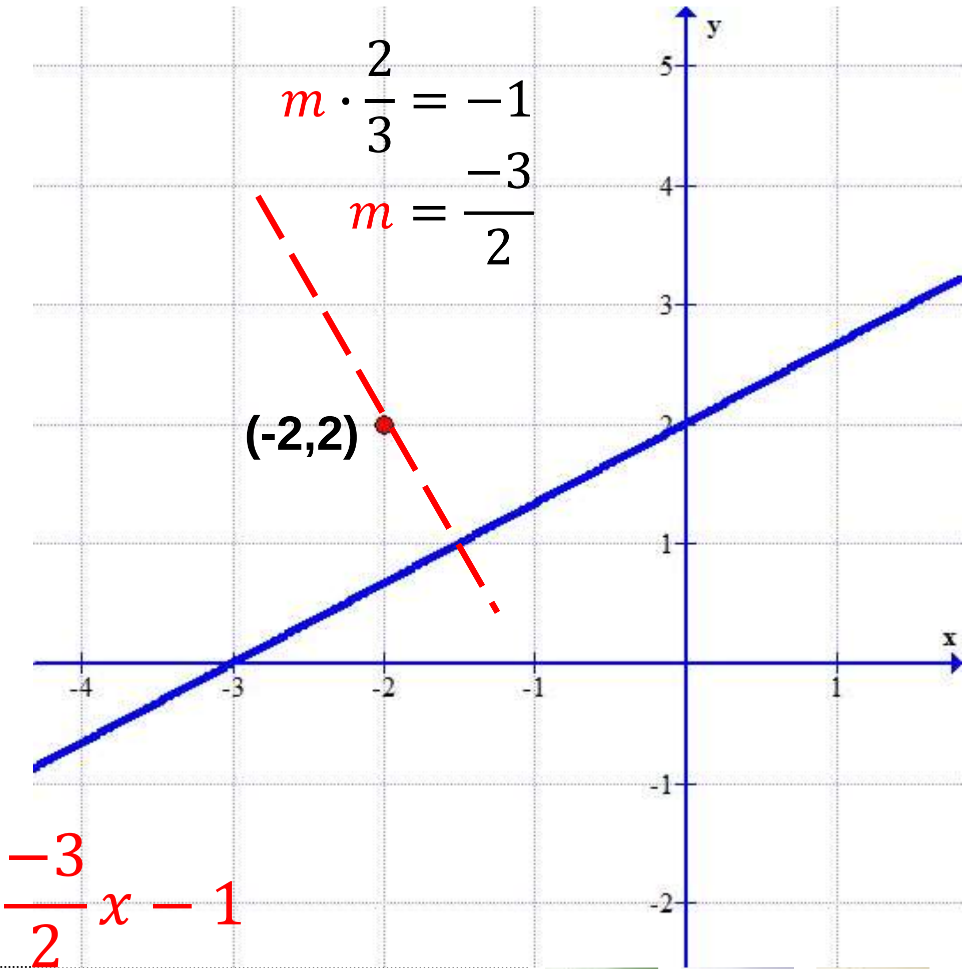
$$m = \frac{-3}{2}$$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - (2) = (\frac{-3}{2})(x - (-2))$$

$$y - 2 = \frac{-3}{2}x - 3$$

$$y = \frac{-3}{2}x - 3 + 2$$



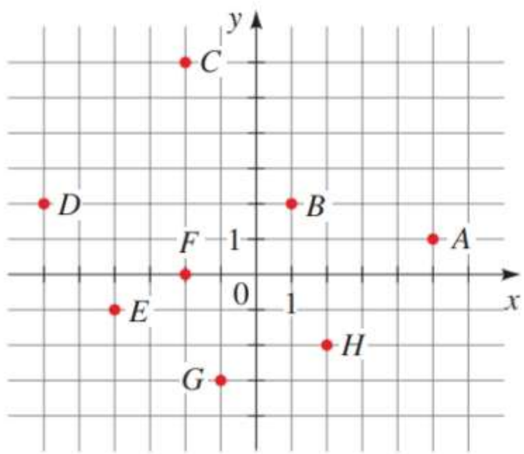
$$y = \frac{-3}{2}x - 1$$

Ejercicios del Texto 1.9

11–12 ■ Points in a Coordinate Plane Refer to the figure below.

11. Find the coordinates of the points shown.

12. List the points that lie in Quadrants I and III.



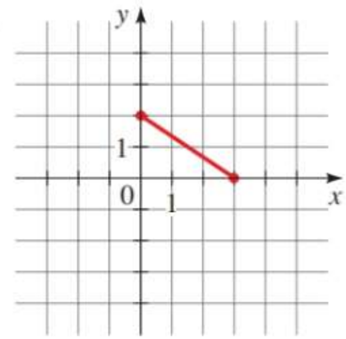
13–14 ■ Points in a Coordinate Plane Plot the given points in a coordinate plane.

13. $(0, 5)$, $(-1, 0)$, $(-1, -2)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$

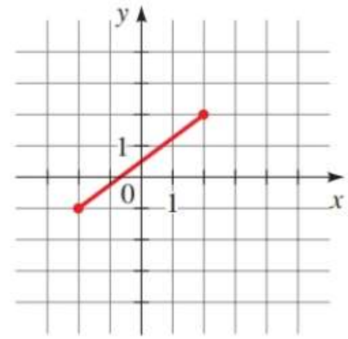
14. $(-5, 0)$, $(2, 0)$, $(2.6, -1.3)$, $(-2.5, 3.5)$

21–24 ■ Distance and Midpoint A pair of points is graphed. **(a)** Find the distance between them. **(b)** Find the midpoint of the segment that joins them.

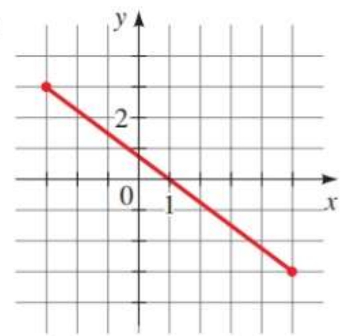
21.



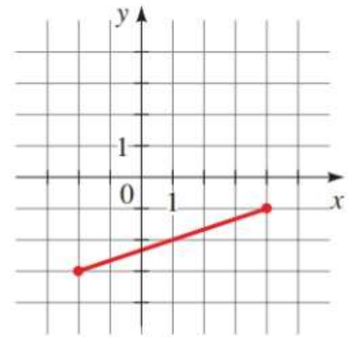
22.



23.



24.



25–30 ■ Distance and Midpoint A pair of points is given. **(a)** Plot the points in a coordinate plane. **(b)** Find the distance between them. **(c)** Find the midpoint of the segment that joins them.

25. $(0, 8)$, $(6, 16)$

26. $(-2, 5)$, $(10, 0)$

27. $(3, -2)$, $(-4, 5)$

28. $(-1, 1)$, $(-6, -3)$

29. $(6, -2)$, $(-6, 2)$

30. $(0, -6)$, $(5, 0)$

Ejercicios del Texto 1.9 p2

37. Which of the points $P(3, 1)$ or $Q(-1, 3)$ is closer to the point $R(-1, -1)$?

83–88 ■ Graphing Circles Find the center and radius of the circle, and sketch its graph.

83. $x^2 + y^2 = 9$

84. $x^2 + y^2 = 5$

85. $x^2 + (y - 4)^2 = 1$

86. $(x + 1)^2 + y^2 = 9$

87. $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$

88. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 36$

89–96 ■ Equations of Circles Find an equation of the circle that satisfies the given conditions.

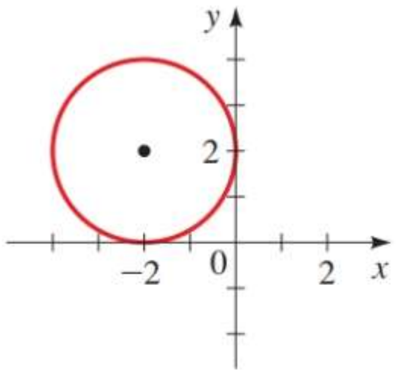
89. Center $(2, -1)$; radius 3

90. Center $(-1, -4)$; radius 8

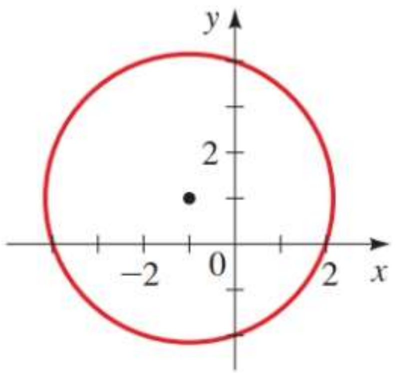
91. Center at the origin; passes through $(4, 7)$

97–98 ■ Equations of Circles Find the equation of the circle shown in the figure.

97.



98.



99–104 ■ Equations of Circles Show that the equation represents a circle, and find the center and radius of the circle.

99. $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$

100. $x^2 + y^2 + 6y + 2 = 0$

Ejercicios del Texto 1.10

2. A line has the equation $y = 3x + 2$.

(a) This line has slope ________.

(b) Any line parallel to this line has slope ________.

(c) Any line perpendicular to this line has slope ________.

3. The point-slope form of the equation of the line with slope 3 passing through the point $(1, 2)$ is ________.

4. For the linear equation $2x + 3y - 12 = 0$, the x-intercept is ________ and the y-intercept is ________. The equation in slope-intercept form is $y =$ ________________. The slope of the graph of this equation is ________.

5. The slope of a horizontal line is ________. The equation of the horizontal line passing through $(2, 3)$ is ________.

6. The slope of a vertical line is ________. The equation of the vertical line passing through $(2, 3)$ is ________.

7. *Yes or No*? If *No*, give a reason.

(a) Is the graph of $y = -3$ a horizontal line?

(b) Is the graph of $x = -3$ a vertical line?

(c) Does a line perpendicular to a horizontal line have slope 0?

(d) Does a line perpendicular to a vertical line have slope 0?

8. Sketch a graph of the lines $y = -3$ and $x = -3$. Are the lines perpendicular?

9–16 ■ Slope Find the slope of the line through P and Q.

9. $P(-1, 2)$, $Q(0, 0)$

10. $P(0, 0)$, $Q(3, -1)$

11. $P(2, -2)$, $Q(7, -1)$

12. $P(-5, 1)$, $Q(3, -2)$

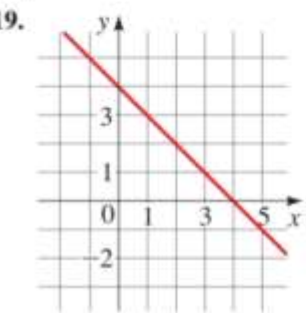
13. $P(5, 4)$, $Q(0, 4)$

14. $P(4, 3)$, $Q(1, -1)$

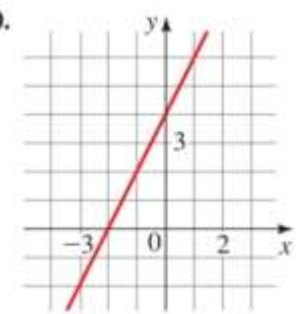
15. $P(10, -2)$, $Q(6, -5)$

19–22 ■ Equations of Lines Find an equation for the line whose graph is sketched.

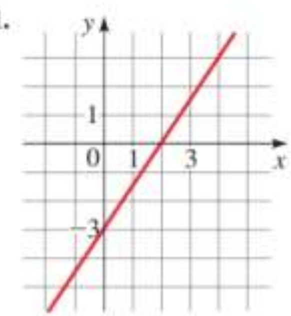
19.



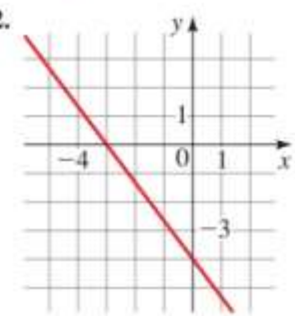
20.



21.



22.



Ejercicios del Texto 1.10 p2

23–50 ■ Finding Equations of Lines Find an equation of the line that satisfies the given conditions.

23. Slope 3; y-intercept -2

24. Slope $\frac{2}{5}$; y-intercept 4

25. Through $(2, 3)$; slope 5

26. Through $(-2, 4)$; slope -1

27. Through $(1, 7)$; slope $\frac{2}{3}$

28. Through $(-3, -5)$; slope $-\frac{7}{2}$

29. Through $(2, 1)$ and $(1, 6)$

30. Through $(-1, -2)$ and $(4, 3)$

31. Through $(-2, 5)$ and $(-1, -3)$

32. Through $(1, 7)$ and $(4, 7)$

33. x-intercept 1; y-intercept -3

34. x-intercept -8; y-intercept 6

35. Through $(1, 3)$; slope 0

36. Through $(-1, 4)$; slope undefined

37. Through $(2, -1)$; slope undefined

38. Through $(5, 1)$; slope 0

39. Through $(1, 2)$; parallel to the line $y = 3x - 5$

40. Through $(-3, 2)$; perpendicular to the line $y = -\frac{1}{2}x + 7$

41. Through $(4, 5)$; parallel to the x-axis

42. Through $(4, 5)$; parallel to the y-axis

43. Through $(1, -6)$; parallel to the line $x + 2y = 6$

44. y-intercept 6; parallel to the line $2x + 3y + 4 = 0$

45. Through $(-1, 2)$; parallel to the line $x = 5$

46. Through $(2, 6)$; perpendicular to the line $y = 1$

47. Through $(-1, -2)$; perpendicular to the line $2x + 5y + 8 = 0$

48. Through $(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3})$; perpendicular to the line $4x - 8y = 1$

49. Through $(1, 7)$; parallel to the line passing through $(2, 5)$ and $(-2, 1)$

57–66 ■ Using Slopes and y-Intercepts to Graph Lines Find the slope and y-intercept of the line, and draw its graph.

57. $y = 3 - x$

58. $y = \frac{2}{3}x - 2$

59. $-2x + y = 7$

60. $2x - 5y = 0$

61. $4x + 5y = 10$

62. $3x - 4y = 12$

Ejercicios del Texto 1.10 p3

63. $y = 4$

64. $x = -5$

65. $x = 3$

66. $y = -2$

67–72 ■ Using *x*- and *y*-Intercepts to Graph Lines Find the x- and y-intercepts of the line, and draw its graph.

67. $5x + 2y - 10 = 0$

68. $6x - 7y - 42 = 0$

69. $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}y + 1 = 0$

70. $\frac{1}{3}x - \frac{1}{5}y - 2 = 0$

71. $y = 6x + 4$

72. $y = -4x - 10$

73–78 ■ Parallel and Perpendicular Lines The equations of two lines are given. Determine whether the lines are parallel, perpendicular, or neither.

73. $y = 2x + 3; \quad 2y - 4x - 5 = 0$

74. $y = \frac{1}{2}x + 4; \quad 2x + 4y = 1$

75. $-3x + 4y = 4; \quad 4x + 3y = 5$

76. $2x - 3y = 10; \quad 3y - 2x - 7 = 0$

77. $7x - 3y = 2; \quad 9y + 21x = 1$

78. $6y - 2x = 5; \quad 2y + 6x = 1$