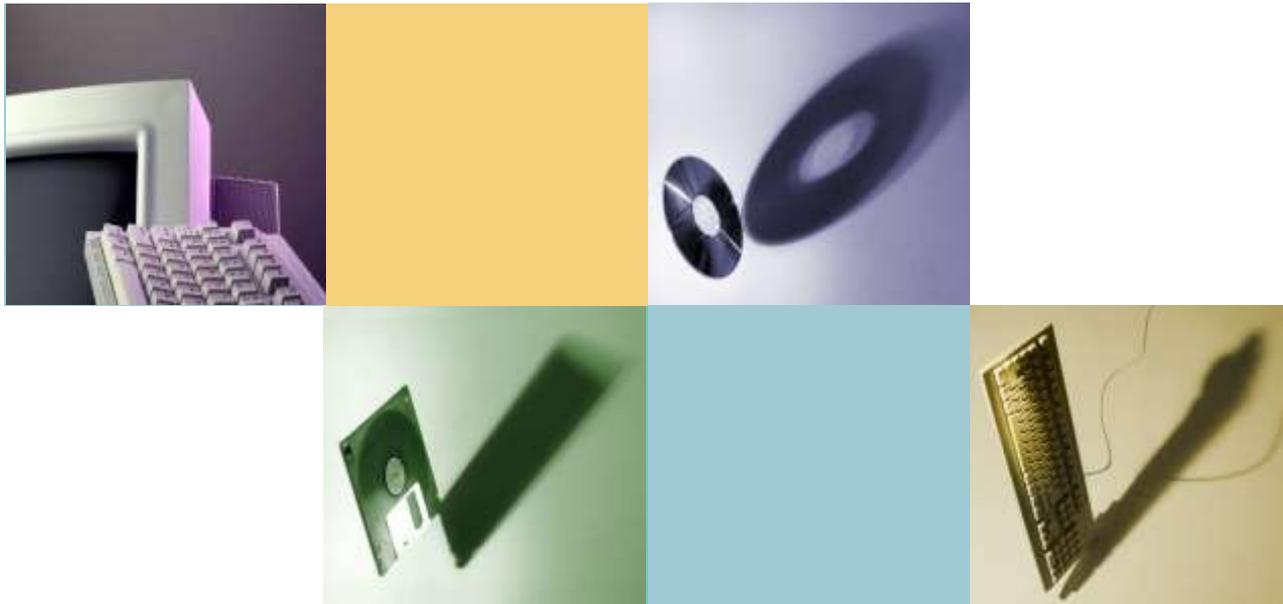


# Unidad 3 – Lección 3.1



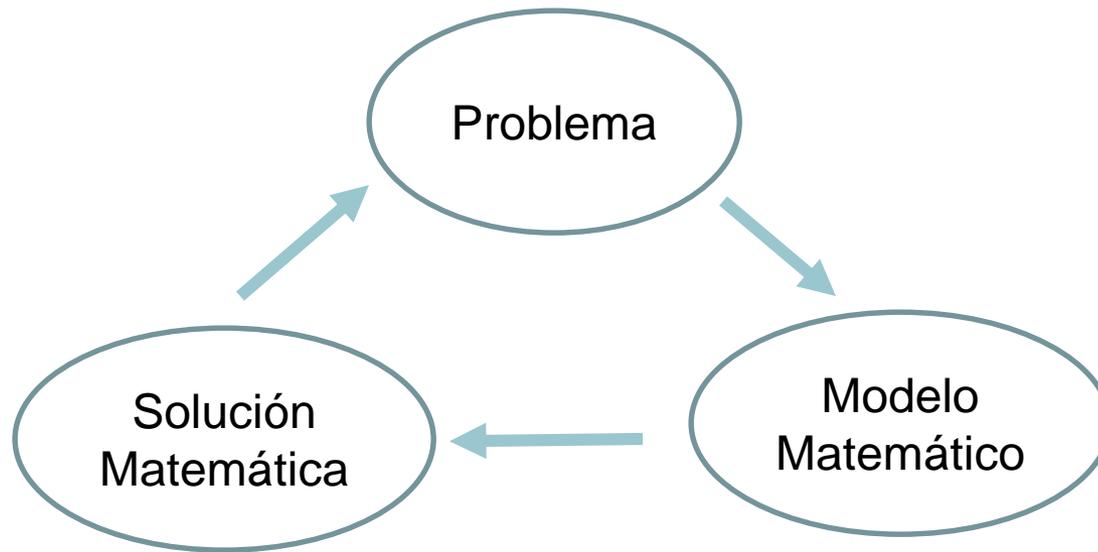
## Introducción a Modelos Matemáticos y Funciones



# Actividades 3.1

- **Referencias en el Texto:** Sección 2.1 – Funciones. 17, 18, 19-25 (impares), 31, 32, 35, 36, 43-45, 49, 55-66, 69-71. Sección
- **Referencias del Web**
  - Math2me: - [Concepto de Función](#); [Identificar una función como gráfica](#); [Graficar y tabular una función raíz cuadrada](#); [Graficar y tabular una función Cúbica](#). Evaluar una Función – [Ejercicio 1](#); [Ejercicio 2](#); [Ejercicio 3](#); [Evaluar Funciones en una Tabla](#); [Sustituir la variable en una función](#)
  - Khan Academy:
    - [¿Qué es una función?](#) ; [Evaluando Funciones](#)
  - [Simplificar un cociente de diferencias](#)





# MODELOS MATEMÁTICOS

Ejemplos:

*Ecuaciones*    *Gráficas*    *Funciones*



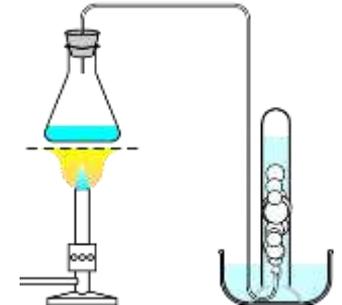
Si  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  son dos pares de valores relacionados de las variables  $x, y$ . Entonces, la razón de cambio promedio es:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplos

Se calienta una solución y se mide la cantidad de oxígeno  $O$  que se produce y se registra el tiempo  $t$ . Si  $(t_1, O_1), (t_2, O_2)$ ,

¿Qué representa  $\frac{\Delta O}{\Delta t}$ ?      ¿Qué signo tendrá  $\frac{\Delta O}{\Delta t}$ ?



Si  $h$  representa la altura que alcanza un cohete y  $w$  el peso del combustible mientras que  $t$  representa el tiempo que transcurre desde su lanzamiento, Si  $(h_1, w_1), (h_2, w_2)$ ,



# RAZÓN DE CAMBIO PROMEDIO

¿Qué representa  $\frac{\Delta w}{\Delta h}$ ?      ¿Qué signo tendrá?

*¿Puede ser la razón de cambio entre dos variables constante?*



# Modelo Lineal

- Un modelo lineal entre dos variables  $(x, y)$  es uno que:
  - se puede expresar a través de una ecuación lineal:  $y = mx + b$
  - la razón de cambio promedio es constante representada por la “pendiente”  $m$ .
  - la pendiente  $m$  representa que  $y$  **cambiará  $m$  unidades por cada unidad** de  $x$ .
- Ejemplos:
  - Si  $y$  es la población de una especie en una región cada  $x$  meses. Entonces, la pendiente indica **el número de especies que aumentará o disminuirá por cada mes adicional**.
  - Si  $C$  es el costo de producir  $x$  artículos. Entonces, la pendiente indica **cuánto cambiará el costo por producir un artículo adicional**.<sup>1</sup>

Si  $a$  es el área de superficie de una persona que pesa  $x$  libras. Entonces, ¿qué represente la pendiente?

**.... cuánto cambiará el área de superficie de una persona por cada libra adicional que cambie.**



# Ejemplo 1

- Una tienda de artículos deportivos vende unos guantes de pelota que cuestan \$60 en \$82 y unos tenis de correr cuestan \$80 en \$106. Si se asume que la política de *margen de utilidad* (ganancia) de la tienda que cuestan más de \$30 es lineal, ...
  1. Halla un modelo lineal que exprese el precio al detal P en términos del costo mayorista C.
  2. Halla el precio al detal P si el costo del guante se aumentara a \$61 y el costo de los tenis de correr se aumentara a \$81.
  3. Halla el efecto sobre el precio de un aumento de \$1 en el costo, para cualquier artículo de \$30.
  4. Halla el precio al detal de una raqueta de jugar tenis que cuestan \$150.

## Solución:

En un Modelo Lineal de P y C se busca:  $P(C) = mC + b$ . Se asume que  $m$  es constante.

Dado que:  $P = \$82$  cuando  $C = \$60$ , y que  $P = \$106$  cuando  $C = \$80$

Entonces los puntos son:  $(60, 82)$  y  $(80, 106)$   $m = \frac{\Delta P}{\Delta C} = \frac{P_2 - P_1}{C_2 - C_1} = \frac{106 - 82}{80 - 60} = \frac{24}{20} = 1.20$

Entonces el **modelo lineal**:

$$P - y_1 = 1.20(C - x_1)$$

$$P - 82 = 1.20C - 72$$

$$P - y_1 = 1.20(C - x_1)$$

$$P = 1.20C - 72 + 82$$

$$P - 82 = 1.20(C - 60)$$

$$P(C) = 1.20C + 10$$

$$C \geq \$30$$



# Ejemplo 1 ...

2. Halla el precio al detal  $P$  si el costo del guante se aumentara a \$61 y el costo de los tenis de correr se aumentara a \$81.
3. Halla el efecto sobre el precio de un aumento de \$1 en el costo, para cualquier artículo de \$30.
4. Halla el precio al detal de una raqueta de jugar tenis que cuestan \$150.

- Solución:

2. Como  $P(C) = 1.20C + 10$

$$P(61) = 1.20(61) + 10 = 73.20 + 10 = 83.20$$

$$P(81) = 1.20(81) + 10 = 97.20 + 10 = 107.20$$

**Observe** que:  $P$  aumentó por **\$1.20** en cada caso

3. En general por cada aumento de \$1 en el costo  $C$ , habrá un aumento de \$1.20 en  $P$

4. El precio al detal de una raqueta que cuesta \$150 será:

$$\frac{\Delta P}{\Delta C} = 1.20$$

$$P(150) = 1.20(150) + 10 = 180 + 10 = \mathbf{\$190}$$



# Ejercicios del Texto 1.10

- 87. Global Warming** Some scientists believe that the average surface temperature of the world has been rising steadily. The average surface temperature can be modeled by

$$T = 0.02t + 15.0$$

where  $T$  is temperature in  $^{\circ}\text{C}$  and  $t$  is years since 1950.

- (a) What do the slope and  $T$ -intercept represent?
  - (b) Use the equation to predict the average global surface temperature in 2050.
- 90. Production Cost** A small-appliance manufacturer finds that if he produces  $x$  toaster ovens in a month, his production cost is given by the equation

$$y = 6x + 3000$$

(where  $y$  is measured in dollars).

- (a) Sketch a graph of this linear equation.
- (b) What do the slope and  $y$ -intercept of the graph represent?

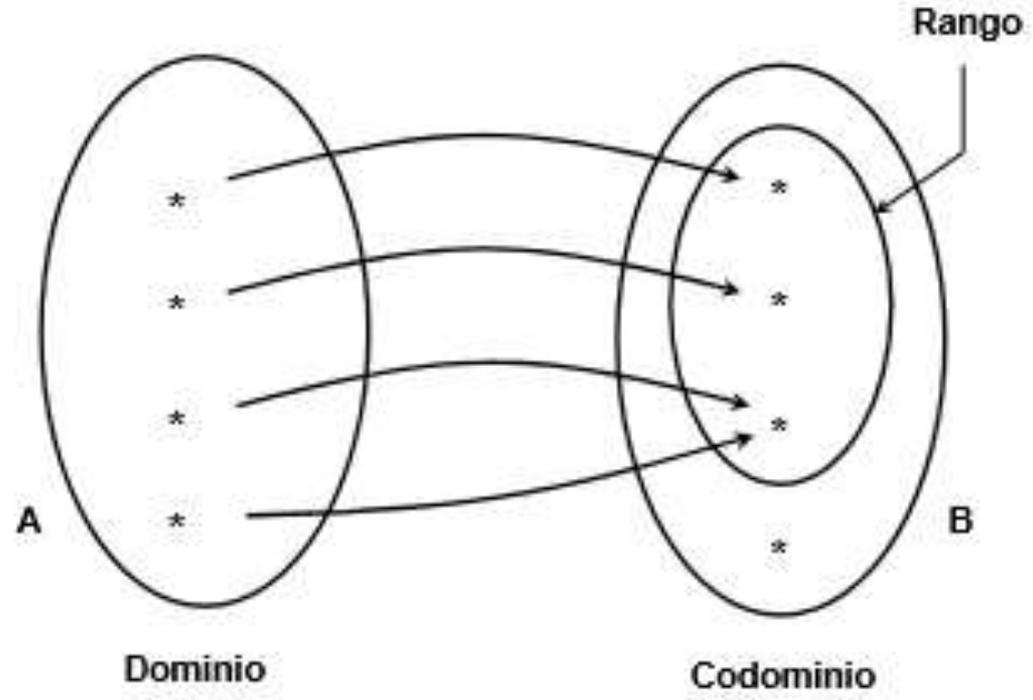
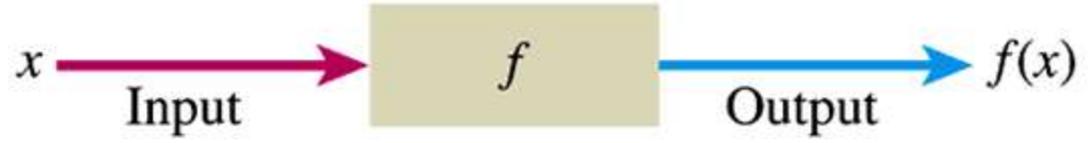
- 92. Crickets and Temperature** Biologists have observed that the chirping rate of crickets of a certain species is related to temperature, and the relationship appears to be very nearly linear. A cricket produces 120 chirps per minute at  $70^{\circ}\text{F}$  and 168 chirps per minute at  $80^{\circ}\text{F}$ .

- (a) Find the linear equation that relates the temperature  $t$  and the number of chirps per minute  $n$ .
- (b) If the crickets are chirping at 150 chirps per minute, estimate the temperature.

- 93. Depreciation** A small business buys a computer for \$4000. After 4 years the value of the computer is expected to be \$200. For accounting purposes the business uses *linear depreciation* to assess the value of the computer at a given time. This means that if  $V$  is the value of the computer at time  $t$ , then a linear equation is used to relate  $V$  and  $t$ .

- (a) Find a linear equation that relates  $V$  and  $t$ .
- (b) Sketch a graph of this linear equation.
- (c) What do the slope and  $V$ -intercept of the graph represent?
- (d) Find the depreciated value of the computer 3 years from the date of purchase.





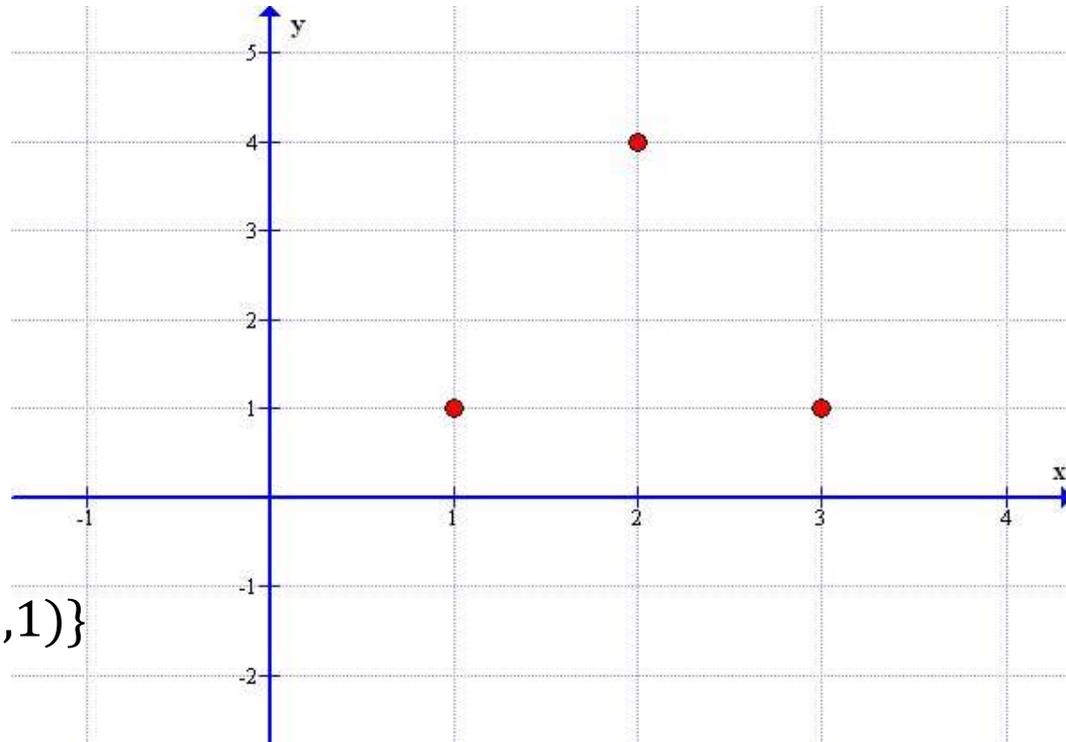
# FUNCIONES



# ¿Cómo se representa una función?

- Sea  $x = \{1, 2, 3\}$  ,  $y = \{1, 4\}$ 
  1. Tabla de valores

x	y
1	1
2	4
3	1



2.  $f(1) = 1$   
 $f(2) = 4$   
 $f(3) = 1$

2.  $f = \{(1,1), (2,4), (3,1)\}$

3. Gráfica

4. Ecuación con dos variables:

Ejemplo:  $y = 2x^2 + 5$        $f(x) = 2x^2 + 5$



# Ejemplo 1

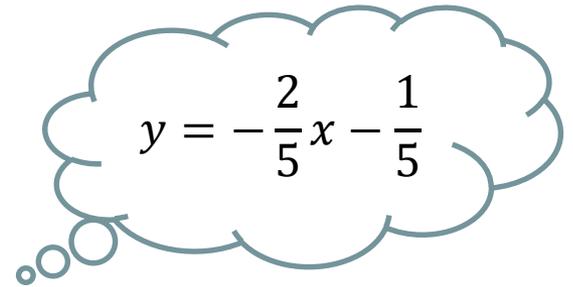
- Escriba la ecuación  $2x + 5y = -1$  como una función de la variable  $x$ .
  - Despeje  $y$  de la ecuación.

$$2x + 5y = -1$$

$$5y = -2x - 1$$

$$y = \frac{-2x - 1}{5}$$

$$y = \frac{-2x}{5} - \frac{1}{5}$$



A thought bubble containing the final function equation:  $y = -\frac{2}{5}x - \frac{1}{5}$

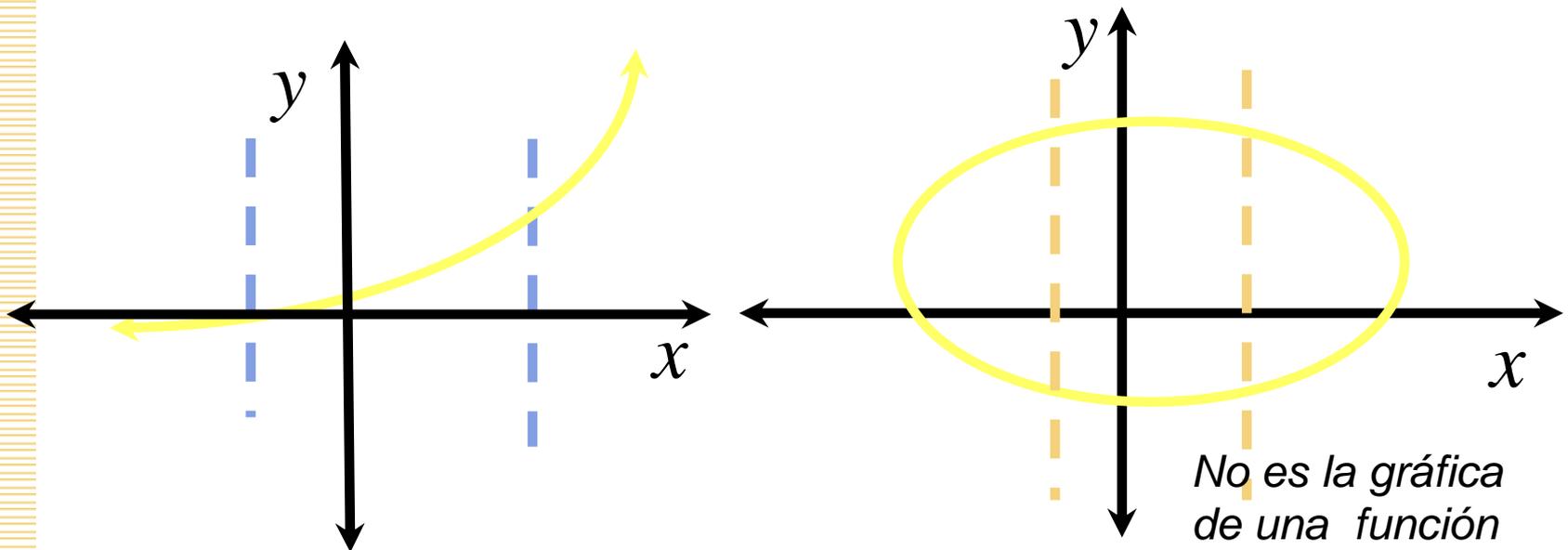
- Reemplace  $y$  for  $f(x)$

$$f(x) = \frac{-2x}{5} - \frac{1}{5}$$



# Gráfica de funciones

- No toda ecuación define una función de  $x$ .
- Un conjunto de puntos pertenecen a la gráfica de una función siempre y cuando cualquier recta vertical no pase por mas de un punto.



**Prueba de la recta vertical**



# Ejemplo 2

Para la función  $f(x) = 2x^2 + 5$

- a) determine  $f(3)$
- b) determine  $f(h)$
- c) determine  $f(x + 1)$

• Solución:

$$- a) \quad f(3) = 2(3)^2 + 5 = 23$$

$$- b) \quad f(h) = 2(h)^2 + 5 = 2h^2 + 5$$

$$\begin{aligned} - c) \quad f(x + 1) &= 2(x + 1)^2 + 5 \\ &= 2(x + 1)(x + 1) + 5 \\ &= 2(x^2 + 2x + 1) + 5 \\ &= 2x^2 + 4x + 2 + 5 \\ &= 2x^2 + 4x + 7 \end{aligned}$$



# Ejercicio #1

- Para la función  $f(x) = 3x^2 + 2x - 4$ 
  - a) determine  $f(0)$
  - b) determine  $f(-1)$
  - c) determine  $f(x - 1)$

- Soluciones:

$$f(0) = 3(0)^2 + 2(0) - 4 = -4$$

$$f(-1) = 3(-1)^2 + 2(-1) - 4 = -3$$

$$\begin{aligned}f(x-1) &= 3(x-1)^2 + 2(x-1) - 4 \\ &= 3(x^2 - 2x + 1) + 2x - 2 - 4 \\ &= 3x^2 - 6x + 3 + 2x - 6 \\ &= 3x^2 - 4x - 3\end{aligned}$$



# Ejemplo 3

- Para  $f(x) = 1 - 2x^2$  calcule

$$\begin{aligned} & \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \frac{(1 - 2(x+h)^2) - (1 - 2x^2)}{h} \\ &= \frac{(1 - 2(x^2 + 2xh + h^2)) - 1 + 2x^2}{h} \\ &= \frac{1 - 2x^2 - 4xh - 2h^2 - 1 + 2x^2}{h} \\ &= \frac{-4xh - 2h^2}{h} \\ &= \frac{h(-4x - 2h)}{h} \end{aligned}$$

$$= -4x - 2h$$

$$\begin{aligned} & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \frac{(1 - 2x^2) - (1 - 2a^2)}{x - a} \\ &= \frac{(1 - 2x^2) - 1 + 2a^2}{x - a} \\ &= \frac{2a^2 - 2x^2}{x - a} \\ &= \frac{2(a^2 - x^2)}{x - a} \\ &= \frac{2(a - x)(a + x)}{x - a} \end{aligned}$$

$$= -2(a + x)$$



# Ejemplo 4

- Determine el dominio de las funciones:

a)  $\{(-2, 5), (0, 1), (1, 5)\}$

b)  $g(x) = 3x^3 - 5x + 1$

*Ejemplo de una Función polinómica*

c)  $s(t) = \frac{4}{2t - 1}$

*Ejemplo de una Función racional*

- Solución:

a) El dominio es  $= \{-2, 0, 1\}$

b) El dominio de  $g$  es el conjunto de todos los números reales.

c) El denominador de una expresión fracción no puede ser 0. Para hallar cuándo esto ocurre, resuelva la ecuación:

$$2t - 1 = 0$$

$$2t = 1$$

$$t = \frac{1}{2}$$

Dominio de  $s$  es Reales  $- \left\{ \frac{1}{2} \right\}$



# Ejemplo 5

- Determine el dominio de:  $h(z) = \sqrt{6 - 2z}$
- Solución:
- Como la raíz cuadrada de un número negativo no es un número real,

$$6 - 2z \geq 0$$

$$-2z \geq -6$$

$$\frac{-2z}{-2} \leq \frac{-6}{-2}$$

$$z \leq 3$$

*Recuerde: Cuando se multiplica o divide un número negativo a ambos lados de una desigualdad, se invierte la desigualdad.*

Dominio de  $h$  es  $(-\infty, 3]$



## Ejemplo 6

- Determine el Dominio y Rango de la función:  $f(x) = \frac{x - 1}{x + 2}$
- Solución:

$$\text{Dominio: } (-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$$

- Rango:

- Observe que si  $\frac{x - 1}{x + 2} = 1$

$$x - 1 = x + 2$$

$$x - x = 1 + 2$$

$$0 = 3$$



*No hay solución*

$$\text{Rango: } (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$$



# Ejemplo 7

- Determine el Dominio y Rango de las funciones

$$f(x) = |x - 1| + 2$$

$$f(x) = \sqrt{x - 1} + 2$$

Solución:

Dominio:  $(-\infty, \infty)$

Rango:

$$|x - 1| + 2$$

$$[0, \infty) + 2 \rightarrow [2, \infty)$$

Dominio:

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1 \rightarrow [1, \infty)$$

Rango:

$$\sqrt{x - 1} + 2$$

$$[0, \infty) + 2 \rightarrow [2, \infty)$$



# Ejercicios del Texto 2.1

17-18 Complete la Tabla

17.  $f(x) = 2(x - 1)^2$       18.  $g(x) = |2x + 3|$

x	f(x)
-1	
0	
1	
2	
3	

x	g(x)
-3	
-2	
0	
1	
3	

31.  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{if } x < 0 \\ x + 1 & \text{if } x \geq 0 \end{cases}$   
 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)$

32.  $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{if } x \leq 2 \\ 2x - 3 & \text{if } x > 2 \end{cases}$   
 $f(-3), f(0), f(2), f(3), f(5)$

33.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & \text{if } x \leq -1 \\ x & \text{if } -1 < x \leq 1 \\ -1 & \text{if } x > 1 \end{cases}$   
 $f(-4), f(-\frac{3}{2}), f(-1), f(0), f(25)$

34.  $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } x < 0 \\ x + 1 & \text{if } 0 \leq x \leq 2 \\ (x - 2)^2 & \text{if } x > 2 \end{cases}$   
 $f(-5), f(0), f(1), f(2), f(5)$

31-36 Evalúe la función definida por partes en los valores indicados.

35.  $f(x) = x^2 + 1;$   
 $f(x + 2), f(x) + f(2)$

36.  $f(x) = 3x - 1;$   
 $f(2x), 2f(x)$

19-30 Evalúe la función en los valores indicados

19.  $f(x) = x^2 - 6;$   $f(-3), f(3), f(0), f(\frac{1}{2})$

20.  $f(x) = x^3 + 2x;$   $f(-2), f(-1), f(0), f(\frac{1}{2})$

21.  $f(x) = \frac{1 - 2x}{3};$   
 $f(2), f(-2), f(\frac{1}{2}), f(a), f(-a), f(a - 1)$

22.  $h(x) = \frac{x^2 + 4}{5};$   
 $h(2), h(-2), h(a), h(-x), h(a - 2), h(\sqrt{x})$

23.  $f(x) = x^2 + 2x;$   
 $f(0), f(3), f(-3), f(a), f(-x), f(\frac{1}{a})$

24.  $h(t) = t + \frac{1}{t};$   
 $h(-1), h(2), h(\frac{1}{2}), h(x - 1), h(\frac{1}{x})$

25.  $g(x) = \frac{1 - x}{1 + x};$   
 $g(2), g(-1), g(\frac{1}{2}), g(a), g(a - 1), g(x^2 - 1)$

# Ejercicios del Texto 2.1

**43-50** Encuentre  $f(a)$ ,  $f(a + h)$  y el cociente de diferencia  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  donde  $h \neq 0$

43.  $f(x) = 5 - 2x$

44.  $f(x) = 3x^2 + 2$

45.  $f(x) = 5$

46.  $f(x) = \frac{1}{x+1}$

47.  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

48.  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

49.  $f(x) = 3 - 5x + 4x^2$  50.  $f(x) = x^3$

**51-54** Encuentre el Dominio y Rango.

51.  $f(x) = 3x$  52.  $f(x) = 5x^2 + 4$

53.  $f(x) = 3x, \quad -2 \leq x \leq 6$

54.  $f(x) = 5x^2 + 4, \quad 0 \leq x \leq 2$

**55-72** Encuentre el Dominio.

55.  $f(x) = \frac{1}{x-3}$

56.  $f(x) = \frac{1}{3x-6}$

57.  $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

58.  $f(x) = \frac{x^4}{x^2+x-6}$

59.  $f(t) = \sqrt{t+1}$  60.  $g(t) = \sqrt{t^2+9}$

61.  $f(t) = \sqrt[3]{t-1}$  62.  $g(x) = \sqrt{7-3x}$

63.  $f(x) = \sqrt{1-2x}$  64.  $g(x) = \sqrt{x^2-4}$

65.  $g(x) = \frac{\sqrt{2+x}}{3-x}$  66.  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{2x^2+x-1}$

67.  $g(x) = \sqrt[4]{x^2-6x}$  68.  $g(x) = \sqrt{x^2-2x-8}$

69.  $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x-4}}$  70.  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{6-x}}$

71.  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{\sqrt{2x-1}}$  72.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$

